Educadores e estudantes,

Este livro integra o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), executado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e pelo Ministério da Educação (MEC). Seu conteúdo passou por diversas etapas avaliativas, visando a garantir a vocês livros didáticos de qualidade.

As obras destinadas aos anos finais do ensino fundamental em 2024 (e que também serão utilizadas nos anos de 2025, 2026 e 2027) terão também uma versão digital. Assim, vocês poderão utilizar seus livros no formato que preferirem. As obras digitais estarão disponíveis no Portal do PNLD, em pnld.fnde.gov.br.

Conversem com a gestão da sua escola, que poderá ajudá-los a acessar todos os livros digitais do Portal. Informações e orientações de acesso aos novos materiais digitais do PNLD podem ser acessadas no link "Livro Digital", disponível em https://www.gov.br/fnde/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro.

Para colaborar com o PNLD, todos podem enviar sugestões e ideias para o e-mail livrodidatico@fnde.gov.br. O PNLD é um patrimônio de todos nós.

O FNDE deseja um ano letivo de muitas trocas e descobertas!

FNDE
Fundo Nacional
de Desenvolvimento
da Educação

MATEMÁTICA E REALIDADE

8º ANO

Gelson **IEZZI**
Osvaldo **DOLCE**
Antonio **MACHADO**

Componente curricular: Matemática
Ensino Fundamental – Anos Finais

MANUAL DO PROFESSOR

Gelson Iezzi

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)

Engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP)

Atuou como professor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

Atuou como professor do Ensino Médio na rede particular de ensino

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

Osvaldo Dolce

Engenheiro civil pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP)

Atuou como professor dos Anos Finais do Ensino Fundamental na rede pública de ensino e de cursos pré-vestibulares na rede particular de ensino

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

Antonio Machado

Mestre em Estatística pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)

Licenciado em Matemática pelo IME-USP

Atuou como professor do Ensino Superior no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)

Atuou como professor do Ensino Médio na rede particular de ensino

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

10ª edição, São Paulo, 2022

Editora Saraiva

Editora Saraiva

Direção executiva: Flávia Bravin
Direção de negócio: Volnei Korzenieski
Gestão editorial: Alice Ribeiro Silvestre
Gestão de planejamento: Eduardo Kruel Rodrigues
Gestão de projeto digital: Tatiany Renó
Gestão de área: Rodrigo Pessota
Coordenação de área: Pamela Hellebrekers Seravalli
Edição: Igor Nóbrega, Valéria Elvira Prete, Daniela Benites e Gabriela Barbosa da Silva (editores), Tainara Figueiredo Dias e Marcio Vieira de Almeida (assist.), Rogério Fernandes Cantelli e Nadili L. Ribeiro (digital)
Planejamento e controle de produção: Vilma Rossi, Camila Cunha, Adriana Souza e Isabela Salustriano
Revisão: Mariana Braga de Milani (ger.), Alexandra Costa da Fonseca, Ana Paula C. Malfa, Carlos Eduardo Sigrist, Flavia S. Venezio e Sueli Bossi
Arte: Claudio Faustino (ger.), Erika Tiemi Yamauchi (coord.), Patricia Mayumi Ishihara (edição de arte), Setup (diagramação)
Iconografia e tratamento de imagens: Roberto Silva (ger.), Claudia Balista e Alessandra Pereira (pesquisa iconográfica), Emerson de Lima (tratamento de imagens)
Direitos autorais: Fernanda Carvalho (coord.), Emília Yamada, Erika Ramires e Carolyne Ribeiro (analistas adm.)
Licenciamento de conteúdos de terceiros: Erika Ramires e Tempo Composto Ltda.
Ilustrações: Alberto De Stefano, Artur Fujita, Hélio Senatore, Ilustra Cartoon, Luigi Rocco, Marcelo Gagliano e Tiago Donizete Leme
Cartografia: Mouses Sagiorato
Design: Luis Vassallo (proj. gráfico, capa e Manual do Professor)
Foto de capa: Souvik Bhattacharya/Moment/Getty Images
Pré-impressão: Alessandro de Oliveira Queiroz, Pamela Pardini Nicastro, Débora Fernandes de Menezes, Fernanda de Oliveira e Valmir da Silva Santos

Alameda Santos, 960, 4º andar, setor 3
Cerqueira César – São Paulo – SP – CEP 01418-002
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
saceditorasaraiva@somoseducacao.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Iezzi, Gelson
Matemática e realidade : 8º ano / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado. -- 10. ed. -- São Paulo : Saraiva Educação S.A., 2022.
(Matemática e realidade)

Bibliografia
Suplementado pelo manual do professor
ISBN 978-65-5766-251-9 (aluno)
ISBN 978-65-5766-252-6 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental - Anos finais) I. Título II. Dolce, Osvaldo III. Machado, Antonio

22-2418 CDD 372.7

Angélica Ilacqua - CRB-8/7057

2022
Código da obra CL 820854
CAE 802097 (AL) / 802098 (PR)
10ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Impressão e acabamento

APRESENTAÇÃO

Caro professor,

Esta coleção tem o objetivo de servir de suporte para suas aulas de Matemática. Neste Manual do Professor você encontra informações que o auxiliam no trabalho com as propostas didáticas da coleção durante o ano letivo.

Acreditamos que o ensino de Matemática é fundamental para a formação de cidadãos críticos e conscientes de seu papel na sociedade, uma vez que possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia e das habilidades de interpretação, argumentação e análise em diversas situações cotidianas. Além disso, propicia aos estudantes fazer conjecturas, tomar decisões e compreender melhor a realidade na qual estão inseridos, tornando-os aptos a intervir no meio, quando necessário.

Segundo esse cenário, concebemos esta coleção, que contempla os requisitos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em situações contextualizadas e que consideram a interação da Matemática com outras áreas do conhecimento e com os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs).

Além dos pressupostos metodológicos da coleção, apresentamos neste Manual orientações específicas que potencializarão o desempenho docente em sala de aula. Você encontrará sugestões de atividades complementares, artigos científicos, teses e diversas fontes de estudos. Disponibilizamos também indicações de recursos externos ao Livro do Estudante, como *sites*, simuladores, visitações, obras paradidáticas, entre outras.

O trabalho docente é composto da necessidade do constante estudo de temas que permeiam a educação no Brasil e no mundo. Em nosso país, alguns desses temas têm impactado diretamente as práticas docentes há alguns anos. É essencial que você se atualize e expanda seu campo conceitual acerca de inovações e tendências pedagógicas para acompanhar as mudanças com olhar crítico e reflexivo sobre sua profissão. Neste Manual, abordamos alguns desses temas visando suscitar reflexões, adaptações e ressignificações de práticas e saberes docentes.

Esperamos que todos esses elementos contribuam com sua prática docente e sejam o ponto de partida para a construção de um processo de ensino e aprendizagem significativo.

Os autores.

Sumário

Orientações gerais

A estrutura deste Manual do Professor

As ***Orientações gerais*** do Manual descrevem a coleção e apresentam a estrutura do Livro do Estudante, com indicações dos objetivos e funções das seções e dos boxes variados que o compõem.

Você conhecerá a relação de conteúdos abordados ao longo dos quatro volumes destinados aos Anos Finais do Ensino Fundamental, com detalhamento das habilidades exploradas.

Refletimos ainda, neste tópico, sobre os pressupostos metodológicos desta coleção, sugerimos processos avaliativos, referências complementares, sugestões de leitura e abordamos outros aspectos teóricos que embasaram a construção da obra e contribuem para sua formação continuada.

As ***Orientações específicas*** de cada volume deste Manual trazem propostas de cronograma bimestral, trimestral e semestral correlacionando-os aos conteúdos trabalhados no Livro do Estudante, de modo que você tenha uma visão geral dos temas para o planejamento do ano letivo.

Ainda nas *Orientações específicas*, são apresentados os objetivos pedagógicos e as justificativas de cada Unidade, além das competências gerais e competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental, das habilidades e dos Temas Contemporâneos Transversais contemplados na Unidade. Constam também informações gerais sobre os principais aspectos abordados ao longo dos capítulos.

Desse modo, o conjunto de informações das *Orientações específicas* deste Manual é muito útil e deve ser considerado no planejamento escolar e das aulas, junto às características particulares da turma e da comunidade escolar.

Em seguida, na seção ***Resoluções***, você encontra as resoluções completas de todas as atividades do Livro do Estudante. Caso os estudantes apresentem resoluções diferentes das propostas nessa seção, analise e valorize as estratégias utilizadas e oriente-os, se necessário.

Reprodução da página LVII, volume 6 do Manual do Professor.

Por fim, o **Manual do Professor em U** traz, página a página, as ***Orientações didáticas***, com comentários específicos sobre os conteúdos trabalhados em cada página do Livro do Estudante. Há apontamentos sobre práticas pedagógicas que você pode desenvolver com a turma; textos de aprofundamento teórico para você, professor; leituras complementares para os estudantes; diferentes estratégias para a resolução de exercícios propostos; temas para investigação; tarefas de exploração e pesquisa, entre outros. As sugestões de *sites*, leituras complementares, atividades extras e visitações que enriquecem o conteúdo explorado nas páginas são apresentadas nos boxes ***Proposta para o professor*** e ***Proposta para o estudante***.

Reprodução das páginas 10 e 11, volume 6 do Manual do Professor.

No início das seções e de alguns tópicos, o boxe ***Na BNCC*** descreve como as habilidades e os Temas Contemporâneos Transversais estão distribuídos na obra. Mostramos, ainda, de que modo mobilizamos, nesta coleção, as competências gerais e as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento orientador para a criação dos currículos escolares e das propostas na Educação Básica. Fornece elementos para que os sistemas educacionais públicos e particulares fiquem alinhados às diretrizes curriculares no que se refere a conhecimentos essenciais, competências e habilidades a serem desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica. Esse documento indica:

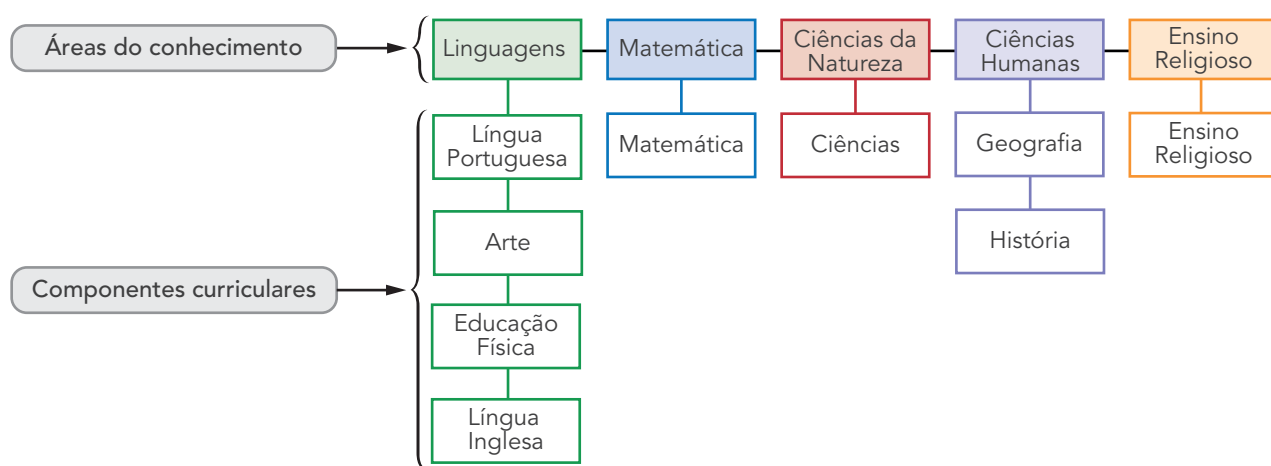
- as competências gerais que os estudantes devem desenvolver em todas as áreas do conhecimento;
- as competências específicas de cada área de conhecimento e respectivos componentes curriculares;
- os conteúdos mínimos que os estudantes devem aprender, os objetos de conhecimento e as habilidades a serem desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica;
- a progressão e o sequenciamento dos conteúdos e habilidades mínimos de cada componente curricular para todos os anos da Educação Básica.

A BNCC e o currículo

A BNCC é uma referência obrigatória, mas não é o currículo. Ela estabelece os objetivos que se espera alcançar, enquanto o currículo define como alcançar os objetivos. As redes de ensino têm autonomia para elaborar ou adequar os currículos respeitando a realidade local e os projetos pedagógicos.

Os conteúdos da BNCC para o Ensino Fundamental – Anos Iniciais (1º ao 5º ano) e Anos Finais (6º ao 9º ano) – são sugeridos com base em diferentes componentes curriculares, organizados em cinco áreas do conhecimento, conforme apresentado a seguir.

Áreas do conhecimento	Linguagens	Matemática	Ciências da Natureza	Ciências Humanas	Ensino Religioso
Componentes curriculares	Língua Portuguesa	Matemática	Ciências	Geografia	Ensino Religioso
	Arte			História	
	Educação Física				
	Língua Inglesa				

Banco de imagens/Arquivo da editora

A educação integral

A educação integral, como definida na BNCC, é uma proposta de formação ampla e visa promover o desenvolvimento cognitivo, físico, social, emocional e cultural dos estudantes. Desse modo, as diretrizes da Base estão respaldadas no compromisso com a compreensão das singularidades e diversidades dos sujeitos, pois entende-se que a juventude não é simplesmente um período entre a infância e a fase adulta, mas uma etapa do desenvolvimento humano com características biológicas, psicológicas, sociais e culturais próprias.

A proposta da BNCC é promover uma educação voltada ao desenvolvimento pleno e plural de ideias, ao convívio social republicano, à Cultura de Paz e à saúde mental dos estudantes, preparando-os para o exercício da empatia, da cooperação e da argumentação.

A convivência escolar e a Cultura de Paz

O trabalho com a BNCC pressupõe articulações entre os envolvidos no processo educativo: **estudantes**, **professores** e **equipe gestora**, de modo a garantir as condições básicas de vida e a criação de mecanismos que favoreçam a atuação e o protagonismo da comunidade escolar na construção da democracia e na garantia e efetivação de direitos e justiça social.

Nesse sentido, para assegurar a boa convivência no ambiente escolar e a Cultura de Paz, é preciso adotar uma postura na qual a educação seja um fator essencial e contribua para o combate à violência, à intimidação sistemática (*bullying*) e às ações excludentes e preconceituosas.

O texto a seguir reflete o que se espera ao propor um ambiente escolar para promoção da Cultura de Paz.

> A educação se dá para além do ambiente escolar, sendo composta pelo tempo e contexto em que as aprendizagens acontecem, em espaços formais e não formais de educação e a partir da interação de diferentes sujeitos sociais. Dessa forma, é preciso respeitar, ouvir e valorizar a diversidade de participantes que constroem esse espaço, na perspectiva de atuação conjunta dos agentes da rede de proteção na intenção de restabelecer "os valores e a segurança necessários para um ambiente educacional saudável, no qual a justiça, a igualdade, o respeito, a solidariedade e a consideração entre as pessoas prevalecem" [...].
>
> Ao se propor um ambiente escolar para a promoção da Cultura de Paz e de convivências respeitosas, possibilita-se que a escola cumpra a sua função fundamental: promover aprendizagens as quais devem estar em consonância com as demandas pessoais e coletivas, de forma a fortalecer os/as estudantes como sujeitos de direitos que pensam, criticam, refletem, agem coletivamente, para entender, compreender e experimentar o mundo, desenvolver-se [...].
>
> Assim, a educação para a Cultura da Paz propõe mudanças inspiradas em valores como justiça social, diversidade, respeito e solidariedade, aliadas às ações fundamentadas na educação, saúde, cultura, esporte, participação cidadã e melhoria da qualidade de vida no território de responsabilidade compartilhada entre educação e diversos setores da sociedade [...].
>
> [...] A Educação em Direitos Humanos deve ser permanente, continuada e global, atenta à mudança cultural, à interdisciplinaridade, com base nos eixos transversais do currículo, deve ocorrer com a colaboração de educadores/as, educandos/as e diferentes agentes da rede de proteção. Deve igualmente abarcar questões concernentes "aos campos da educação formal, à escola, aos procedimentos pedagógicos, às agendas e instrumentos que possibilitem uma ação pedagógica conscientizadora e libertadora, voltada para o respeito e valorização da diversidade, aos conceitos de sustentabilidade e de formação da cidadania ativa" [...].
>
> Assim, as orientações e ações voltadas para a promoção da cidadania e garantia dos Direitos Humanos e Cultura de Paz pautam-se na compreensão das diversas formas de violências, violações de Direitos Humanos e suas ocorrências no campo dos direitos civis, políticos, econômicos, sociais, culturais e ambientais. (DISTRITO FEDERAL, 2020, p. 11-13)

A perspectiva de enfrentamento e prevenção à violência contra as crianças e os jovens do Ensino Fundamental é um dos grandes desafios da escola, dos familiares e responsáveis e de toda sociedade.

Em março de 2019, a escola estadual Raul Brasil, em Suzano (SP), foi palco de uma das maiores tragédias em unidades de ensino do país, que resultou em mortos e feridos. Essa tragédia mostrou a necessidade de ações que promovam a Cultura de Paz no ambiente escolar. Em outubro do mesmo ano, o artista brasileiro Eduardo Kobra (1975-) criou um painel para revitalizar o pátio da escola: a representação de um abraço carinhoso entre um professor e um estudante que carrega o símbolo da paz na mochila. Foto de 2020.

Acreditamos que as instituições de educação devem reconhecer a extensão e o impacto gerado pela prática de violência entre membros da unidade escolar e desenvolver ações para que uma Cultura de Paz e aceitação da diversidade seja construída de modo participativo e democrático.

Proposta para o professor

No documento *Convivência escolar e Cultura de Paz*, promovido pelo governo do Distrito Federal, constam algumas ações que auxiliam na manutenção da Cultura de Paz no ambiente escolar. Sugerimos a leitura dessas sugestões e o compartilhamento delas com toda a equipe da escola. Isso os auxiliará no desenvolvimento de ações e na tomada de decisões que privilegiem a boa convivência no ambiente escolar.

DISTRITO FEDERAL. Secretaria de Estado de Educação. *Convivência escolar e Cultura de Paz*. Brasília, DF, 2020. p. 66-67. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 9 jun. 2022.

Os impactos da pandemia para os estudantes do Ensino Fundamental

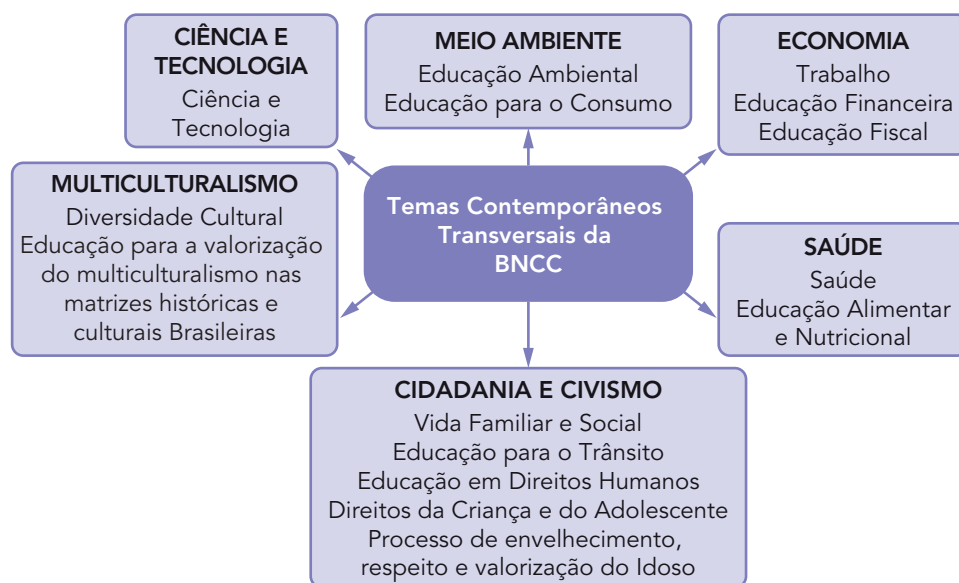
A pandemia do novo agente do coronavírus, que teve origem em 2019, na China, trouxe muitas consequências para nossa sociedade, afetando, inclusive, a área da educação, já que o modelo presencial de ensino teve de ser substituído para o modelo remoto rapidamente e com pouco planejamento, ocasionando uma mudança significativa no ambiente escolar e na maneira como as crianças e os jovens se relacionavam.

Muito se fala sobre a saúde mental dos jovens e das crianças por causa desse isolamento tão duro imposto prematuramente a todos durante mais de um ano. A suspensão das atividades presenciais evidenciou as desigualdades e seu impacto na educação, uma vez que o tipo de apoio escolar e as condições do ambiente doméstico variaram bastante em relação a questões como acesso à internet e preparo e disponibilidade das famílias, e tudo isso influenciou a aprendizagem dos estudantes.

Diante desse contexto, professores e equipe gestora estão mais atentos aos estudantes do Ensino Fundamental, porque trazem consigo experiências pessoais e acadêmicas únicas. Sugerimos o uso de avaliações diagnósticas (apresentadas em momento oportuno neste Manual) e planos de ensino personalizados, além do foco nos aspectos socioemocionais do trabalho, visando garantir a ressocialização desses estudantes.

Os Temas Contemporâneos Transversais

Na perspectiva da BNCC e desta coleção, diversos aspectos podem ser contemplados a partir dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) que exploram, sobretudo, questões da realidade social brasileira e do mundo, integrando-as às demais áreas do conhecimento.

Assim, o desenvolvimento dos TCTs possibilita a integração entre os diferentes componentes curriculares e faz conexão com situações vivenciadas pelos estudantes em suas realidades, o que contribui para trazer contexto e contemporaneidade aos objetos de conhecimento descritos na BNCC.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: propostas de Práticas de Implementação. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 2 jun. 2022.

As competências gerais da BNCC

A BNCC foi estruturada para promover desenvolvimento amplo do sujeito, apoiada nos princípios da educação integral e de acordo com a compreensão das singularidades e diversidades dos sujeitos em diferentes dimensões formativas.

> A Educação Básica deve visar à formação e ao desenvolvimento humano global, o que implica compreender a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento, rompendo com visões reducionistas que privilegiam ou a dimensão intelectual (cognitiva) ou a dimensão afetiva. (BRASIL, 2017, p. 14)

No texto introdutório da BNCC, a proposta formativa da educação integral é feita para todas as etapas da Educação Básica e tem como alicerce o trabalho com as **10 competências gerais** para a Educação Básica.

De acordo com a BNCC, competência é a mobilização e a articulação de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolução de situações cotidianas relacionadas a meio ambiente, princípios éticos, cidadania, mundo do trabalho, entre outras questões de urgência social.

> Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC. (BRASIL, 2017, p. 13)

A seguir, estão listadas as dez competências gerais definidas pela BNCC.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários. (BRASIL, 2017, p. 9-10)

As competências gerais da BNCC nesta coleção

Nesta coleção, utilizaremos a sigla **CG** para nos referir às competências gerais da BNCC para a Educação Básica. Desse modo, a primeira competência será nomeada como **CG01**, a segunda como **CG02**, e assim sucessivamente.

A **CG01** faz referência ao **conhecimento** e visa à valorização e ao uso dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para os estudantes entenderem e explicarem a realidade em que vivem.

Essa competência é mobilizada na coleção nos momentos em que se propõe ao estudante que reconheça e coloque em prática conhecimentos historicamente construídos, como nas seções que apresentam um apanhado histórico acerca do desenvolvimento de conceitos matemáticos e da aplicabilidade deles na atualidade e na resolução de problemas.

Enfatizamos que essa competência destaca a importância do processo de construção de conhecimento e a estreita relação com a estruturação

Faber14/Shutterstock

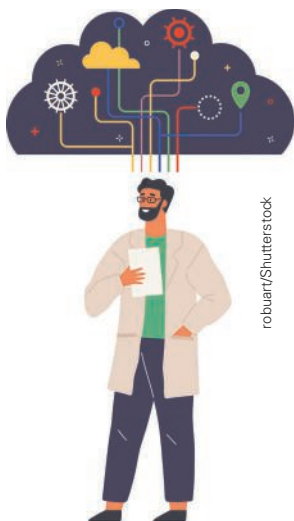
de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Sempre que trabalhar essa competência em sala de aula, ressalte-a como fundamental para o desenvolvimento da autonomia e da capacidade de entender o mundo, explicá-lo e intervir na realidade.

robuart/Shutterstock

A **CG02** se relaciona ao **pensamento científico**, que deve ser exercitado. Ao mobilizar essa competência, os estudantes desenvolvem a curiosidade intelectual recorrendo à abordagem própria das ciências, incluindo investigação, reflexão, análise crítica, imaginação e criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas, além de criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nas diferentes áreas do conhecimento. O desenvolvimento dessa competência também dá aos estudantes a oportunidade de analisar um problema e propor soluções alternativas.

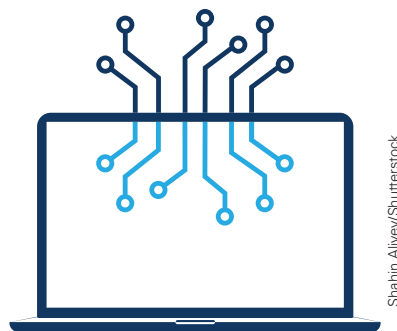
A **CG03** é a de **repertório cultural**, que mobiliza a valorização das diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e a participação em práticas diversificadas da produção artístico-cultural. Essa competência instiga os estudantes a explorarem o conhecimento com base em valores expressos por meio da arte e da cultura, discute o subjetivo e unifica as diferentes sociedades, o que faz com que não percam sua identidade cultural na sala de aula.

Visando essa competência, nos quatro volumes da coleção há oportunidades para que os estudantes conheçam obras de arte, acervos de museus, peças de esculturas, gêneros e movimentos musicais, entre outras situações que contribuem para a formação integral deles.

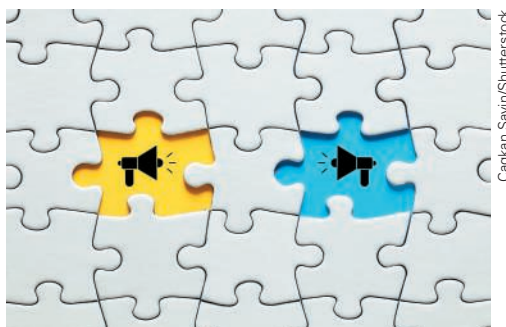
Lightspring/Shutterstock

A **comunicação** é explorada ao mobilizar a **CG04**, que aponta para a necessidade de utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, além de conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para expressão e partilhamento de informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e também para produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

GoodStudio/Shutterstock

Tratando das competências éticas que devem estar presentes no uso das diversas **tecnologias de informação**, a **CG05** propõe a compreensão, utilização e criação de tecnologias digitais de informação e comunicação de modo crítico, significativo, reflexivo e ético nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para os estudantes se comunicarem, acessarem e disseminarem informações, produzirem conhecimentos, resolverem problemas e exercerem protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva, compreendendo como participar desses processos de maneira significativa e reflexiva.

Shahin Aliyev/Shutterstock

A abordagem da dimensão que favorece a educação integral para fazer escolhas e seguir as aspirações, ora no campo dos estudos, ora no campo do trabalho, **trabalho e projeto de vida** é contemplada na BNCC por meio da **CG06**, que mostra que os estudantes devem valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhes possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao próprio projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

MarcoVector/Shutterstock

Com o objetivo de capacitar os estudantes a desenvolver argumentos com base em dados, fatos e informações confiáveis, diferenciando-os de *fake news* e saber avaliar e compreender se os argumentos que assimilam em contraponto são análogos, a BNCC dedica exclusivamente a **CG07**, da **argumentação**. Deve ser desenvolvida nos estudantes a habilidade de argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis para que formulem, negociem e defendam ideias, pontos de vista e tomem decisões que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Cagkan Sayin/Shutterstock

Segundo o conhecimento e a apreciação dos **cuidados com a saúde mental e o autocuidado**, lidando com questões diversas e sua relação com as emoções e as mudanças no corpo, que são características dessa fase do crescimento, a **CG08** propõe que essas facetas devem ser trabalhadas com os estudantes. Por meio dessa competência, buscamos levar cada estudante a se conhecer, apreciar a si mesmo e cuidar da saúde física e emocional, compreender-se na diversidade humana e reconhecer as próprias emoções e as dos outros com autocrítica e capacidade para lidar com elas, tratando da conexão do "eu".

grmarc/Shutterstock

A **CG09** trata de **empatia e cooperação**, abrangendo valores imprescindíveis para viver com o outro. Os estudantes devem exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação entre os pares e com professores, a comunidade e a sociedade, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

Segundo Mattos[1], essa competência se divide em duas dimensões: empatia e diálogo. O desenvolvimento da empatia pressupõe "a valorização e o reconhecimento de grupos e contextos culturalmente diversos. Esta subdimensão também pressupõe o combate ao preconceito e engajamento de outros com a diversidade na valorização da alteridade. Ou seja, compreensão da emoção dos outros e do impacto de seu comportamento nos demais". Já a dimensão do diálogo compreende-se pela interação com o outro "na construção, negociação e respeito a regras de convivência (ética), na promoção de entendimento e melhoria do ambiente", bem como na "capacidade de se trabalhar em equipe, tomar decisões e agir em projetos de forma colaborativa", visando também à resolução de conflitos.

A coleção enfatiza em diversos momentos o trabalho com essa competência, sobretudo nas aberturas de Unidade e nas diferentes propostas de atividades. Um exemplo é ao propor a análise de textos que exploram questões relacionadas à valorização social e à inclusão de pessoas com deficiência em contextos esportivos, o que serve como instrumento de inclusão social, valorização e reconhecimento de atletas com necessidades especiais no esporte, sendo esses princípios necessários à construção da cidadania e ao convívio social. A competência também é mobilizada quando propomos aos estudantes o trabalho em duplas para favorecer o desenvolvimento do diálogo, a cooperação e a empatia.

Viktoria Kurpas/Shutterstock

E, por fim, a **CG10** é a chave para que os estudantes sejam incentivados a agir de modo responsável e cidadão, ou seja, atuar pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Visual Generation/Shutterstock

1 MATTOS, Pablo. *Empatia e cooperação*: competência geral 9 da BNCC. [Rio de Janeiro]: Futura, 2020. (Curso *on-line*). Disponível em: https://www.futura.org.br/cursos/empatia-e-cooperacao-competencia-geral-9-da-bncc. Acesso em: 3 jun. 2022.

As competências gerais e as culturas juvenis

Para melhor entender o conceito de culturas juvenis, é preciso assimilar que as maneiras de ser jovem são inúmeras e dependem de gênero, raça, cor, etnia, classe social, território, religião, geração, entre outros; do mesmo modo, há diferentes maneiras de ser estudante de acordo com as mesmas variáveis.

Diante desse contexto, cabe à escola proporcionar aos jovens a possibilidade de experimentar diferentes modos de vivenciar a juventude considerando, para tanto, as chamadas **culturas juvenis**. Entendemos como culturas juvenis as articulações que os jovens estabelecem com base na produção cultural de massa, no estilo de vida e nas práticas sociais em grupo ou em rede e que se expandem pelo espaço urbano.

Quando a escola dá oportunidade aos jovens de dizerem o que pensam e sentem e os envolve em atividades nas quais se sintam valorizados, é aberto um canal que proporciona novos modos de aprendizagem, sem cobranças prévias de qualificações, capacitismo ou juízos de valor.

Um exemplo é a exploração de atividades culturais envolvendo *rap*, grafite ou o próprio *funk*, que muitas vezes são subvalorizadas por fazerem parte da cultura dos jovens das camadas populares que já são marginalizados por sua origem socioeconômica. Ao permitir que os jovens se expressem por meio dessas manifestações artísticas, se assim desejarem, a escola oportuniza a expressão de sentimentos, que sejam reconhecidos, ganhem visibilidade e se autoafirmem. Oportunidades como essas e outras são abordadas no decorrer desta coleção e mobilizam também a **CG03**, ao explorar o repertório cultural e destacar o protagonismo dos produtores de diferentes artes.

Outro aspecto a ser considerado no trabalho com as culturas juvenis é o uso de tecnologias da informação, comunicação e entretenimento.

> O grande desafio de educadores, pesquisadores, é compreender de que forma as tecnologias da informação e comunicação podem funcionar como meio de auxílio para o desenvolvimento do ensino.
>
> Sabendo que os jovens são produtores de informação e não simplesmente passivos consumidores, é preciso criar estratégias de uso das redes sociais que servem como interatividade e aprendizagem de grupos, pois os relacionamentos e as trocas de experiência acontecem através destas redes.
>
> [...]
>
> O processo de aprendizado com a utilização das tecnologias da informação e comunicação é de colaboração, onde é possível o que temos de conhecimento contribuir com o aprendizado do outro.
>
> Aprender colaborativamente significa desenvolver habilidades como: analisar, refletir, selecionar, atribuir significado, devolver a informação de acordo com a sua interpretação e contribuir numa discussão para o aprendizado do outro.
>
> Essa característica de sociabilidade deve ser aproveitada para a estimulação dos novos conhecimentos. Diante das tecnologias da informação e comunicação é possível descortinar-se um mundo ainda mais ávido em busca da construção de conhecimentos que não somente serão escolares, mas também, outros tipos de conhecimento.
>
> Os meios de comunicação e informação são imprescindíveis para ocorrer à interação e se articulam para contribuir cada vez mais com as possibilidades de acesso, convergência de meios tecnológicos e de mídias, que permitem o acesso ao conhecimento de qualquer lugar e parte do mundo modificando substancialmente as várias formas de pensar, comunicar e educar. (MILANI, 2014, p. 123-124)

A escola não pode ignorar o espaço que a comunicação e as tecnologias ocupam na vida dos jovens na atualidade. No entanto, é preciso orientá-los no uso desses novos conteúdos e oferecer diferentes tipos de letramento para que eles possam elaborar com a escola e além da escola. Utilizamos aqui o conceito de letramento como prática social e leitura do mundo, mais do que como alfabetização, conforme proposto por Angela Kleiman (1995)[2].

Na coleção, oportunizamos aos estudantes o uso das tecnologias como meio de disseminação e produção de conhecimento, auxiliando-os a desenvolver boas práticas e consciência crítica em relação a elas, mobilizando com mais ênfase a **CG05**.

A Matemática na BNCC

A área de Matemática na BNCC para Ensino Fundamental abrange cinco Unidades temáticas: *Números*, *Álgebra*, *Geometria*, *Grandezas e medidas* e *Probabilidade e Estatística*.

Em cada Unidade temática há **objetos de conhecimento** (conteúdos, conceitos e processos) e **habilidades** (aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos estudantes) relacionados. Ao explorar os objetos de conhecimento e as habilidades, propicia-se o desenvolvimento das competências específicas da área.

2 KLEIMAN, A. Modelos de letramento e as práticas de alfabetização na escola. *In*: KLEIMAN, A. (org.). *Os significados do letramento*: uma nova perspectiva sobre a prática social da escrita. Campinas: Mercado de Letras, 1995.

As competências específicas de Matemática da BNCC para o Ensino Fundamental

A aprendizagem de Matemática na Educação Básica vai além da quantificação de fenômenos determinísticos ou aleatórios e das técnicas de cálculos com fenômenos e grandezas. Nessa perspectiva, em articulação com as dez competências gerais, o ensino da Matemática deve garantir aos estudantes o desenvolvimento das competências específicas para o Ensino Fundamental apresentadas a seguir.

Competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2017, p. 267)

As competências específicas de Matemática da BNCC nesta coleção

Esta coleção privilegia o desenvolvimento da autonomia dos estudantes ao propor que façam observações empíricas do mundo real e as representem de diversas maneiras, seja por meio de tabelas, figuras, esquemas, entre outras, e as associem a uma atividade matemática, fazendo induções e conjecturas, mobilizando assim as oito competências específicas da Matemática.

Utilizaremos a sigla **CEMAT** para nos referir às competências específicas de Matemática da BNCC para o Ensino Fundamental. Desse modo, a primeira competência está nomeada como **CEMAT01**, a segunda como **CEMAT02**, e assim sucessivamente.

A **CEMAT01** aponta que os estudantes reconheçam que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. Assim, essa competência é explorada na coleção de modo que os estudantes são levados a compreender a construção dos conceitos matemáticos do início aos dias atuais.

Os estudantes devem, como parte da vida em sociedade, ser incentivados no ambiente escolar a desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo, o que está relacionado ao que propõe a **CEMAT02**. No trabalho com tal competência, ao manipular objetos, eles desenvolvem conceitos abstratos para relacionar os objetos a conhecimentos matemáticos.

Já de acordo com a **CEMAT03**, embora a área de Matemática esteja dividida em 5 Unidades temáticas, não significa que devam ser exploradas isoladamente, mas articuladas sempre que houver a possibilidade. Nesta coleção, essa competência é explorada nas relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento. Espera-se que os estudantes desenvolvam segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos e desenvolvam autoestima e perspectiva na busca de soluções.

O contexto social em que cada estudante está inserido contribui para que ele entenda o próprio papel na sociedade e saiba se comunicar matematicamente em situações do cotidiano, com uma postura crítica. A **CEMAT04** propõe aos estudantes a elaboração de observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo que venham a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

As tecnologias digitais são fortes aliadas no ensino da Matemática no mundo contemporâneo, uma vez que contribuem para o desenvolvimento de habilidades como comparação, verificação, seleção e criação de concepções. Esta coleção propõe explorar a **CEMAT05** na utilização de processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados.

A **CEMAT06** indica que os estudantes devem enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo imaginários, não diretamente relacionados com o aspecto prático--utilitário; devem ainda expressar suas respostas e sintetizar conclusões utilizando diferentes registros e linguagens: gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito. Mobilizando essa competência no decorrer das Unidades desta coleção, é importante que esse trabalho seja bem orientado para que de fato haja um elo entre os componentes curriculares envolvidos e se apresente aos estudantes a função de cada texto utilizado nas aulas de Matemática.

A **CEMAT07** traz a importância de desenvolver projetos que permitam aos estudantes relacionar saberes matemáticos com outras áreas de conhecimento, além de lhes proporcionar aprendizado por meio de pesquisas de outras culturas, valorizando a diversidade de opiniões. Nesta coleção, propomos o trabalho com situações e atividades que abordam questões de urgência social, voltadas ao desenvolvimento da democracia e atreladas à valorização da diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

A interação entre os estudantes é abordada em diversas oportunidades nesta coleção, mobilizando com maior ênfase a **CEMAT08**, que tem o objetivo de proporcionar a interação entre pares de maneira cooperativa. Enfatizamos que, ao explorar a competência, seja incentivado o respeito ao modo de pensar dos colegas.

Ao longo deste Manual, você compreenderá como explorar as competências gerais e as competências específicas de Matemática da BNCC. No tópico a seguir, apresentamos alguns exemplos de trabalho com as competências em boxes e seções do Livro do Estudante. Outras situações também são esclarecidas, sobretudo nas *Orientações didáticas*, em relação ao trabalho com cada página do Livro do Estudante dos volumes da coleção.

Habilidades de Matemática da BNCC para os Anos Finais do Ensino Fundamental

As habilidades são as aptidões a serem desenvolvidas ao longo de cada etapa de ensino e que contribuem para o desenvolvimento das competências gerais e das competências específicas da BNCC. Esse documento indica que, para o desenvolvimento das habilidades de Matemática previstas para os Anos Finais do Ensino Fundamental, é necessário considerar as experiências prévias dos estudantes, propiciar situações de vivências do cotidiano e de contextos significativos, utilizar diferentes recursos didáticos, favorecer o desenvolvimento do raciocínio e da argumentação matemática, entre outros.

Destacamos a seguir alguns trechos da BNCC que indicam como desenvolver as habilidades de Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

> É imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da Matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência.
>
> [...] Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação.
>
> [...]
>
> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática.
>
> [...]
>
> Além disso, nessa fase final do Ensino Fundamental, é importante iniciar os alunos, gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. Isso envolve a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do senso crítico em relação à argumentação neles utilizada. (BRASIL, 2017, p. 298-299)

As habilidades de Matemática da BNCC na coleção

Os quadros a seguir indicam cada Unidade temática e os respectivos objetos de conhecimento e habilidades previstos para cada volume dos Anos Finais do Ensino Fundamental, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017, p. 301-319).

Nesta coleção, as cinco unidades temáticas da BNCC são apresentadas de modo correlacionado, favorecendo o desenvolvimento das habilidades a serem exploradas ao longo dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Em cada volume, uma mesma habilidade pode ser trabalhada em diversos capítulos para que seja desenvolvida em sua totalidade. No boxe *Na BNCC*, junto às *Orientações didáticas* neste Manual, indicamos as habilidades trabalhadas com maior ênfase nos capítulos, tópicos e seções do Livro do Estudante, entendendo também que outras habilidades podem ser favorecidas simultaneamente de modo transversal.

6º ano do Ensino Fundamental

Unidade temática *Números*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal	**(EF06MA01)** Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica. **(EF06MA02)** Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.
Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais Divisão euclidiana	**(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	**(EF06MA04)** Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par). **(EF06MA05)** Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. **(EF06MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	**(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. **(EF06MA10)** Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	**(EF06MA11)** Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
Aproximação de números para múltiplos de potências de 10	**(EF06MA12)** Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima.
Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da "regra de três"	**(EF06MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Unidade temática *Álgebra*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Propriedades da igualdade	**(EF06MA14)** Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	**(EF06MA15)** Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Unidade temática *Geometria*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados	**(EF06MA16)** Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)	**(EF06MA17)** Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados	**(EF06MA18)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. **(EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. **(EF06MA20)** Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	**(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e *softwares*	**(EF06MA22)** Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou *softwares* para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. **(EF06MA23)** Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).

Unidade temática *Grandezas e medidas*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume	**(EF06MA24)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
Ângulos: noção, usos e medida	**(EF06MA25)** Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas. **(EF06MA26)** Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão. **(EF06MA27)** Determinar medidas da abertura de ângulos por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.
Plantas baixas e vistas aéreas	**(EF06MA28)** Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas.
Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado	**(EF06MA29)** Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

Unidade temática *Probabilidade e Estatística*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)	**(EF06MA30)** Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas	**(EF06MA31)** Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráfico. **(EF06MA32)** Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.
Coleta de dados, organização e registro Construção de diferentes tipos de gráficos para representá-los e interpretação das informações	**(EF06MA33)** Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.
Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas	**(EF06MA34)** Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).

7º ano do Ensino Fundamental

Unidade temática *Números*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Múltiplos e divisores de um número natural	**(EF07MA01)** Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples	**(EF07MA02)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações	**(EF07MA03)** Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração. **(EF07MA04)** Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	**(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. **(EF07MA06)** Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. **(EF07MA07)** Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. **(EF07MA08)** Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. **(EF07MA09)** Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	**(EF07MA10)** Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. **(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. **(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Unidade temática *Álgebra*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Linguagem algébrica: variável e incógnita	**(EF07MA13)** Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. **(EF07MA14)** Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	**(EF07MA16)** Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	**(EF07MA17)** Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
Equações polinomiais do 1º grau	**(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Unidade temática *Geometria*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	**(EF07MA19)** Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. **(EF07MA20)** Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
Simetrias de translação, rotação e reflexão	**(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
A circunferência como lugar geométrico	**(EF07MA22)** Construir circunferências utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	**(EF07MA23)** Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de *softwares* de geometria dinâmica.
Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	**(EF07MA24)** Construir triângulos usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. **(EF07MA25)** Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas. **(EF07MA26)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero	**(EF07MA27)** Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos. **(EF07MA28)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

Unidade temática *Grandezas e medidas*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Problemas envolvendo medições	**(EF07MA29)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.
Cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais	**(EF07MA30)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).
Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros	**(EF07MA31)** Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
Medida do comprimento da circunferência	**(EF07MA33)** Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.

Unidade temática *Probabilidade e Estatística*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências	**(EF07MA34)** Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
Estatística: média e amplitude de um conjunto de dados	**(EF07MA35)** Compreender, em contextos significativos, o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados.
Pesquisa amostral e pesquisa censitária Planejamento de pesquisa, coleta e organização dos dados, construção de tabelas e gráficos e interpretação das informações	**(EF07MA36)** Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.
Gráficos de setores: interpretação, pertinência e construção para representar conjunto de dados	**(EF07MA37)** Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.

8º ano do Ensino Fundamental

Unidade temática *Números*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Notação científica	**(EF08MA01)** Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
Potenciação e radiciação	**(EF08MA02)** Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
O princípio multiplicativo da contagem	**(EF08MA03)** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
Porcentagens	**(EF08MA04)** Resolver e elaborar problemas envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
Dízimas periódicas: fração geratriz	**(EF08MA05)** Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Unidade temática *Álgebra*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Valor numérico de expressões algébricas	**(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	**(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

Unidade temática *Álgebra*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	**(EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$	**(EF08MA09)** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
Sequências recursivas e não recursivas	**(EF08MA10)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. **(EF08MA11)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	**(EF08MA12)** Identificar a natureza da variação de duas grandezas diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. **(EF08MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Unidade temática *Geometria*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	**(EF08MA14)** Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	**(EF08MA15)** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. **(EF08MA16)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.
Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	**(EF08MA17)** Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

Unidade temática *Grandezas e medidas*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Área de figuras planas Área do círculo e comprimento de sua circunferência	**(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
Volume de bloco retangular Medidas de capacidade	**(EF08MA20)** Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes. **(EF08MA21)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.

Unidade temática *Probabilidade e Estatística*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Princípio multiplicativo da contagem Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral	**(EF08MA22)** Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

Unidade temática *Probabilidade e Estatística*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados	**(EF08MA23)** Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.
Organização dos dados de uma variável contínua em classes	**(EF08MA24)** Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.
Medidas de tendência central e de dispersão	**(EF08MA25)** Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.
Pesquisas censitária ou amostral Planejamento e execução de pesquisa amostral	**(EF08MA26)** Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada). **(EF08MA27)** Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.

9º ano do Ensino Fundamental

Unidade temática *Números*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica	**(EF09MA01)** Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). **(EF09MA02)** Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
Potências com expoentes negativos e fracionários	**(EF09MA03)** Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
Números reais: notação científica e problemas	**(EF09MA04)** Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.
Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos	**(EF09MA05)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

Unidade temática *Álgebra*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	**(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
Razão entre grandezas de espécies diferentes	**(EF09MA07)** Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	**(EF09MA08)** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	**(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Unidade temática *Geometria*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	**(EF09MA10)** Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo	**(EF09MA11)** Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.
Semelhança de triângulos	**(EF09MA12)** Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	**(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. **(EF09MA14)** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
Polígonos regulares	**(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*.
Distância entre pontos no plano cartesiano	**(EF09MA16)** Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
Vistas ortogonais de figuras espaciais	**(EF09MA17)** Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Unidade temática *Grandezas e medidas*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Unidades de medida para medir distâncias muito grandes e muito pequenas Unidades de medida utilizadas na informática	**(EF09MA18)** Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.
Volume de prismas e cilindros	**(EF09MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

Unidade temática *Probabilidade e Estatística*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes	**(EF09MA20)** Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.
Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação	**(EF09MA21)** Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.
Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos	**(EF09MA22)** Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.
Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório	**(EF09MA23)** Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

A estrutura do Livro do Estudante

A coleção é composta de quatro volumes para os Anos Finais do Ensino Fundamental, organizados em Unidades e capítulos. Os conteúdos são introduzidos tomando como base situações-problema ou textos contextualizados, seguidos pela formalização dos conceitos e boxes e/ou seções que complementam a teoria apresentada e têm como objetivos:

- contribuir para a inserção dos estudantes na sociedade em que vivem, proporcionando a eles conhecimentos básicos de teoria e prática de matemática;
- incentivar a curiosidade, o interesse e a criatividade dos estudantes para que explorem novas ideias e descubram caminhos para a aplicação dos conceitos adquiridos, auxiliando-os na resolução de problemas;
- desenvolver o senso crítico por meio da leitura e da interpretação matemática de fatos e dados publicados;
- desenvolver hábitos de estudo, rigor, precisão, ordem, clareza, concisão, iniciativa, raciocínio, perseverança, responsabilidade, cooperação, crítica, discussão e uso correto da linguagem;
- desenvolver a capacidade de classificar, seriar, relacionar, reunir, representar, analisar, sintetizar, conceituar, deduzir, provar e julgar;
- possibilitar o reconhecimento da inter-relação entre os vários campos da Matemática e desta com outras áreas do conhecimento;
- desenvolver o uso do pensamento e a capacidade de elaborar hipóteses, descobrir soluções, estabelecer relações e tirar conclusões;
- proporcionar atividades lúdicas e desafiadoras, incentivando o gosto pela Matemática e o desenvolvimento do raciocínio.

Cada Unidade do Livro do Estudante apresenta-se subdividida em capítulos distribuídos visando facilitar a aprendizagem. Se considerar oportuno, você pode inverter a ordem dos conteúdos, desde que a reorganização tenha sequência lógica e considere o nível de complexidade de cada um deles. Você pode, por exemplo, solicitar aos estudantes que façam uma atividade proposta em um boxe ou uma seção para avaliação de conhecimentos prévios ou como incentivo para estudos posteriores.

O texto da obra foi elaborado em linguagem acessível, que "conversa" com o leitor, em interação contínua, para possibilitar aos estudantes que compreendam as definições e as propriedades centrais da Matemática em nível elementar. Os conceitos são explorados com base em exemplos concretos, eventualmente por meio do boxe *Participe*, que os encoraja a pensar, investigar, explorar, conjecturar e aprender. Procuramos deduzir as propriedades em linguagem coloquial e enunciá-las posteriormente, levando os estudantes, gradativamente, à compreensão e ao uso do formalismo matemático.

As atividades e os problemas propostos visam conduzi-los à compreensão de conceitos e propriedades, sem, contudo, negligenciar o desenvolvimento das técnicas de cálculo. Estas, à medida que são abordadas, são aplicadas na resolução de problemas.

Diversos estudos na área da Educação Matemática sugerem que um caminho para a aprendizagem é propor diferentes atividades que estimulem os estudantes a buscar estratégias pessoais de resolução. Pensando nisso, esta coleção apresenta diferentes situações-problema com o objetivo de incentivar os estudantes a resolvê-las usando estratégias pessoais.

Esta coleção também pode ser utilizada para incentivar o gosto pela leitura. Para isso, os estudantes devem explorar as informações das seções *Na História* e *Na Mídia*, que promovem a leitura individual (silenciosa) ou coletiva (em voz alta) na sala de aula. A competência leitora deve ser desenvolvida em todos os componentes curriculares e particularmente na Matemática, pois é suporte essencial para a compreensão de textos e enunciados de problemas, além de propiciar a ampliação do repertório oral para comunicação e argumentação.

Indicamos, a seguir, como as Unidades do Livro do Estudante estão organizadas e detalhamos as funções das seções e dos boxes que compõem os volumes desta coleção.

Abertura de Unidade

A abertura da Unidade ocupa uma dupla de páginas com uma ou mais imagens e textos relacionados aos conteúdos que serão abordados e, na maioria das vezes, remete aos TCTs e aos temas interdisciplinares que despertam a curiosidade dos estudantes, são assuntos para debates e têm atividades que contribuem para a formação integral deles por promover o desenvolvimento das habilidades de interpretação e argumentação. O tema da abertura e os conteúdos matemáticos da Unidade são relacionados por atividades contextualizadas na própria abertura e em outros momentos ao longo dos capítulos correspondentes.

Apresentamos também, na abertura, os objetivos pedagógicos de cada Unidade. São descrições concisas que mostram o que os estudantes devem saber e compreender ao longo do trabalho com os conteúdos dos capítulos.

Nas *Orientações didáticas* deste Manual há indicações de como conduzir o trabalho com as aberturas; no entanto, os temas propostos possibilitam diversas abordagens envolvendo professores de outros componentes curriculares, a família e a comunidade escolar. Explore as aberturas de acordo com as características da turma.

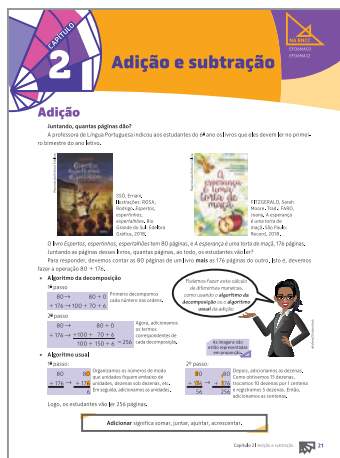
Na abertura reproduzida a seguir, por exemplo, é possível mobilizar com mais ênfase a **CG01**, a **CG07** e a **CEMAT07** propondo aos estudantes que analisem imagens e um texto que promove positivamente a imagem da mulher. Possibilita ainda o desenvolvimento do TCT *Educação em Direitos*

Humanos ao incentivar uma discussão acerca da necessidade de participação plena e efetiva das mulheres e igualdade de oportunidades em todos os níveis, bem como o TCT *Saúde*, ao explorar a importância da prática de atividades físicas. O contexto da abertura da Unidade facilita o trabalho interdisciplinar com os componentes curriculares **Educação Física**, **Ciências** e **História**.

Reprodução da abertura da Unidade 3, páginas 92 e 93, volume 7 do Livro do Estudante.

Capítulos

Cada capítulo contém a fundamentação teórica necessária para a compreensão de conceitos e propriedades e foi organizado de modo a facilitar a identificação das informações apresentadas. Os capítulos são introduzidos por situações-problema e textos que visam motivar o interesse dos estudantes pelo conteúdo que será exposto. Dois ou mais capítulos estão reunidos em uma mesma Unidade, divididos em assuntos seguidos por blocos de atividades.

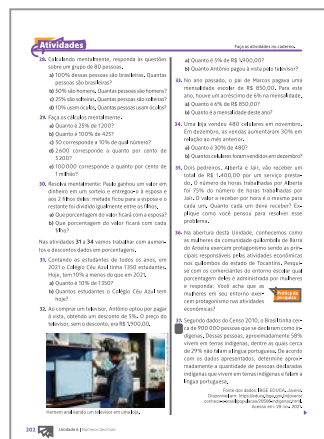
Por apresentarem contextos distintos, os capítulos exploram diversas competências e habilidades da BNCC e, muitas vezes, ampliam o trabalho ao envolver propostas interdisciplinares e TCTs, conforme exemplificamos a seguir. Próximo ao título de cada capítulo constam as principais habilidades mobilizadas e que se relacionam aos objetivos pedagógicos listados na abertura da respectiva Unidade.

Reprodução da página 21 do capítulo 2, volume 6 do Livro do Estudante.

O trabalho nesse capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EF06MA03** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo a adição em diferentes contextos e também a habilidade **EF06MA12** ao proporcionar oportunidades para o cálculo de estimativas e aproximações. A **CG09** e a **CG10** são mobilizadas com maior ênfase com a proposta de leitura de livros paradidáticos que abordam temas complexos, como ética nas relações sociais, *bullying*, respeito ao outro e valorização da diversidade de indivíduos. Ao explorar esses temas também é possível desenvolver os TCTs *Saúde* e *Vida Familiar e Social*.

O contexto do problema apresentado no início desse capítulo convida à interdisciplinaridade com o componente curricular **Língua Portuguesa** e possibilita a abordagem de questões relacionadas a ética nas relações sociais, resolução de conflitos, saúde emocional dos estudantes, respeito ao outro, acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos.

Atividades

As atividades são variadas e apresentadas sequencialmente em cada capítulo, em gradação de dificuldade, para que os estudantes apliquem os conteúdos estudados. Ao longo das seções também são propostas atividades mais desafiadoras, bem como para resolução e elaboração de problemas.

Muitas atividades são contextualizadas e exploram situações do cotidiano dos estudantes. Elas os incentivam a utilizar diferentes estratégias de resolução, registro e materiais como instrumentos de medição, instrumentos de construção geométrica, calculadora e outros materiais manipulativos que os auxiliam a compreender conceitos e adquirir novos conhecimentos. Acompanhe um exemplo a seguir.

Reprodução da seção *Atividades*, página 202, volume 6 do Livro do Estudante.

Nesse exemplo da seção, os estudantes podem resolver problemas usando porcentagens e cálculo mental. Sugerimos que formem duplas para que debatam as situações apresentadas mobilizando com maior ênfase a **CG09** e a **CEMAT08**, além de explorar questões relacionadas ao consumo responsável, que favorece o desenvolvimento da habilidade de argumentação. Há ainda uma atividade que visa exercitar a metodologia de prática de pesquisa (cuja função será explicada oportunamente neste Manual).

Sugerimos encaminhar algumas atividades como tarefa de casa para que os estudantes possam revisar os conteúdos trabalhados em sala de aula e se habituem com uma rotina sistemática de estudos. Ao estudarem sozinhos, eles têm a oportunidade de praticar leitura e interpretação de textos, além de desenvolver habilidades de uso de estratégias pessoais nas resoluções.

As respostas de todas as atividades estão no final do Livro do Estudante, neste exemplar do professor. Elas também aparecem próximas aos exercícios, em outra cor. Além disso, ressaltamos que na seção *Resoluções* deste Manual são encontradas as resoluções completas e comentadas das atividades propostas.

Participe

Esse boxe traz propostas de atividades que incentivam os estudantes a agir de modo reflexivo privilegiando exploração, levantamento de hipóteses, identificação de padrões, elaboração de conjecturas, resoluções por meio de estratégias pessoais e compartilhamento de ideias. Podem ainda fazer uma breve retomada de conceitos apresentados em anos anteriores ou, ainda, reforçar conceitos que estão sendo aprendidos e estabelecer conexões com o conteúdo que está por vir.

Encoraje os estudantes a encontrar soluções para as questões apresentadas criando estratégias próprias de resolução, peça que justifiquem suas escolhas, discutam com os colegas as estratégias adotadas e validem as respostas desenvolvendo, assim, autonomia no processo de aprendizagem dos conteúdos matemáticos que serão formalizados na sequência.

Reprodução de boxe *Participe*, página 110, volume 6 do Livro do Estudante.

Na História

Esta seção explora as descobertas científicas e históricas dos conteúdos matemáticos ligados a assuntos tratados na Unidade. É útil especialmente para levar os estudantes a perceber que o conhecimento vem sendo construído ao longo dos séculos, por diferentes pessoas, contínua e colaborativamente, portanto, não é algo acabado, pode ser reformulado de acordo com as novas descobertas, o que exige das pessoas envolvidas nos estudos muita dedicação e empenho. É uma boa oportunidade para perceberem que a Matemática é uma descoberta humana fruto de diferentes pessoas, épocas e civilizações, mobilizando, sobretudo, a **CEMAT01**.

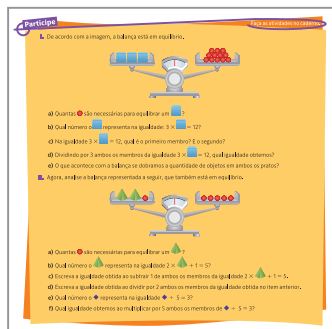
Nesse exemplo da seção, mobilizam-se com mais ênfase a **CG01** e a **CEMAT01** ao mostrar a Matemática como fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos.

Reprodução de seção *Na História*, página 22, volume 9 do Livro do Estudante.

Educação financeira

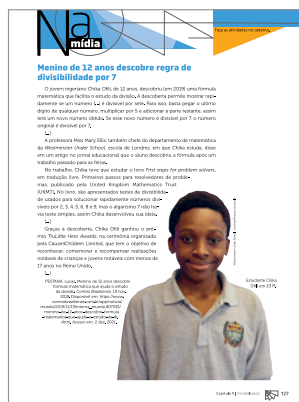
Se a principal função da escola é preparar para a vida, é essencial ensinar alguns princípios do planejamento financeiro, e a Matemática é a ciência por excelência para esse propósito. Nesta seção, procuramos apresentar situações próximas da realidade dos estudantes. Embora trabalhemos alguns conceitos de macroeconomia, a Educação financeira aqui não foi pensada como uma seção teórica, e sim um espaço para que cada estudante reflita sobre a realidade e utilize a Matemática como instrumento para melhorar a qualidade de vida – sua e da família. As atividades sobre consumo, por exemplo, têm o objetivo de ajudar os estudantes a analisar esse assunto com viés mais crítico. No fechamento da seção, é proposto um trabalho em grupo para auxiliá-los a compartilhar informações e estratégias, desenvolver senso crítico e espírito comunitário. Além de respeitar os pré-requisitos necessários para as atividades propostas nesta seção, a distribuição dos temas ao longo dos volumes da coleção considerou a maturidade dos estudantes.

Na seção mostrada como exemplo, além do trabalho com a temática, a proposta envolve o desenvolvimento de práticas de pesquisa, uso da internet e produção de um *podcast* com dicas de como poupar, favorecendo o desenvolvimento do TCT *Educação Financeira*, da comunicação e o uso de tecnologias variadas.

Reprodução de seção *Educação financeira*, páginas 84 e 85, volume 9 do Livro do Estudante.

Prática de pesquisa

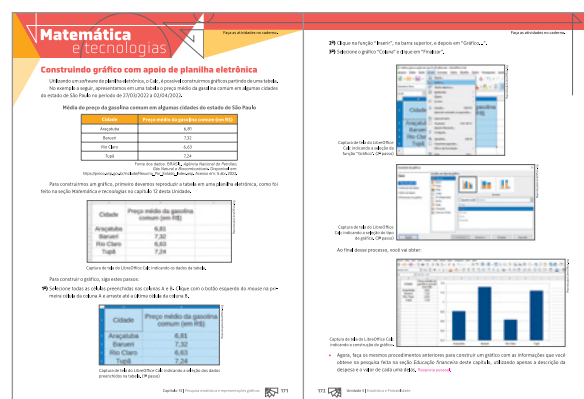
O ícone *Prática de pesquisa* indica momentos de trabalho com pesquisas relacionadas às atividades, a fatos históricos (como na seção *Na História*) e a situações da vida real (como na seção *Educação financeira*), por meio de atividades individuais ou coletivas elaboradas com esse fim. A questão da pesquisa estruturada é enfatizada na BNCC, sobretudo nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Por meio das práticas de pesquisa, procuramos oportunizar situações em que os estudantes vivenciem as etapas de investigação e coleta, organização e tratamento de dados, até chegar a um resultado que deva ser representado e comunicado ao público de interesse. Neste Manual, dedicamos um tópico exclusivo para falar sobre práticas de pesquisa na seção *Abordagens teórico-metodológicas em Matemática*.

Na mídia

Por meio de textos de notícias e artigos publicados em jornais, revistas ou *sites*, nesta seção os estudantes são convidados a analisar criticamente a realidade comparando os dados e as situações apresentadas. Ela leva à ampliação dos conhecimentos gerais e possibilita a discussão sobre os TCTs de diversas áreas (educação, saúde, meio ambiente, entre outros). Portanto, constitui boa oportunidade para promover a construção da cidadania e o olhar crítico sobre a sociedade.

Reprodução de seção *Na mídia*, página 127, volume 6 do Livro do Estudante.

No exemplo apresentado, além de desenvolver habilidades específicas do 6º ano, a seção mobiliza com maior ênfase a **CG02** e a **CEMAT06** ao propor a resolução de situações-problema utilizando algoritmos e fluxogramas, além de contribuir para o desenvolvimento das habilidades de argumentação matemática e do pensamento computacional.

Matemática e tecnologias

As tecnologias fazem parte da vida de todos nós, e os jovens lidam com esses recursos na maior parte do tempo utilizando diversos aplicativos para comunicação, entretenimento, armazenagem de documentos, entre outros. A ambientação com as tecnologias deve adentrar as salas de aula e fazer parte do ensino e da aprendizagem em Matemática. Diante desse cenário, essa seção sugere a você e aos estudantes a exploração do uso de *softwares* e aplicativos para resolver e modelar problemas de Matemática e simular variações de parâmetros, tornando a aprendizagem mais dinâmica e interativa.

Reprodução da seção *Matemática e tecnologias*, páginas 171 e 172, volume 7 do Livro do Estudante.

Na seção exemplificada, explora-se a utilização de *software* específico para a construção de tabelas e gráficos, mobilizando com maior ênfase a **CG05** e a **CEMAT05**.

Na olimpíada

Neste boxe são reproduzidas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep). Apesar do nome da prova, estudantes de instituições de Ensino Fundamental e Ensino Médio particulares também participam. O evento já é tradicional em nosso país e ocorre desde 2005. A abordagem das questões de avaliação pode propiciar aos estudantes a vivência de situações novas e desafiadoras que os levem a pensar e desenvolver estratégias pessoais de resolução.

Reprodução do boxe *Na olimpíada*, página 135, volume 6 do Livro do Estudante.

Boxes de sugestão

Os boxes de sugestão trazem dicas de *sites*, visitações, livros paradidáticos, vídeos, *podcasts*, entre outros que podem enriquecer o trabalho em sala de aula e mobilizar competências gerais e competências específicas da BNCC, além de variados TCTs.

O livro *74 dias para o fim*, de Angélica Lopes (Belo Horizonte: Lê, 2015), narra, em primeira pessoa, a violência psicológica e física sofrida por Valdir, um estudante de 16 anos do último ano do Ensino Médio. Trata-se de um trabalho que apresenta aos jovens as temáticas da cultura digital nos conflitos da adolescência, de modo a sensibilizar o leitor para os fatos vividos pelo personagem. A narrativa aborda questões diversas relacionadas, sobretudo, ao *bullying* no contexto escolar e nas redes sociais. Valdir rememora esses acontecimentos anos mais tarde, ao tentar compreender o que motivou um grupo de colegas de sala de aula a elegê-lo objeto de injúria, além das inúmeras agressões físicas sofridas por ele. O texto aborda de maneira sensível os conflitos e sentimentos vivenciados por Valdir nos últimos 74 dias que faltam para sua formatura no Ensino Médio. Esse relato coloca em evidência as relações sociais, afetivas e emocionais no espaço escolar e o modo como a escola lida com o *bullying* entre os estudantes. Os atos de *bullying*, muitas vezes vistos como mera brincadeira, ofendem a honra, a dignidade e a identidade daquele que os sofre, colocando-o diante de situações diversas de conflitos que podem ocorrer tanto no espaço físico escolar quanto no ciberespaço. Os colegas de Valdir se valem de tecnologias, como as redes sociais, *e-mails*, blogues e mensagens via celular, para praticar o *cyberbullying*.

Reprodução do boxe de sugestão, página 68, volume 9 do Livro do Estudante.

No exemplo apresentado, sugerimos a leitura de um livro paradidático que mobiliza com maior ênfase a **CG09** e os TCTs *Vida Familiar e Social* e *Saúde*, pela abordagem de um tema tão sensível como *bullying*.

Nesse outro exemplo, apresentamos uma proposta de trabalho envolvendo o *rap*, que permite aos estudantes vivenciar e debater a letra de uma canção desse gênero abordando temas importantes como a pobreza e o preconceito racial. Mobiliza, ainda, a **CG03** ao explorar o repertório cultural e destaca o protagonismo de Dina Di como precursora do movimento *rapper* feminino.

Reprodução das páginas 150 e 151, volume 8 do Livro do Estudante.

Na Unidade

A seção de encerramento, *Na Unidade*, traz atividades sobre os principais conteúdos abordados e que se relacionam com os objetivos pedagógicos apresentados na abertura da Unidade. Essas atividades podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação.

Nesta seção também podem ser encontradas atividades de outras avaliações oficiais, como o Saresp e mesmo questões de vestibulares adequadas à faixa etária dos estudantes. A intenção aqui não é trazer questões de mais complexidade, e sim oportunizar situações de verificação de aprendizagem em relação aos objetivos propostos em cada Unidade.

Sugerimos que as atividades sejam realizadas individualmente e que você acompanhe os estudantes durante a execução. É interessante também que seja feito o registro dos avanços e das dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

No exemplo apresentado, as atividades **1** a **4** exploram e permitem avaliar o objetivo pedagógico "retomar e aprofundar o estudo dos números naturais, números inteiros e números racionais"; as atividades **5** e **6** abordam o objetivo "utilizar métodos para obter uma fração geratriz para uma dízima periódica"; enquanto as atividades **7** a **10** trabalham o objetivo "resolver e elaborar problemas utilizando cálculo de porcentagens".

Reprodução de seção *Na Unidade*, página 27, volume 8 do Livro do Estudante.

Os conteúdos nos volumes do Livro do Estudante

Os quadros a seguir indicam os conteúdos explorados em cada capítulo nos quatro volumes do Livro do Estudante e as habilidades da BNCC favorecidas com mais ênfase.

O livro do 6º ano

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 1: Sistemas de numeração e operações com números naturais	Capítulo 1: Números e sistemas de numeração	A origem dos números Os números naturais	EF06MA01 EF06MA02
	Capítulo 2: Adição e subtração	Adição Subtração	EF06MA03 EF06MA12
Unidade 2: Noções iniciais de Geometria	Capítulo 3: Noções fundamentais de Geometria	Um pouco de história Objetos reais e figuras geométricas Ponto, reta e plano: as formas geométricas mais simples	EF06MA16 EF06MA17 EF06MA23
	Capítulo 4: Semirreta, segmento de reta e ângulo	Semirreta Segmento de reta Ângulo Medida de abertura de um ângulo Construção de ângulos Classificação de ângulos Ângulos formados por retas	EF06MA22 EF06MA23 EF06MA25 EF06MA26 EF06MA27
Unidade 3: Mais operações com números naturais	Capítulo 5: Multiplicação	Multiplicação Expressões aritméticas	EF06MA03 EF06MA12
	Capítulo 6: Divisão	Divisão Expressões numéricas com as 4 operações Divisão com resto	EF06MA03 EF06MA32
	Capítulo 7: Potenciação	Potência Potências e sistemas de numeração	EF06MA02 EF06MA03 EF06MA12
	Capítulo 8: Introdução à Álgebra	Calcular o número desconhecido em uma igualdade Problemas sobre partições	EF06MA03 EF06MA14 EF06MA15
Unidade 4: Múltiplos e divisores	Capítulo 9: Divisibilidade	Noção de divisibilidade Critérios de divisibilidade	EF06MA03 EF06MA04 EF06MA05 EF06MA34
	Capítulo 10: Números primos e fatoração	O que é número primo? Decomposição de um número em produto Fatoração de um número	EF06MA05
	Capítulo 11: Múltiplos e divisores de um número natural	Os múltiplos de um número Os divisores de um número	EF06MA05 EF06MA06
Unidade 5: Frações	Capítulo 12: O que é fração?	Fração da unidade Frações de um conjunto Frações de uma quantidade Leitura de fração Tipos de fração	EF06MA01 EF06MA07 EF06MA08 EF06MA09 EF06MA15
	Capítulo 13: Frações equivalentes e comparação de frações	Conceito de frações equivalentes Simplificação de fração Comparação de frações	EF06MA04 EF06MA07 EF06MA34
	Capítulo 14: Operações com frações	Adição e subtração de frações Multiplicação Divisão	EF06MA01 EF06MA07 EF06MA09 EF06MA10

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 6: Números decimais	Capítulo 15: Fração decimal e número decimal	Fração decimal Número decimal Taxa percentual Propriedades dos números decimais Comparando números decimais	EF06MA01 EF06MA02 EF06MA07 EF06MA08 EF06MA13
	Capítulo 16: Operações com números decimais	Adição e subtração com números decimais Multiplicação com números decimais Potenciação com número decimal na base Divisão envolvendo números decimais	EF06MA01 EF06MA08 EF06MA11 EF06MA13
Unidade 7: Comprimento, perímetro e área	Capítulo 17: Comprimento	Medindo comprimentos Unidades de medida padronizadas de comprimento	EF06MA11 EF06MA24
	Capítulo 18: Curvas, poligonais, polígonos e perímetro	Curvas Poligonais Polígonos Triângulos Quadriláteros Medindo perímetros Polígonos regulares	EF06MA18 EF06MA19 EF06MA20 EF06MA22 EF06MA24 EF06MA28
	Capítulo 19: Área, ampliação e redução	Medindo áreas Unidades de medida padronizada de área Medida de área de alguns polígonos Ampliação e redução de figuras planas	EF06MA21 EF06MA24 EF06MA29
Unidade 8: Massa, volume, capacidade, tempo e temperatura	Capítulo 20: Massa	Medindo massas Unidades de medida padronizadas de massa	EF06MA11 EF06MA13 EF06MA24
	Capítulo 21: Volume e capacidade	Medindo volumes Unidades de medida padronizadas de volume Medida de volume do bloco retangular Medida de volume do cubo Medindo capacidades	EF06MA11 EF06MA13 EF06MA24
	Capítulo 22: Tempo e temperatura	Medidas de tempo Operações com medidas de tempo Medidas de temperatura	EF06MA03 EF06MA11 EF06MA24
Unidade 9: Noções e Estatística e Probabilidade	Capítulo 23: Noções de Estatística	Revendo porcentagens Etapas de uma pesquisa estatística	EF06MA13 EF06MA31 EF06MA32 EF06MA33
	Capítulo 24: Possibilidades e Probabilidade	Problemas de contagem Cálculo de probabilidade	EF06MA13 EF06MA30 EF06MA34

O livro do 7º ano

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 1: mmc, mdc, frações e porcentagem	Capítulo 1: Múltiplos e divisores de um número natural	Números naturais Sequência numérica A sequência dos múltiplos de um número natural Os divisores de um número natural Como descobrir o mínimo múltiplo comum Como descobrir o máximo divisor comum	EF07MA01 EF07MA07
	Capítulo 2: Operações com frações e decimais	Recordando frações Transformação de número decimal em fração e de fração em número decimal Adição e subtração de frações decimais Multiplicação e divisão de frações e decimais Fração como quociente	EF07MA05 EF07MA06 EF07MA07 EF07MA08 EF07MA11 EF07MA12
	Capítulo 3: Cálculo de porcentagens	Porcentagem Fração como operador Recordando o cálculo mental Uma porcentagem especial: aumentos e reduções	EF07MA02 EF07MA06
Unidade 2: Números inteiros e operações	Capítulo 4: Números positivos e números negativos	Medida de temperatura Números negativos e números positivos Mais sobre números negativos	EF07MA03
	Capítulo 5: Números inteiros	O que é um número inteiro? Valor absoluto Números opostos ou simétricos	EF07MA03
	Capítulo 6: Adição e subtração de números inteiros	Adição de números inteiros Propriedades da adição Subtração de números inteiros	EF07MA03 EF07MA04
	Capítulo 7: Multiplicação, divisão e potenciação de números inteiros	Multiplicação de números inteiros positivos Multiplicação de números inteiros de sinais contrários Multiplicação de números inteiros negativos Propriedades da multiplicação Divisão de números inteiros Potenciação de números inteiros	EF07MA03 EF07MA04
Unidade 3: Ângulos e retas	Capítulo 8: Ângulo	O que é um ângulo? Ângulos congruentes Medida de um ângulo Adição de medidas dos ângulos Subtração de medidas dos ângulos Multiplicação de medidas dos ângulos por um número natural Divisão de medidas dos ângulos por um número natural Ângulos adjacentes Bissetriz de um ângulo Classificação de ângulos Ângulos complementares Ângulos suplementares	—[3]
	Capítulo 9: Retas e ângulos	Posições relativas de duas retas Ângulos de duas retas concorrentes Ângulos de duas retas com uma transversal	EF07MA23

3 Apesar de não ser explorada, neste capítulo, nenhuma habilidade específica do 7º ano do Ensino Fundamental, entendemos que o conteúdo proposto é um importante pré-requisito para a continuidade dos estudos em *Geometria*, sobretudo para o capítulo **9**.

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 4: Números racionais	Capítulo 10: Os números racionais	Razão Vamos conhecer os números racionais Os números racionais e a reta numérica Comparação de números racionais	EF07MA02 EF07MA08 EF07MA09 EF07MA10
	Capítulo 11: Operações com racionais	Adição Subtração Adição algébrica Multiplicação Divisão Potenciação Potências de base 10 Quadrados perfeitos Raiz quadrada	EF07MA09 EF07MA11 EF07MA12
Unidade 5: Estatística e Probabilidade	Capítulo 12: Média e amplitude de um conjunto de dados	Média aritmética Amplitude	EF07MA12 EF07MA35
	Capítulo 13: Pesquisa estatística e representações gráficas	Pesquisa estatística Construção de gráfico Comparando dois tipos de gráfico	EF07MA02 EF07MA12 EF07MA36 EF07MA37
	Capítulo 14: Frequência relativa e Probabilidade	Experimento aleatório Frequência Probabilidade	EF07MA34
Unidade 6: Noções de Álgebra	Capítulo 15: Noções iniciais de Álgebra	Expressões contendo letras Sucessões numéricas e expressões algébricas O que são monômios? O que são polinômios? Expressões algébricas equivalentes Sequências	EF07MA13 EF07MA14 EF07MA15 EF07MA16
	Capítulo 16: Equações	O que são equações? Raiz de uma equação	EF07MA11 EF07MA13 EF07MA18
	Capítulo 17: Resolução de problemas	Empregando equações	EF07MA18
Unidade 7: Distâncias, circunferências e polígonos	Capítulo 18: Distância e circunferências	Distância entre dois pontos Distância entre um ponto e uma reta O traçado da paralela Distância entre duas retas paralelas Circunferência Construção de uma circunferência O número π	EF07MA12 EF07MA22 EF07MA29 EF07MA33
	Capítulo 19: Polígonos	Recordando triângulos Desigualdade triangular Propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo Rigidez geométrica do triângulo Propriedade do ângulo externo de um triângulo Polígonos Construindo polígonos regulares	EF07MA07 EF07MA24 EF07MA25 EF07MA26 EF07MA27 EF07MA28
Unidade 8: Área, volume e transformações no plano	Capítulo 20: Área e volume	Recordando áreas Calculando a medida de área de polígonos Volume do paralelepípedo	EF07MA30 EF07MA31 EF07MA32
	Capítulo 21: Transformações geométricas no plano	Sistema de coordenadas Simetrias Reflexões Translações Rotações	EF07MA19 EF07MA20 EF07MA21

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 9: Aritmética aplicada	Capítulo 22: Razões e proporções	Razões Comparando sequências de números Números diretamente proporcionais Proporção Números inversamente proporcionais Divisão proporcional	EF07MA09 EF07MA15 EF07MA17
	Capítulo 23: Grandezas proporcionais	Correspondências entre grandezas Grandezas diretamente proporcionais Grandezas inversamente proporcionais Regra de três simples Escrevendo sentenças algébricas Porcentagem e regra de três	EF07MA13 EF07MA17 EF07MA29

O livro do 8º ano

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 1: Números	Capítulo 1: Números naturais, inteiros e racionais	Números Números naturais Números inteiros Números racionais	EF08MA05
	Capítulo 2: Porcentagens	Taxa percentual Fração e porcentagem	EF08MA04
Unidade 2: Potenciação e radiciação	Capítulo 3: Potenciação	Potências Potências de 10 e notação científica Propriedades das potências	EF08MA01 EF08MA03 EF08MA04
	Capítulo 4: Radiciação	Raiz quadrada Raiz quadrada como potência Equações quadráticas simples	EF08MA02 EF08MA09
Unidade 3: Triângulos	Capítulo 5: Congruência de triângulos	A ideia de congruência de triângulos Conceito matemático de congruência de triângulos Casos de congruência	EF08MA14
	Capítulo 6: Pontos notáveis do triângulo e propriedades	Ponto médio de um segmento de reta Bissetriz de um ângulo Bissetrizes e incentro Propriedades dos triângulos isósceles Propriedades dos triângulos equiláteros	EF08MA15 EF08MA17
Unidade 4: Cálculo algébrico	Capítulo 7: Expressões algébricas	Expressões matemáticas que contêm letras Sequências numéricas Valor numérico Diagonal de um polígono Polinômios	EF08MA06 EF08MA10 EF08MA11
	Capítulo 8: Operações com polinômios	Adição de polinômios Subtração de polinômios Multiplicação de polinômios Divisão de polinômios	–[4]
Unidade 5: Quadriláteros	Capítulo 9: Quadriláteros: noções gerais	Reconhecendo quadriláteros Perímetro Quadrilátero convexo e quadrilátero côncavo Soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero Quadriláteros notáveis	EF08MA14

4 Ainda que neste capítulo não seja explorada nenhuma habilidade específica do 8º ano, consideramos que o conteúdo proposto é importante para a continuidade dos estudos no campo da *Álgebra*.

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 5: Quadriláteros	Capítulo 10: Propriedades dos quadriláteros notáveis	Quadriláteros Paralelogramos Retângulos Losangos Quadrados Trapézios isósceles Base média do triângulo Base média nos trapézios	EF08MA14
Unidade 6: Álgebra	Capítulo 11: Equações	Um pouco de história Resolução de problemas Equações impossíveis e equações indeterminadas Equações do 1º grau	EF08MA06
	Capítulo 12: Sistema de equações	Problemas com 2 incógnitas Método da adição Método da substituição Método da comparação Interpretação geométrica Sistemas impossíveis e sistemas indeterminados	EF08MA07 EF08MA08
Unidade 7: Circunferência e transformações geométricas	Capítulo 13: Circunferência e círculo	Distância entre dois pontos Circunferência e círculo Posições relativas entre ponto e circunferência Distância de um ponto a uma reta Posições relativas entre reta e circunferência Posições relativas de duas circunferências Arcos de circunferência Semicircunferência Ângulo central Arcos congruentes Medida angular de um arco Construção de polígonos regulares	EF08MA15 EF08MA16 EF08MA17
	Capítulo 14: Transformações geométricas	Recordando transformações Construção geométrica da reflexão Construção geométrica da translação Construção geométrica da rotação	EF08MA18
Unidade 8: Área, volume e variação de grandezas	Capítulo 15: Área e volume	Área Medida de área do retângulo Medida de área do paralelogramo Medida de área do triângulo Medida de área do losango Medida de área do trapézio Medida de área de um polígono regular Medida de área do círculo Volume e capacidade	EF08MA19 EF08MA20 EF08MA21
	Capítulo 16: Proporcionalidade	Variação de grandezas Grandezas diretamente proporcionais Grandezas inversamente proporcionais Grandezas não proporcionais	EF08MA12 EF08MA13
Unidade 9: Estatística e Probabilidade	Capítulo 17:Medidas estatísticas	Média aritmética Média ponderada Média geométrica Cálculo da média em uma tabela de frequências Medidas de tendência central Medidas de dispersão	EF08MA04 EF08MA25
	Capítulo 18: Pesquisas e gráficos	Pesquisa estatística Classificação de variáveis quantitativas Distribuição de frequências por classes	EF08MA23 EF08MA24 EF08MA26 EF08MA27
	Capítulo 19: Contagem e Probabilidade	Princípio fundamental da contagem Probabilidade: de quanto é a chance?	EF08MA03 EF08MA22

O livro do 9º ano

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 1: Números e operações com raízes	Capítulo 1: Números reais	Os números reais Reta numérica Números irracionais Representação dos conjuntos numéricos Arredondamentos	EF09MA01 EF09MA02 EF09MA03
	Capítulo 2: Potências e raízes	Potência de expoente inteiro Raiz quadrada Raiz cúbica Quarta potência e raiz quarta Raiz n-ésima Equação binomial $x^n = a$, com n inteiro positivo Potência de expoente racional Transformando raízes em potências Adição e subtração com raízes Multiplicação e divisão com raízes Potenciação e radiciação	EF09MA01 EF09MA02 EF09MA03 EF09MA04 EF09MA18
Unidade 2: Cálculo algébrico	Capítulo 3: Produtos notáveis	Quadrado da soma de dois termos Quadrado da diferença de dois termos Produto da soma pela diferença de dois termos Identidades Racionalização de denominadores	EF09MA03 EF09MA04
	Capítulo 4: Fatoração de polinômios	Fração algébrica e simplificação Fatoração Quadrados perfeitos Trinômio quadrado perfeito	EF09MA09
Unidade 3: Equações	Capítulo 5: Resolução de equações por meio de fatoração	Produto igual a zero Fatoração e resolução de equações Trinômio do 2º grau	EF09MA03 EF09MA04 EF09MA09
	Capítulo 6: Equações do 2º grau	O que são equações do 2º grau? Completando quadrados A fórmula de Bhaskara Soma e produto das raízes	EF09MA03 EF09MA04 EF09MA09
Unidade 4: Proporcionalidade e Matemática financeira	Capítulo 7: Relações entre grandezas	Razão e proporção Divisão proporcional Grandezas diretamente proporcionais Grandezas inversamente proporcionais Grandezas não proporcionais Comparando mais de 2 grandezas Regra de três composta	EF09MA07 EF09MA08
	Capítulo 8: Porcentuais sucessivos	Taxa de juro e montante Cálculo com porcentuais sucessivos	EF09MA05

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 5: Semelhança e aplicações	Capítulo 9: Teorema de Tales	Comparação de grandezas Razão de segmento de reta Feixe de retas paralelas Teorema de Tales Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal	EF09MA10 EF09MA14
	Capítulo 10: Semelhança de triângulos	Semelhança Semelhança de triângulos Teorema de semelhança de triângulos I Teorema de semelhança de triângulos II Casos de semelhança	EF09MA12
	Capítulo 11: Relações métricas no triângulo retângulo	O triângulo retângulo Aplicações notáveis do teorema de Pitágoras	EF09MA13 EF09MA14
Unidade 6: Estatística e Probabilidade	Capítulo 12: Noções de Estatística	Estatística Variáveis discretas Variáveis contínuas Histograma Classificação das variáveis Amostra Gráfico de linha Outros tipos de gráfico Média, mediana e moda Dispersão de dados: amplitude	EF09MA05 EF09MA21 EF09MA22 EF09MA23
	Capítulo 13: Contagem e Probabilidade	Princípios da contagem Probabilidade Noções de probabilidade condicional e de independência	EF09MA20
Unidade 7: Áreas e polígonos	Capítulo 14:Diagonais e áreas	Equivalência de figuras Segmento de retas notáveis e cálculos de medidas de área	EF09MA13
	Capítulo 15: Polígonos regulares	Polígonos simples e polígonos não simples Polígonos convexos e polígonos côncavos Polígono regular Lado e apótema de polígonos regulares Construção de polígonos regulares	EF09MA15
Unidade 8: Círculo, cilindro e vistas	Capítulo 16: Círculo e cilindro	A circunferência Comprimento de um arco Ângulo inscrito na circunferência Volume de um prisma e de um cilindro	EF09MA11 EF09MA19
	Capítulo 17: Projeções ortogonais, vistas e perspectivas	Projeção ortogonal Vistas ortogonais e perspectivas	EF09MA17
Unidade 9: Funções	Capítulo 18: Sistema cartesiano ortogonal	Sistema cartesiano	EF09MA16
	Capítulo 19: Funções e suas representações	Noção de função Gráfico de uma função Função afim Função crescente e função decrescente Proporcionalidade Proporcionalidade inversa	EF09MA06

Abordagens teórico-metodológicas em Matemática

A BNCC preconiza que o ensino de Matemática deve se pautar no contexto do qual os estudantes fazem parte e, sobretudo, no protagonismo de cada um deles no processo de ensino e aprendizagem. Para que isso realmente ocorra em sala de aula, é essencial que as práticas pedagógicas possibilitem a participação e a ação dos estudantes. Conforme Lorenzato (2008), na Matemática é necessário que o discente manipule, experimente e compreenda o motivo das relações incluídas na abordagem de um conteúdo.

Com base nesse contexto, é importante ressaltar que a aula tradicional não deve ser descartada, pois também possibilita um tipo de aprendizagem que contempla especificidades de determinados conteúdos e para certos públicos. Entretanto, outras práticas pedagógicas podem e devem ser utilizadas trazendo diferentes tipos de significações para os estudantes.

A BNCC sugere que sejam exploradas a resolução de problemas, o raciocínio lógico-matemático, a modelagem matemática, o pensamento computacional e as investigações em sala de aula. Essas práticas, bem como todo o conteúdo que compõe a BNCC, são resultado de pesquisas em educação, Educação Matemática, letramento matemático, estudos sobre culturas, mercado de trabalho, desenvolvimento tecnológico, entre outros temas.

Discorreremos, neste Manual, sobre abordagens teórico-metodológicas e práticas pedagógicas a respeito de argumentação, História da Matemática e Etnomatemática, metodologias ativas, pensamento computacional, resolução e elaboração de problemas, modelagem matemática, raciocínio lógico-matemático, práticas de pesquisa, bem como uso dos recursos apoiados nas Tecnologias da Informação e Comunicação.

A BNCC destaca que os processos matemáticos de resolução de problemas, investigação, desenvolvimento de projetos e modelagem podem ser citados como modos privilegiados da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia de aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais ao letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e do pensamento computacional.

Argumentação

A **argumentação** e a **comunicação de ideias** em Matemática, assim como a investigação científica, são práticas que perpassam todas as outras áreas do conhecimento.

A BNCC destaca na **CG07** a capacidade de argumentação como uma das dez competências gerais propostas para a Educação Básica.

A leitura e os tipos de argumentação como ferramentas para o desenvolvimento de raciocínio

O processo de **leitura inferencial** favorece a organização das relações de significado dentro do texto e determina os significados que o leitor é capaz de estabelecer considerando todas as possibilidades de interpretação que um texto pode oferecer. A produção de sentidos de um texto está conectada ao contexto e à interação entre o autor e o leitor.

O hábito de leitura pode interferir positivamente nas habilidades dos estudantes para entender e interpretar questões do dia a dia, principalmente na Matemática (ROCK; SABIÃO, 2018).

Kato (1990) considera que, ao oferecer aos estudantes atividades de leitura orientada, pelo estímulo compreensivo e motivador e com situações-problema, favorecemos o desenvolvimento de estratégias cognitivas e metacognitivas. No trabalho em sala de aula, é possível ver quão desafiador é o ensino-aprendizagem e a produção de textos argumentativos. Para que os estudantes construam o próprio conhecimento, cabe propor atividades contextualizadas e que favoreçam o desenvolvimento da criticidade e do protagonismo cidadão.

De acordo com Vinhal (2019), ao produzir um texto argumentativo, seja em Matemática ou em outra área de conhecimento, os estudantes podem utilizar alguns tipos de **raciocínio-lógico**: o **indutivo** (parte de fatos particulares para uma conclusão geral), o **dedutivo** (parte do enunciado geral para provar um fato particular), a **analogia** (provas de acordo com semelhanças entre os casos) e a **dedução** (parte de uma regra para obter a conclusão). Saraiva (2019) cita também a **abdução** (conclusões com base em premissas).

Em Matemática, ao incentivar e trabalhar com orientações e roteiros de estudo e pesquisa, mobilizamos as habilidades de leitura, escrita, oralidade e escuta reflexiva dos estudantes, ampliando as estruturas que compõem o letramento matemático nos sujeitos e permitindo, também, o desenvolvimento desses tipos de raciocínio-lógico.

Os estudantes, ao falarem e ouvirem os pares em sala de aula, aprendem e ressignificam saberes. Comunicar-se durante as aulas de Matemática é um processo complexo, pois o indivíduo precisa se apoiar em duas linguagens para tanto: a materna, para comunicação universal, e a linguagem matemática, com símbolos e características próprias.

Nesta coleção, incentivamos o processo de leitura inferencial e o desenvolvimento do raciocínio argumentativo em diversas oportunidades, sobretudo nas aberturas de Unidades – nas quais os estudantes devem ler um texto, interpretá-lo e tirar as próprias conclusões – com atividades envolvendo a elaboração e a resolução de problemas e ao solicitar que argumentem de que maneira chegaram às respostas encontradas.

A argumentação e as falácias

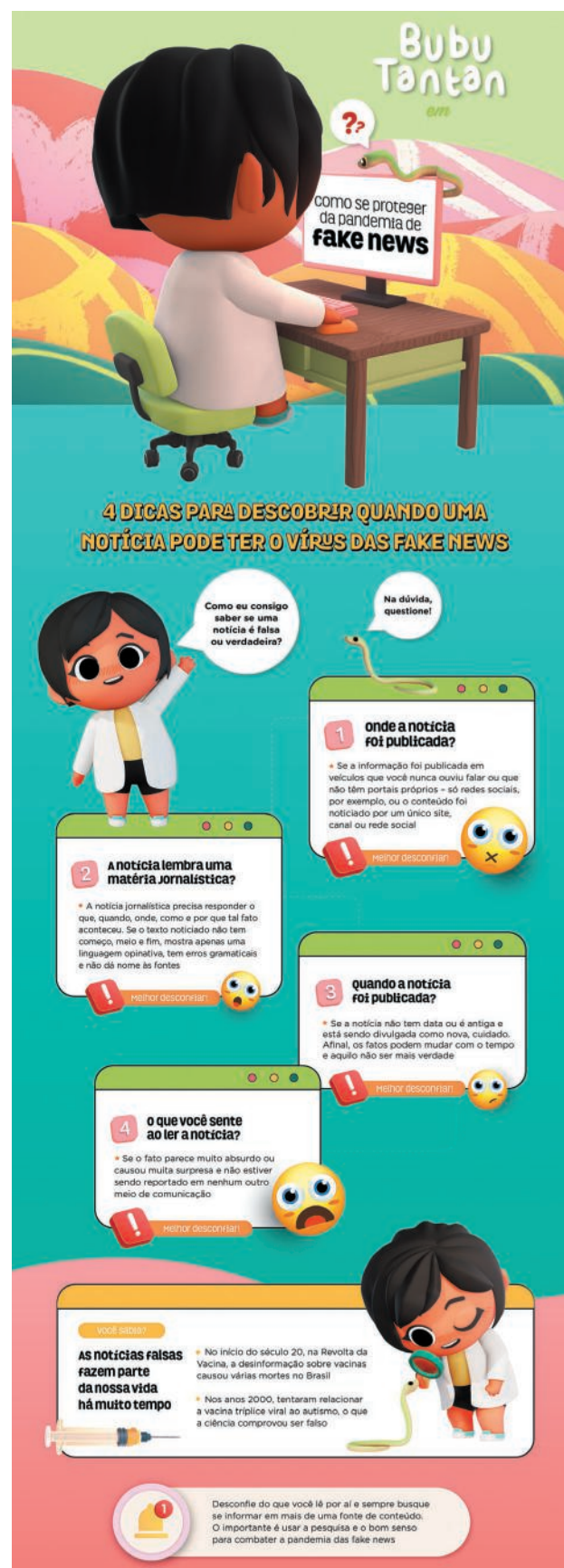
A velocidade com que as informações circulam na atualidade é impressionante. Todos nós, e principalmente os jovens, têm acesso às informações de maneira quase instantânea pela comunicação em rede, o que nos coloca diante de um grande desafio: Como distinguir a verdade de uma falácia no meio desse emaranhado de informações?

Falácia é um tipo de raciocínio equivocado que, apesar de simular a verdade, é logicamente incoerente. Os argumentos falaciosos são particularmente perigosos, uma vez que, geralmente, estão amparados no senso comum, fazendo com que se tornem bastante persuasivos.

A expressão *fake news* tem feito parte do vocabulário da população e passou a ser usada com mais frequência sobretudo durante a pandemia de covid-19, período no qual muitas informações circularam num contexto com poucas informações dos órgãos competentes sobre o assunto. O número de notícias falsas era tão grande que levou algumas instituições a criarem materiais específicos com dicas para verificar a veracidade das informações.

A escola exerce um papel importante no trabalho contra a circulação de desinformações. Para tanto, professores de todas as áreas de conhecimento devem assumir o papel de formadores de cidadãos com senso crítico e capazes de identificar uma notícia ou texto falso ou malicioso.

Nesta coleção, apresentamos algumas oportunidades de exploração desse tema, sempre com orientações para que os estudantes possam se certificar da autenticidade das informações.

Governo do Estado de São Paulo/Instituto Butantan

Reprodução de fôlder orientativo de combate às *fake news* elaborado pelo Instituto Butantan, São Paulo (SP), durante a pandemia de covid-19.

Investigação científica e raciocínio lógico

Saber pensar matematicamente é relacionar situações de contextos diferentes para descobrir novas estratégias e soluções e interpretá-las utilizando, para tanto, diversos tipos de raciocínios argumentativos como ferramenta.

A investigação em Matemática apresenta-se como uma metodologia que:

> tem por objetivo oferecer oportunidade para os alunos vivenciarem uma experiência semelhante ao do investigador matemático e, assim, motivá-los a estudarem Matemática, por meio do desafio de descobrir relações matemáticas apresentadas em situações matemáticas específicas. Desta forma, levar o aluno a ter uma visão do que é fazer Matemática, bem como sentir prazer no fazer Matemática. (MAGALHÃES, 2016)

Nesta coleção, apresentamos algumas possibilidades para você introduzir, na sala de aula, atividades que potencializem o desenvolvimento desses modos de raciocinar, sobretudo a dedução, a indução e a abdução.

Dedução

Dedução é o modo de inferência mais simples e se caracteriza pela inferência que mostra de que maneira, seguindo determinada regra geral, se estabelece um caso particular.

> No método dedutivo consideramos a forma mais certa para nós, ou seja, caminhos verdadeiros, concluintes e resultados. Exemplo: "Hoje está calor e o asfalto está quente". Esse método é comum para testar hipóteses já existentes, dada por axiomas, para comprovar teorias, nomeada de teoremas. (LASCANE, 2019, p. 122)

Indução

Na indução, ao contrário da dedução, parte-se da premissa menor e busca-se a generalização. A verificação da teoria é feita por experimentação. Enquanto processo lógico-analítico, a indução é passível de ser experimentada e, consequentemente, comprovada.

Por trás do raciocínio indutivo está um passo essencial: a "atitude indutiva" à qual é submetido o pesquisador. Ter uma atitude indutiva requer saber observar detalhes em sua experiência e formular hipóteses que podem ou não ser verdadeiras.

Abdução

Na abdução se dá o processo de formação de hipóteses explicativas que ajudam na compreensão de certos fenômenos. Consideramos ponto de partida do raciocínio indutivo.

> Na Matemática, como nas ciências em geral, a abdução é um processo de procura por princípios, explicações ou hipóteses. Ao contrário da dedução, que parte das hipóteses para verificar que as conclusões são verdadeiras, a abdução parte de uma suposta verdade para encontrar algumas hipóteses das quais ela possa ser deduzida. A criação de hipóteses favoráveis nos leva a investigar a situação e assim podemos descobrir coisas novas. (KOVALSKI, 2016, p. 21)

Prática de pesquisa

A prática de pesquisa pode ser incentivada e adotada na abordagem de todos os conteúdos matemáticos. O ato de investigar caminha com os jovens desde a infância. Todo jovem é curioso e tende a explorar e buscar mais informações sobre algo que lhe chama atenção. Nessa perspectiva, é importante que o ensino de Matemática também busque possibilidades para despertar o interesse dos indivíduos. A sala de aula pode proporcionar curiosidade, descoberta e surpresa, desde que as práticas pedagógicas contemplem a participação efetiva deles no processo de aprender.

A prática de pesquisa também serve de aporte interessante por envolver saberes prévios, questionamentos, levantamento e teste de hipóteses, verificações de resultados, elaboração de modelos matemáticos, entre outros.

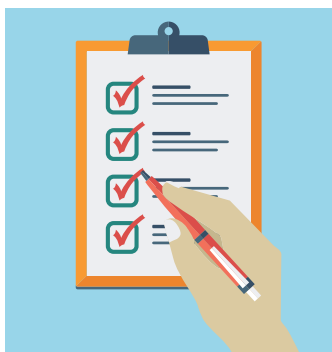
Pesquisar significa informar-se a respeito de algo, investigar, examinar minuciosamente determinado tema ou problema. É uma ação em busca de conhecimento. Isso quer dizer que não significa apenas a busca simples de algum tema na internet, como muitos estudantes podem pensar.

Andrew Krasovitckii/Shutterstock

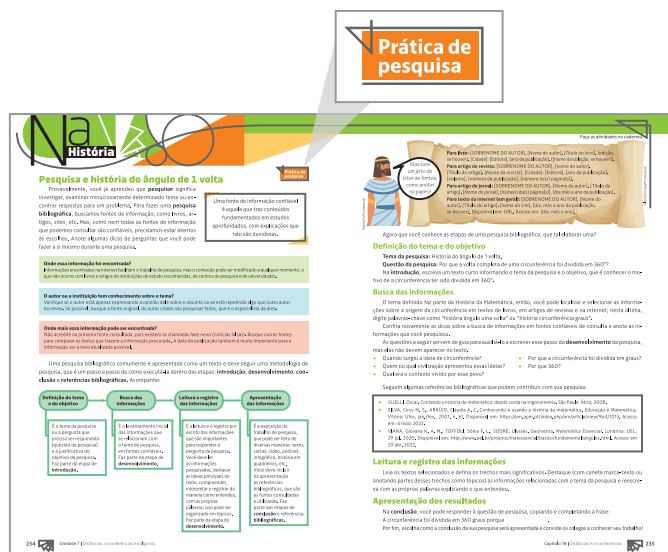
É importante os estudantes compreenderem que a pesquisa é resultado de uma ação iniciada pela curiosidade ou inquietação de uma ou mais pessoas acerca de determinado assunto ou problema. Uma pesquisa é uma investigação.

Nesta coleção, o tipo de pesquisa proposto é o que chamamos de **pesquisa bibliográfica**, cujas propostas se tornam mais complexas à medida que os estudantes avançam nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Esse tipo de pesquisa consiste na coleta de informações sobre o tema em textos, livros, artigos, *sites*, entre outros: **as fontes de informação**.

Sempre que explorar o trabalho com as fontes de informação, retome com os estudantes a necessidade de avaliar as fontes utilizadas. Consulte o tópico "A argumentação e as falácias" deste Manual para exemplificar e debater com os estudantes o que são falácias e como evitá-las.

Nas propostas desta coleção indicadas com o selo *Prática de pesquisa*, procuramos enfatizar as etapas de uma pesquisa bibliográfica: introdução, desenvolvimento, conclusão e referências. Ao compreender a função de cada etapa da pesquisa bibliográfica, os estudantes têm a oportunidade de vivenciar o método científico, que será ampliado no Ensino Médio.

ankudi/Shutterstock

No volume 7 da coleção, por exemplo, requer-se dos estudantes que respondam à seguinte questão de pesquisa: "Por que a volta completa de uma circunferência foi dividida em 360°?". Ao pesquisarem a informação, eles mobilizam a **CG01**, a **CG02**, a **CEMAT01** e a **CEMAT02**, exercitando a curiosidade intelectual e recorrendo à abordagem própria das ciências no trabalho de investigação.

Prática de pesquisa

Reprodução da seção *Na História* do Livro do Estudante, páginas 234 e 235, volume 7, com destaque para o ícone *Prática de pesquisa*.

Proposta para o professor

O texto sugerido a seguir, em linguagem bastante acessível, mostra que os *podcasts* são ferramentas importantes no processo de ensino-aprendizagem. São um rico recurso que pode ser utilizado na divulgação dos resultados de projetos de pesquisa.

KARLA, Ana. Como transformar o *podcast* em recurso pedagógico na sala de aula? *Instituto Singularidades*, São Paulo, 2019. Disponível em: https://blog.institutosingularidades.edu.br/como-transformar-o-podcast-em-recurso-pedagogico-na-sala-de-aula/. Acesso em: 19 jun. 2022.

Metodologias ativas

Uma das tendências pedagógicas em voga atualmente é conhecida como "metodologias ativas". Nesse tipo de metodologia, o conhecimento não se origina exclusivamente da escola, do professor. Ele é proveniente também do que o estudante sabe sobre determinado assunto. Segundo o professor José Moran (2015), da Universidade de São Paulo (USP), as metodologias ativas podem ser um ponto de partida de avanço para processos mais profundos de reflexão, integração cognitiva, generalização e reelaboração de novas práticas. Ele afirma que estudantes se tornam mais proativos quando se envolvem em atividades que mobilizam ações desafiadoras e quando podem argumentar, testar hipóteses e experimentar novas situações.

No artigo "Mudando a educação com metodologias ativas", Moran traz apontamentos importantes que ajudam a compreender o que são as metodologias ativas e quais são o impacto do uso delas na aprendizagem dos estudantes. Sintetizamos a seguir os principais itens abordados no artigo.

1º) As relações de ensino e aprendizagem são processos interligados que constituem relação simbiótica, profunda, constante entre o que chamamos mundo físico e mundo digital. Não são dois mundos ou espaços, mas um espaço estendido, uma sala de aula ampliada, que se mescla. Nesse sentido, a educação formal é cada vez mais *blended*, misturada, híbrida, porque não acontece só no espaço físico da sala de aula, mas nos múltiplos espaços do cotidiano, que inclui os digitais.

2º) O professor deve compreender que as tecnologias também são modos de comunicação com os estudantes, sujeitos nascidos em uma era de pleno desenvolvimento tecnológico. A interligação entre sala de aula e ambientes virtuais é fundamental para abrir a escola para o mundo e trazer o mundo para dentro da escola.

3º) Desafios são importantes, por isso, junto com outras atividades, quando bem planejados, acompanhados e mediados podem mobilizar as competências desejadas, sejam intelectuais, emocionais, pessoais ou comunicacionais. Exigem pesquisas, avaliação de situações, observação de pontos de vista diferentes, assumir alguns riscos, aprender pela descoberta e caminhar do simples para o complexo. Nas etapas de formação na Educação Básica, os estudantes precisam de acompanhamento de profissionais mais experientes para ajudá-los a conscientizar-se de alguns processos, estabelecer conexões não percebidas, superar etapas mais rapidamente e confrontá-los com novas possibilidades.

4º) Uma proposta interessante é a prática de jogos colaborativos, visto que a geração atual é acostumada a jogar e a se comunicar, muitas vezes, na linguagem própria dos *games*. Assim, ao utilizá-los é possível gerar além de um ambiente de competição, um ambiente colaborativo, de estratégia, com etapas e habilidades bem definidas.

5º) O professor tem papel importante no trabalho com as metodologias ativas, pois é o articulador de etapas, processos, resultados, lacunas e necessidades, seguindo percursos dos estudantes individualmente ou em grupos, pois é ele quem conduz o desenvolvimento da aula ou de um projeto.

6º) O trabalho com projetos é uma boa oportunidade de inserir metodologias ativas de aprendizagem na escola, sempre atentando-se que o aprendizado ocorre com base em problemas e situações reais. Nesse sentido, trabalhar com projetos de vida pode ser um bom início para conquistar e aproximar os estudantes, além de fazê-los sentir-se responsáveis pela própria aprendizagem. Os projetos das escolas Summit da Califórnia (Summit Schools) são inspiradores e é interessante pensarmos em sua implantação nas unidades escolares brasileiras.

Proposta para o professor

A Summit Public Schools da Califórnia é uma rede de escolas que mescla educação baseada em projetos, ensino híbrido (tecnologias, currículo e personalização) e o projeto de vida de cada estudante. No vídeo sugerido aqui (em inglês com legenda em português), a diretora da rede de escolas Diane Tavenner explica como funciona na prática.

PROJETO de vida como articulador da escola (Summit School): transformar 2013. [São Paulo]: Fundação Lemann, 2014. 1 vídeo (21 min 40 s). Publicado pelo canal Fundação Lemann. Disponível em: https://youtu.be/FIF7jNZwFcw. Acesso em: 19 jun. 2022.

Caso tenha interesse por esse tema, acesse o artigo que foi sintetizado neste Manual: MORAN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, Carlos Alberto; MORALES, Ofelia Elisa Torres (org.). *Convergências midiáticas, educação e Cidadania*: aproximações jovens. v. II. Ponta Grossa: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. (Coleção Mídias Contemporâneas). Disponível em: http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/mudando_moran.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

Um exemplo de aplicação: sala de aula invertida

Ainda segundo José Moran, ao trabalhar com a sala de aula invertida, geralmente é possível destacar três momentos pedagógicos.

1º momento: Após a definição do tema ou conteúdo a ser trabalhado, é preciso oferecer aos estudantes material para pesquisa, como apostilas e indicações de *sites* e de outros materiais disponíveis na internet, para que estudem antes da aula presencial.

Pode-se ainda apresentar-lhes um roteiro de estudos ou questionário para auxiliar na investigação e verificar seus saberes prévios sobre o tema. Por fim, é necessário sanar dúvidas e reforçar com a turma os pontos que achar necessário.

2º momento: Nessa etapa, os estudantes, preferencialmente em grupos, desenvolvem projetos e atividades enquanto seguem sua organização e orientação. Esse momento é rico e deve ser explorado pelo docente, pois quando reunidos em pares e apoiando-se em linguagem própria juvenil para acessar os saberes prévios, argumentar e comunicar ideias, os conteúdos são apreendidos e ressignificados.

3º momento: Já na terceira e última parte, você deve auxiliar os estudantes motivando-os e fazendo com que se sintam agentes do processo de formação. Incentive todos a compartilharem ideias, apoiando-se, mais uma vez, na comunicação e na argumentação matemática para formalizarem resultados e discussões teóricas.

Proposta para o professor

O professor José Moran tem vasta produção que versa sobre inovação em sala de aula. Este texto pode ser um bom início para estudo.

MORAN, José. Novos modelos de sala de aula. *Revista Educatrix*, São Paulo: Moderna, n. 7, 2014. Disponível em: https://pt.calameo.com/read/0028993271fb4d724b1cb. Acesso em: 3 jun. 2022.

Um exemplo interessante de uso da metodologia de sala de aula invertida (e que pode ser aplicado em diversos momentos desta coleção, em particular nos capítulos de Geometria espacial) é uma aula prática com conteúdos visuais e manuais para a construção de modelos de sólidos geométricos e exploração dos principais conceitos, podendo apoiar-se no roteiro a seguir.

1º momento: Apresentação de materiais, vídeos e *sites* que tratem do tema. Elabore um roteiro de pesquisa e investigação sobre sólidos geométricos e apresente-o à turma.

2º momento: Organização da turma em trios e distribuição de tarefas para a construção de modelos dos sólidos geométricos (pode ser um tipo de sólido por grupo), seguido da exploração dos modelos de sólidos geométricos e investigação de suas propriedades e características. Fomente a discussão e o registro dela em um relatório ou painel para ser comunicado à turma em formato de minisseminário.

3º momento: Apresentação dos produtos finais (modelos dos sólidos geométricos montados e painéis/relatórios) à turma e defesa das ideias.

Perceba que, nesse exemplo de aula prática de construção de modelos de sólidos geométricos, são mobilizadas habilidades que envolvem argumentação e comunicação de ideias, assim como as práticas de investigação, sempre com sua mediação.

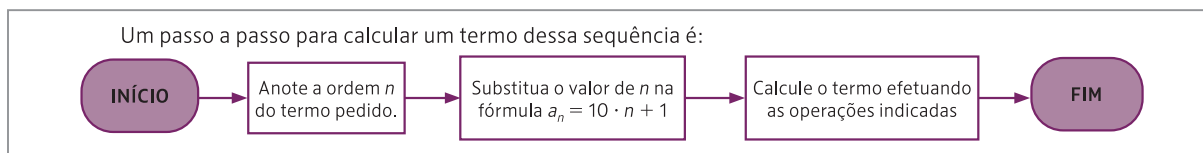
Pensamento computacional

Podemos compreender o pensamento computacional como uma competência associada à resolução de problemas, apoiando-se, para tanto, na computação.

Utilizar recursos do pensamento computacional em sala de aula não significa necessariamente fazer programas de computador ou outro tipo de *software*. Esse conceito significa o desenvolvimento de uma representação de raciocínio lógico e por etapas, compreendendo a presença de padrões, a elaboração de passos, testes e validações de resultados, além da generalização pela abstração. Portanto, o uso dos algoritmos, de fluxogramas, de esquemas ou mesmo de roteiros com etapas passo a passo a serem cumpridas pode ser compreendido como pensamento computacional. E esses são importantes recursos que podem auxiliar os estudantes a identificar relações entre os objetos representados, como na organização das etapas de uma tarefa, representação de árvore de possibilidades, entre outras situações.

Ao propor com frequência o uso desses recursos, é possível incentivar o raciocínio analítico dos estudantes, chamando a atenção para a aprendizagem de programação e de robótica.

Um passo a passo para calcular um termo dessa sequência é:

INÍCIO → Anote a ordem *n* do termo pedido. → Substitua o valor de *n* na fórmula $a_n = 10 \cdot n + 1$ → Calcule o termo efetuando as operações indicadas → FIM

Reprodução de passo a passo de fluxograma para cálculo do termo de uma sequência numérica, página 92, volume 8 do Livro do Estudante.

É importante destacar que as pesquisas, os estudos e as aplicações envolvendo o pensamento computacional na educação já existem há quase 20 anos e, de acordo com a BNCC, esse tipo de raciocínio pode ser mobilizado em todas as etapas da Educação Básica.

A estadunidense Jeannette M. Wing é engenheira, pesquisadora e cientista computacional, além de professora de Ciência da Computação na Universidade de Columbia (EUA). Ela é a principal defensora do pensamento computacional aplicado em várias áreas do conhecimento. O ensaio "Pensamento computacional" foi publicado há mais de 15 anos e considera-se que ajudou a estabelecer a centralidade da Ciência da Computação na resolução de problemas em todas as áreas do conhecimento. (Fonte dos dados: COLUMBIA UNIVERSITY Data Science Institute. *Jeannette M. Wing*. Nova York: DSI, [20--]. Disponível em: https://datascience.columbia.edu/people/jeannette-m-wing/. Acesso em: 3 jun. 2022.)

Jeannette M. Wing. Foto de 2009.

Reprodução/Nadja Meister/TU Wien Informatics

Ao longo desta coleção, você encontra indicações de atividades que exploram o uso do pensamento computacional, como no excerto a seguir. Para concluir esta atividade, o estudante deve cumprir etapas e regras. O pensamento computacional é mobilizado na organização da sequência lógica e na validação dos resultados obtidos ao longo do processo.

21. O algoritmo apresentado a seguir pode ser utilizado para saber se um número natural é divisível por 3. Leia-o e depois faça o que se pede.

1ª) Adicionar os algarismos do número.
2ª) Decidir se a soma calculada é ou não é divisível por 3.
3ª) Concluir se o número é divisível por 3.

Represente esse algoritmo no caderno por meio de um fluxograma.

Reprodução de atividade que envolve pensamento computacional, página 124, volume 6 do Livro do Estudante.

Recursos apoiados nas tecnologias

Em um mundo globalizado e em constante desenvolvimento científico e tecnológico, é importante que a escola se integre a práticas que propiciem aos estudantes vivenciar essa realidade com aplicação ao ensino. Para tanto, é preciso que você tenha acesso a equipamentos e informações e realize atividades com eles tendo como suporte recursos tecnológicos para auxiliá-lo na sala de aula.

Nesta coleção, sugerimos explorar com os estudantes recursos tecnológicos em diversas oportunidades, como ao propor a utilização do GeoGebra e de planilhas eletrônicas na seção *Matemática e tecnologias*, presente em todos os volumes.

Matemática e tecnologias

Construindo gráficos com auxílio de uma ferramenta digital

Reprodução de seção *Matemática e tecnologias*, páginas 254 e 255, volume 8 do Livro do Estudante.

O GeoGebra é um *software* gratuito e multiplataforma de Geometria dinâmica para todos os níveis de ensino, que combina Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Estatística e cálculo em uma única aplicação. Para acessá-lo *on-line*, visite: https://www.geogebra.org/ (acesso em: 3 jun. 2022). Ele também pode ser baixado em *smartphones*, na loja oficial de aplicativos do sistema operacional, ou em computadores.

Com o GeoGebra, é possível fazer, por exemplo:

- construções geométricas de ângulos medindo 90°, 60°, 45° e 30° e de polígonos regulares;
- transformações geométricas (simetrias de translação, reflexão e rotação);
- cálculos da medida de área de figuras planas.

Há diversos aplicativos de planilhas eletrônicas para computador e *smartphone* ou *on-line*. O uso e as funcionalidades dessas planilhas são similares e muitas estão disponíveis em português.

Com as planilhas eletrônicas, sugerimos propor aos estudantes:

- cálculos usando as fórmulas disponíveis;
- construção de tabelas e gráficos, a partir de exemplos;
- simulações de orçamentos.

A calculadora é um recurso bastante utilizado em situações cotidianas por boa parte das pessoas; no entanto, muitas não sabem se beneficiar de todos os recursos que ela disponibiliza. Além disso, a calculadora é uma ferramenta eficiente para correção de erros, averiguação de respostas e teste de hipóteses, e é possível utilizá-la como instrumento de autoavaliação ou investigação.

Nesta coleção oportunizamos situações de uso da calculadora, seja para verificação de cálculos ou de natureza investigativa. Acompanhe a seguir um exemplo em que apresentamos a calculadora e propomos sua utilização em uma situação do cotidiano.

Reprodução de seção *Matemática e tecnologias*, páginas 35 e 36, volume 6 do Livro do Estudante.

Há ainda a possibilidade de aproveitamento de outras tecnologias em sala de aula, como o computador para aquisição de dados usando *softwares* apropriados, simuladores, recursos multimídia e interativos (textos, vídeos, imagens, etc.) e pesquisas na internet. Damos algumas sugestões na coleção, no entanto você pode recorrer a outras ferramentas, de acordo com a realidade escolar.

Proposta para o professor

Além das tecnologias citadas, é possível usar, ainda, aplicativos de localização espacial como suporte para as aulas. O artigo indicado a seguir explora o trabalho com esse tipo de aplicativo.

BAIRRAL, Marcelo A.; MAIA, Rafael C. O. O uso do Google Earth em aulas de Matemática. *Linhas Críticas*, Brasília, DF: Universidade de Brasília, v. 19, n. 39, p. 373-390, maio-agosto 2013. Disponível em: https://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/4145/3800. Acesso em: 3 jun. 2022.

Resolução e elaboração de problemas

Na área de Matemática, a BNCC ressalta que os professores devem incentivar os estudantes apresentando problemas da vida real que sejam usados como ponto de partida para situações didáticas em que se desenvolvam a criatividade, o pensamento crítico e a colaboração. Sua responsabilidade não é apenas ensinar a calcular, mas levá-los a compreender que, além das operações, existem outras relações numéricas.

Por meio da elaboração e resolução de problemas nas aulas de Matemática, os jovens aprendem a justificar, explicar como e por que chegaram a uma resposta, mostrar seu raciocínio aos colegas e professores. Elaborar e resolver problemas exige um ambiente de comunicação e escuta, além de cooperação e argumentação. É importante destacar que os estudantes devem perceber que resolver problemas não está relacionado somente às aulas de Matemática, mas é uma habilidade mobilizada ao longo de toda a vida, em diversas situações do cotidiano.

O precursor das ideias acerca da resolução de problemas foi o matemático e professor húngaro George Polya (1887-1985), que estabeleceu passos a serem seguidos na resolução de um problema, descritos a seguir, sinteticamente, de acordo com Polya (1978).

- **Compreender o problema**: o que se pede; quais são os dados.
- **Elaborar um plano**: estratégias para resolver o problema; como organizar os dados.
- **Executar o plano**: executar as estratégias; fazer os cálculos.
- **Fazer a verificação ou o retrospecto**: verificar se a solução está correta; se há outras maneiras de resolver o problema.

De acordo com Dante (1989), podemos alcançar os objetivos a seguir ao trabalhar com a resolução de problemas.

- Pensar produtivamente sobre uma atividade.
- Desenvolver o raciocínio do estudante.
- Contribuir para que o estudante se envolva com aplicações da Matemática.
- Tornar as aulas de Matemática mais desafiadoras e interessantes.

Além dos objetivos citados, a resolução e a elaboração de problemas contribuem para investigação, levantamento e teste de hipóteses, elaboração de argumentos e de ideias matemáticas e para o compartilhamento de diferentes saberes.

Ao longo desta coleção há diversas e variadas possibilidades de se trabalhar com resolução de problemas e temas da realidade ou em contextos didáticos. Aproveite a oportunidade e crie um ambiente de investigação e construção de saberes com os estudantes.

Participe Faça as atividades no caderno.

I. Leonardo é dono de um sítio e cercou uma região retangular cujas dimensões medem 25 m por 20 m para plantar hortaliças.

a) Que operação você deve fazer para calcular a medida de área dessa região?

b) Qual é a medida de área dessa região?

Plantação de hortaliças no sítio de Leonardo.

Ilustrações: Estúdio Mil/Arquivo da editora

II. Joaquim, amigo de Leonardo, também cercou uma região do terreno para plantar hortaliças. Verifique a imagem a seguir, da vista de cima da plantação.

a) O que diferencia uma região da outra?

b) Você acha possível calcular a medida de área da região cercada por Joaquim usando o mesmo procedimento utilizado para calcular a medida de área da região cercada por Leonardo? Justifique sua resposta.

Plantação de hortaliças no sítio de Joaquim.

Reprodução do boxe *Participe*, página 258, volume 7 do Livro do Estudante.

Modelagem matemática

A modelagem matemática é mais uma tendência pedagógica que pode envolver e despertar o interesse dos estudantes pela Matemática. Assim como a resolução de problemas, essa proposta possibilita a você criar um ambiente de investigação, levantamento e testes de hipótese, argumentação e comunicação em sala de aula.

Usando a modelagem matemática é possível propiciar oportunidades de identificação e análise de situações-problema reais, fazendo os estudantes se interessarem mais pelo conteúdo explorado. Isso é mais bem compreendido com a explanação de estudos como o dos pesquisadores brasileiros Nelson Hein e Maria Salett Biembengut, publicado na obra *Modelagem matemática no ensino* (2000). Segundo esses pesquisadores:

1º) A modelagem é um processo que envolve a obtenção de um modelo e, para isso, além de conhecer o conteúdo matemático, é preciso também ter criatividade para interpretar o contexto.

2º) A elaboração de um modelo matemático depende do conhecimento sobre o conteúdo em questão.

3º) A modelagem pode ser considerada até uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que servem não apenas para solução em particular, mas que possam ser generalizadas.

É importante saber que a modelagem matemática possibilita várias situações de interdisciplinaridade e transversalidade. Apresentamos a seguir um exemplo da coleção, no volume 7, em que os estudantes têm a oportunidade de determinar o valor aproximado de π experimentalmente.

Participe Faça as atividades no caderno.

Vamos determinar experimentalmente o valor aproximado de π. Para isso, vamos precisar de objetos redondos, como moedas, anéis, rodas, fundo de copos, jarras ou garrafas, transferidor circular e outros que conseguir. Também serão necessárias linha de costura ou barbante, tesoura com pontas arredondadas, régua ou fita métrica.

Procedimento:

1ª) Posicione cada objeto redondo sobre uma folha de papel e contorne a base de cada um deles, de modo a obter circunferências.

2ª) Meça o diâmetro, em centímetros, de cada circunferência obtida.

3ª) Registre, no caderno, as medidas de cada diâmetro em um quadro como o apresentado a seguir.

4ª) Coloque a linha ou o barbante em torno dos objetos, formando circunferências.

5ª) Corte a linha ou o barbante do tamanho do contorno de cada objeto e meça o comprimento do fio com a régua ou fita métrica.

6ª) Na coluna correta do quadro, anote a medida desse comprimento, em centímetros, para cada objeto.

7ª) Para completar o quadro, com uma calculadora, divida a medida de comprimento do fio pela medida do diâmetro do respectivo objeto.

Objeto	Medida do diâmetro *d* (em cm)	Medida *c* da linha ou do barbante (em cm)	Razão $\frac{c}{d}$
Moeda			
Lata de milho			
⋮			

- Compare as razões obtidas. Qual é a conclusão que você pode tirar do experimento realizado?

Reprodução do boxe *Participe*, página 231, volume 7 do Livro do Estudante.

Outras possibilidades de trabalho interessantes são as abordagens de temas que exploram o TCT *Educação Financeira*, por exemplo, pela investigação de modelos usados para calcular a tarifa da conta de energia elétrica ou de telefonia celular.

Proposta para o professor

No artigo intitulado "Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem" você conhecerá uma experiência de modelagem matemática aplicada ao ensino e baseada na análise de como ocorre o crescimento de um formigueiro da saúva-limão. Essa experiência pode servir de inspiração para uma prática interdisciplinar com Ciências. Vale a pena a leitura desse artigo publicado na *Revista Boletim de Educação Matemática* (Bolema), da Unesp.

ALMEIDA, Lourdes M. W.; DIAS, Michele R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, Rio Claro: Unesp, v. 17, n. 22, p. 19-35, 2004. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10529. Acesso em: 3 jun. 2022.

História da Matemática e Etnomatemática

A BNCC ressalta a importância do trabalho com os diferentes saberes e culturas e com a produção do conhecimento produzido pela humanidade ao longo do tempo e do espaço. Para tanto, há duas tendências metodológicas, também destacadas nesse documento oficial, que podem servir de aporte para esse trabalho: a História da Matemática e a Etnomatemática.

Em relação à História da Matemática, a BNCC traz vários destaques. Reproduzimos a seguir um exemplo.

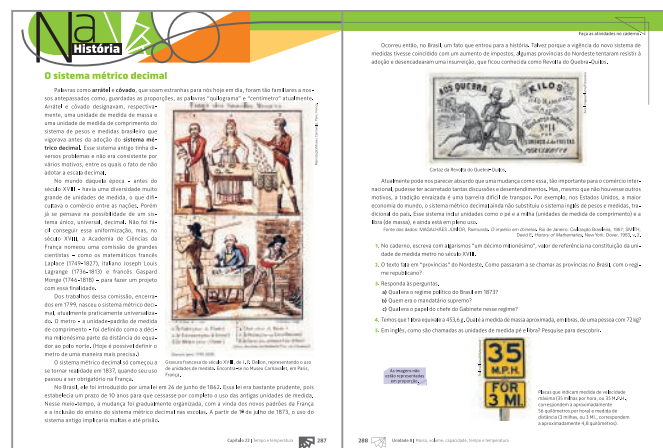
> A Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau. (BRASIL, 2017, p. 272-273)

O livro *História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores*, escrito pelos professores brasileiros Iran Abreu Mendes (Universidade Federal da Paraíba) e Miguel Chaquiam (Universidade Federal do Rio Grande do Norte), traz um panorama explicitador e incentivador da abordagem de conteúdos a partir da História da Matemática. A seguir, alguns pontos essenciais abordados por eles (MENDES; CHAQUIAM, 2016).

1. Ao explorar a história da Matemática, é necessário compreender que, na verdade, trata-se de histórias no plural, pois estão conectadas, integradas ou mesmo tecidas em meio a outras histórias das mais diversas qualidades. São histórias sobre a produção de ideias matemáticas e as materializações em múltiplas linguagens representativas e, talvez, também seja dessa multiplicidade que surge a característica plural dessas histórias. Esquecer ou desprezar essa pluralidade é empobrecer qualquer abordagem dita ou concebida como transversal, integrada ou até mesmo contextualizada para a Matemática que se ensina.
2. As histórias consideradas importantes para o desenvolvimento da aprendizagem matemática dos estudantes em sala de aula são aquelas que têm a vocação de explicar a organização conceitual das matemáticas produzidas no tempo e no espaço.
3. Uma das justificativas mais comum sobre a indicação do uso didático ou pedagógico das informações históricas nas atividades de ensino de Matemática é que ela amplia a compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais dessa área, representando uma contribuição didática para o trabalho do professor e fortalecendo as competências formativas para o exercício de ensino.
4. O uso da história nas aulas de Matemática amplia a visão sobre os aspectos formativos, informativos e utilitários, conduzindo os estudantes ao acervo cultural dessa ciência com a finalidade de desenvolver o interesse pelo assunto e estimular a preservação da memória intelectual humana.
5. É necessário que o professor redirecione o uso das histórias e promova um exercício de investigação mais ampliado, possibilitando que se crie um cenário no qual as histórias do desenvolvimento conceitual sejam agregadas às informações existentes. É preciso explicar que o conhecimento a ser aprendido contribuirá para a ampliação das estratégias de pensamento e, consequentemente, ajudará os estudantes na produção de conhecimento. Outro fator importante é a possibilidade de extrair das informações históricas aspectos epistemológicos que favoreçam a explicação de porquês matemáticos; por exemplo: como determinados teoremas foram provados, entre outros. É fundamental que o professor tente se colocar no lugar do criador desses conceitos para que incorpore, da melhor maneira possível, as justificativas e as argumentações, de modo que a solução seja compreendida e aceita pelos estudantes. Além disso, esse posicionamento dá a possibilidade de diálogos criativos que subsidiem novos elementos agregadores à reformulação das teorias matemáticas que foram complementadas ao longo do desenvolvimento histórico da Matemática.
6. Podem ser desenvolvidos alguns projetos de investigação sobre as histórias dos seguintes tópicos matemáticos: números de Fibonacci; problema das quatro cores; fractais; razão áurea; retângulo de ouro; números imaginários; números complexos; números irracionais;

fórmula de Euler; Matemática e arquitetura; Matemática e arte islâmica; Matemática e música; barras de Napier; triângulo de Pascal; Trigonometria e polígonos regulares; sólidos de Platão; simetria em diversas culturas; transformações geométricas no plano; desenvolvimento das ideias sobre funções; entre outros.

Ao se apoiar nas concepções do uso da história da Matemática em sala de aula, você deve adotar uma postura de escuta reflexiva e conduzir as discussões a partir dos questionamentos que os estudantes farão sobre as informações e histórias às quais terão acesso. É importante fomentar discussões sobre os diferentes contextos nos quais os conceitos surgirem e levantar os possíveis saberes que os estudantes trazem sobre eles. O uso de literatura pode ser um caminho bastante interessante para isso.

No exemplo apresentado, é dado um breve histórico de como foram inseridas, na sociedade brasileira, as relações do sistema métrico de medidas e toda dificuldade da época. As questões de interpretação do texto culminam com o apontamento das diferentes maneiras de expressar medidas em outras culturas, como Estados Unidos, por exemplo (unidades jarda, pé e milha), e em quais contextos culturais os estudantes já se depararam com tais unidades. A jarda, por exemplo, é comum no contexto dos jogos da *National Football League* (NFL, a liga de futebol americano), algo em voga com os jovens. Outras unidades comentadas são perceptíveis em jogos eletrônicos.

Reprodução de seção *Na História*, páginas 287 e 288, volume 6 do Livro do Estudante.

O trabalho com essa seção mobiliza com mais ênfase a **CG01** e a **CEMAT01** ao promover a valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos para compreender a realidade, assim como o reconhecimento da Matemática como uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos.

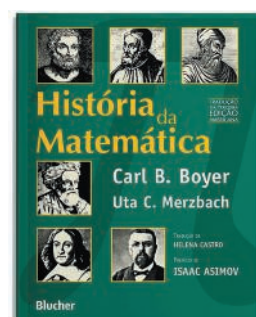
Proposta para o professor

O livro indicado a seguir é o primeiro escrito por uma mulher brasileira sobre a História da Matemática. A linguagem é acessível e apresenta diversas reflexões sobre conceitos já arraigados que podem e devem ser questionados. É interessante destacar alguns trechos ou histórias para promover um debate com os estudantes.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. São Paulo: Zahar, 2012.

Reprodução/Zahar

Indicamos a seguir outra sugestão a respeito da História da Matemática que serve de referência para estudos e consultas. A obra traz a história dos conceitos, biografias de diferentes matemáticos e contribuições das principais civilizações para a criação da Matemática como concebida atualmente.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

Reprodução/Blucher

Sugerimos, ainda, o livro do pesquisador grego Georges Ifrah, que faz um "passeio" pela História da Matemática, acompanhando a evolução do raciocínio de nossos ancestrais desde a Pré-História, passando por civilizações como a dos egípcios, babilônios, fenícios, gregos, romanos, hebreus, maias, chineses, hindus e árabes.

IFRAH, Georges. *Os números*: a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1992.

Há mais de duas décadas, o termo Etnomatemática saiu dos meios acadêmicos e adentrou os documentos oficiais, currículos, programas de ensino e materiais didáticos das escolas. O célebre professor Ubiratan D'Ambrosio (1932-2021) foi o precursor e principal cientista brasileiro a se dedicar ao tema. Em razão de suas ideias e produções acadêmicas, que contemplam todos os níveis de ensino da Matemática, ele tornou-se um profissional reconhecido, respeitado e referenciado mundialmente.

Reprodução/Antonio Scarpinetti/SEC/Unicamp

Ubiratan D'Ambrosio.
Foto de 2007.

Na obra *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*, o professor Ubiratan esclarece como nasceu a palavra Etnomatemática:

> Para compor a palavra Etnomatemática utilizei as raízes *tica*, *matema* e *etno* para significar que há várias maneiras, técnicas, habilidades (*ticas*) de explicar, de entender, de lidar e de conviver com (*matema*) distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (*etnos*). (D'AMBROSIO, 2011, p. 70)

Nessa mesma obra, ele define o conceito: Etnomatemática é a Matemática praticada por grupos culturais, como comunidades urbanas e comunidades rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma faixa etária específica, sociedades indígenas e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns.

A Etnomatemática tem o objetivo de preservar e estudar as particularidades de cada indivíduo e as culturas e os conhecimentos matemáticos adquiridos, pois compreende que o ser humano se desenvolve continuamente e, por isso, ressignifica as técnicas e adota novas, compondo a própria maneira de explicar a realidade. Tais conhecimentos são transmitidos pela interação e a comunicação em ambientes distintos, nos quais os sujeitos circulam, incluindo a escola, o trabalho, a comunidade ou o bairro em que residem, entre outros.

É importante lembrar que, assim como a História da Matemática, a Etnomatemática se apoia nos contextos culturais, mas não apenas neles: também envolve a localização temporal e o espaço no qual o indivíduo circula.

Apoiar-se nos pressupostos da Etnomatemática é um caminho promissor para trabalhar com o contexto dos estudantes, pois considera e valoriza os saberes que trazem, constituídos pelas vivências deles. Há várias possibilidades de mobilizar tais saberes ao longo das aulas de Matemática, por exemplo: ao discutir o orçamento doméstico de uma família, é possível identificar práticas culturais para lidar com o consumo e com o alimento.

No exemplo a seguir, do volume 9 da coleção, os estudantes são levados a entender o conceito de inflação e de que maneira ela pode afetar as relações de consumo. Além disso, são convidados a compartilhar, em grupos, informações de como driblar a alta dos preços usando um material de divulgação – o que potencializa o processo de aprendizagem e o espírito de cooperação entre pares.

Reprodução da seção *Educação financeira*, página 100, volume 8 do Livro do Estudante.

Outra proposta interessante é, ao trabalhar em comunidades rurais, suscitar discussões sobre como se faz a medição de terras e das respectivas áreas. Mobilizar saberes matemáticos não escolares dos estudantes é uma ótima solução para o aprofundamento de temas, pois incentiva e instiga o interesse deles pela Matemática.

Proposta para o professor

No *site* Mentalidades Matemáticas é possível saber mais sobre a Etnomatemática na visão de D'Ambrosio:

AS LIÇÕES DE UBIRATAN D'AMBROSIO. *Mentalidades Matemáticas.* Cotia, 17 maio 2021. Disponível em: https://mentalidadesmatematicas.org.br/as-eternas-licoes-de-ubiratan-dambrosio/.

Sugerimos também o vídeo no qual o professor descreve como as bases da Etnomatemática foram sendo estruturadas:

UBIRATAN D'AMBROSIO: ETNOMATEMÁTICA. São Paulo, 1 jun. 2020. 1 vídeo (12 min 10 s). Publicado pelo canal History of Science. Disponível em: https://youtu.be/kUCNDK7DeKs. Acesso em: 3 jun. 2022.

Avaliações em Matemática

Conceituamos avaliação não como uma etapa isolada, mas como parte do processo educativo, no qual você, professor, os estudantes, outros profissionais da escola e os pais ou responsáveis legais dos estudantes participem ativamente.

Uma das possibilidades que podem contemplar esse conglomerado de sujeitos no processo avaliativo é adotar práticas que realmente incluam a todos na dinâmica, ofertando, por exemplo, autoavaliações, avaliações realizadas pelos estudantes sobre a instituição de ensino, organização da turma em grupos de conversa com responsáveis sobre questões relacionadas à aprendizagem direta e indireta, entre outras. Nesse tipo de processo avaliativo, os estudantes podem assumir um compromisso maior com a própria aprendizagem – como preza a educação integral – e compreender que não basta apenas a obtenção de notas, conceitos ou média para aprovação. Com sua mediação, eles devem entender que são partes ativas do processo e devem refletir sobre os avanços individuais ou a necessidade de aprofundamento nos estudos. Com essa perspectiva, as avaliações podem constituir instrumentos de diagnóstico e de acompanhamento contínuo do processo educativo.

Os vários tipos de avaliações fornecem dados sobre o desempenho dos estudantes. Cada um deles tem características e objetivos pedagógicos distintos, por isso é importante conhecer e aplicar o tipo adequado de avaliação em cada momento do processo educacional. Citaremos aqui alguns exemplos para que você os utilize em momento oportuno: **avaliação diagnóstica**, **avaliação de processo** ou **avaliação formativa**, **avaliação comparativa** e **avaliação somativa**.

Cabe destacar também que as avaliações devem servir de diagnóstico e acompanhamento contínuo do processo de ensino e aprendizagem, para o levantamento de pontos de orientação que deem continuidade ao trabalho escolar e incentivem o aprimoramento dos conhecimentos.

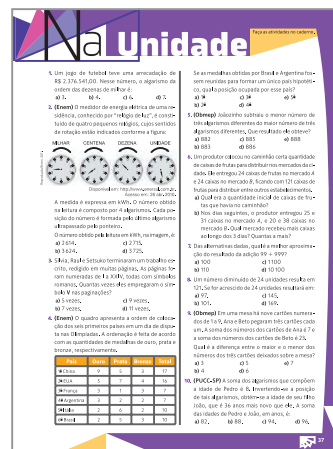
É preciso considerar que a pandemia de covid-19 obrigou os professores a buscar novos caminhos para promover a avaliação dos conteúdos que foram ensinados durante o ensino remoto, cujos reflexos continuam repercutindo mesmo em um contexto pós-pandêmico. As maneiras de ensinar e demonstrar a aquisição de conhecimento mudaram, portanto, os meios de avaliar também sofreram adaptações condizentes com essa nova realidade.

Nesse contexto, o processo avaliativo deve ser considerado fonte de informações e de reflexão para o professor e o estudante, que devem juntos trilhar caminhos para a reorganização da prática e de posturas frente ao processo de ensino e aprendizagem. As avaliações devem ser conhecidas pelo estudante que foi avaliado, assim como os resultados do que alcançou, contribuindo para que sejam um instrumento de medição da evolução no processo de aquisição de conhecimentos.

É importante compreendermos que o processo de avaliação não é um ato persecutório aos educadores, mas indicador e balizador de atitudes para possíveis mudanças e ressignificações de práticas de aprendizagem na escola e, mais especificamente, na sala de aula de Matemática. Quando implantamos um ambiente de reflexão, conseguimos atingir um planejamento colaborativo, desenvolver a capacidade de aceitar críticas e reordenar o processo, quando for o caso, e, com base nas avaliações, tomar decisões mais acertadas juntos e em prol da comunidade escolar.

Independentemente do tipo de avaliação escolhido, ele deve servir como instrumento de redimensionamento do trabalho desenvolvido. Registre suas observações nos trabalhos, nas provas e atividades dos estudantes para auxiliá-los a perceber por que ainda não alcançaram os objetivos de aprendizagem para o tema tratado e, se já o atingiram, faça um comentário como incentivo.

De acordo com os resultados das avaliações e após as reflexões acerca das metodologias usadas em sala de aula, é possível construir e planejar os caminhos para a recuperação de conteúdos com eficácia real. É também necessário identificar o que precisa ser mudado dali em diante, para favorecer o cumprimento dos objetivos previstos e assumidos pelo coletivo da escola.

Nesta coleção, como citamos, a seção *Na Unidade* traz atividades sobre os principais conteúdos abordados na Unidade e podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Sugerimos que os estudantes resolvam as atividades individualmente e você os acompanhe durante a execução registrando avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades de remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso. Nas *Orientações didáticas* deste Manual, apresentamos direcionamentos para o trabalho com as atividades da seção, com algumas sugestões de remediação. No entanto, podem surgir outras dificuldades diferentes das listadas nessas orientações, por isso é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Reprodução de seção *Na Unidade*, página 37, volume 6 do Livro do Estudante.

Avaliação diagnóstica

Na avaliação diagnóstica, busca-se identificar os conhecimentos prévios dos estudantes e verificar as habilidades ou dificuldades de aprendizagem.

Sugerimos que esse tipo de avaliação seja realizado no início do ano letivo e ao iniciar o trabalho com determinado conteúdo. O objetivo é conhecer melhor os estudantes para identificar e compreender suas necessidades e adaptar as aulas de acordo com a realidade da turma.

Os boxes *Participe* desta coleção podem, de modo geral, ser utilizados como instrumento de avaliação diagnóstica. Além disso, você pode propor aos estudantes que façam testes escritos ou orais, simulados, elaborem pequenos trabalhos ou respondam a um questionário.

Avaliação de processo ou formativa

Na avaliação de processo, o objetivo é averiguar o progresso e as dificuldades de aprendizagem dos estudantes em determinado período. Nesse tipo de avaliação, visa-se aferir o desempenho escolar ao longo do processo de ensino-aprendizagem em um prazo definido, de maneira contínua e sistemática.

Esse modelo pretende acompanhar a evolução da aquisição de conhecimento dos estudantes e dispensa a atribuição de notas. Ele permite que você avalie o desempenho individual dos estudantes e adéque sua prática docente às necessidade de cada educando.

O foco desse tipo de avaliação é a formação; pretende-se verificar se os estudantes alcançaram os objetivos pedagógicos, desenvolveram as competências e habilidades pretendidas. Sugerimos o uso de recursos como produções diversas, atividades em sala de aula, autoavaliação, elaborações audiovisuais, estudos de caso, entre outras.

Avaliação comparativa

Na avaliação comparativa, objetiva-se qualificar o ensino e constituir uma oportunidade de reflexão acerca do que foi aprendido e do que precisa ser ensinado. Sugerimos usar trabalhos simples durante ou ao término das aulas, elaboração de resumos, observação de desempenho, atividades para casa, autoavaliação e avaliação entre pares.

Aqui destaca-se o papel da autoavaliação, que deve ser feita por ambos os envolvidos na aprendizagem em sala de aula: o professor e o estudante. Por meio dela, você é levado a refletir sobre sua prática, reformulá-la e buscar formação específica para melhorá-la visando cada realidade escolar coletiva e particular.

Avaliação somativa

A avaliação somativa, em geral, é aplicada no final de um processo educacional – definido como ano, semestre, trimestre, bimestre ou ciclo. A principal característica no processo de aprendizagem é a assimilação dos conteúdos pelos estudantes pela associação com notas ou conceitos, e tem caráter classificatório. Nesse tipo de avaliação, em geral, utilizam-se exames avaliativos, de múltipla escolha ou dissertativos.

Enfatizamos que as avaliações escolares devem acontecer de maneira contínua e fazer parte de um ciclo avaliativo. Os resultados são essenciais para fundamentar decisões e possibilitar a atuação estratégica dos educadores. O objetivo principal de um ciclo avaliativo não deve ser a classificação, mas a possibilidade de replanejamento e a proposição de uso de novos recursos para transmitir o conteúdo aos estudantes com base em outras abordagens metodológicas de transmissão de conhecimentos.

Avaliações externas

As **avaliações externas de desempenho**, também conhecidas como **avaliações em larga escala**, visam aferir a qualidade do ensino e servem como instrumento de monitoramento e para elaboração de políticas públicas.

No Ensino Fundamental temos o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), que é um conjunto de avaliações externas em larga escala com o qual o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) elabora um diagnóstico da Educação Básica brasileira e de fatores que podem interferir no desempenho do estudante.

> Por meio de testes e questionários, aplicados a cada dois anos na rede pública e em uma amostra da rede privada, o Saeb reflete os níveis de aprendizagem demonstrados pelos estudantes avaliados, explicando esses resultados a partir de uma série de informações contextuais.
>
> O Saeb permite que as escolas e as redes municipais e estaduais de ensino avaliem a qualidade da educação oferecida aos estudantes. O resultado da avaliação é um indicativo da qualidade do ensino brasileiro e oferece subsídios para a elaboração, o monitoramento e o aprimoramento de políticas educacionais com base em evidências.
>
> As médias de desempenho dos estudantes, apuradas no Saeb, juntamente com as taxas de aprovação, reprovação e abandono, apuradas no Censo Escolar, compõem o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb).
>
> Realizado desde 1990, o Saeb passou por uma série de aprimoramentos teórico-metodológicos ao longo das edições. A edição de 2019 marca o início de um período de transição entre as matrizes de referência utilizadas desde 2001 e as novas matrizes elaboradas em conformidade com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

BRASIL. Ministério da Educação. *Sistema de Avaliação da Educação Básica* (Saeb). Brasília, DF: Inep, [20--]. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb. Acesso em: 13 jun. 2022.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) tradução de *Programme for International Student Assessment*, é um estudo comparativo internacional realizado a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). O Pisa para Escolas é específico para estudantes de 15 anos e 3 meses a 16 anos e 2 meses, independentemente do ano escolar em que estejam, desde que matriculados a partir do 7º ano do Ensino Fundamental. Nos países mais desenvolvidos, em que não há repetência ou ela é apenas residual, os estudantes elegíveis para o Pisa para Escolas devem estar cursando o equivalente no Brasil ao início do Ensino Médio.

> Os resultados do Pisa permitem que cada país avalie os conhecimentos e as habilidades de seus estudantes em comparação com os de outros países, aprenda com as políticas e práticas aplicadas em outros lugares e formule suas políticas e programas educacionais visando à melhora da qualidade e da equidade dos resultados de aprendizagem.
>
> O Inep é o órgão responsável pelo planejamento e a operacionalização da avaliação no país, o que envolve representar o Brasil perante a OCDE, coordenar a tradução dos instrumentos de avaliação, coordenar a aplicação desses instrumentos nas escolas amostradas e a coleta das respostas dos participantes, coordenar a codificação dessas respostas, analisar os resultados e elaborar o relatório nacional.
>
> O Pisa avalia três domínios – leitura, matemática e ciências – em todas as edições ou ciclos. A cada edição é avaliado um domínio principal, o que significa que os estudantes respondem a um maior número de itens no teste dessa área do conhecimento e que os questionários se concentram na coleta de informações relacionadas à aprendizagem nesse domínio. A pesquisa também avalia domínios chamados inovadores, como resolução de problemas, letramento financeiro e competência global.
>
> Desde sua primeira edição, em 2000, o número de países e economias participantes tem aumentado a cada ciclo. Em 2018, 79 países participaram do Pisa, sendo 37 deles membros da OCDE e 42 países/economias parceiras. O Brasil participa do Pisa desde o início da pesquisa.
>
> BRASIL. Ministério da Educação. *Programa Internacional de Avaliação de Estudantes* (Pisa). Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa. Acesso em: 13 jun. 2022.

Formação continuada

O professor de Matemática precisa estar sempre em busca de aprimorar o que sabe sobre essa ciência e área do conhecimento, além de obter informações sobre os mecanismos de aprendizagem. Para coordenar um curso de Matemática é preciso conhecer não apenas o programa curricular, mas de informações sobre a história das descobertas matemáticas, curiosidades, leituras recomendadas, brincadeiras e jogos lógico-matemáticos, bons livros paradidáticos para incentivar o interesse, etc. Pensando nisso, tomamos a liberdade de sugerir livros, revistas e *sites* que podem contribuir para o aprimoramento da formação dos colegas que trabalham como professores de Matemática no Ensino Fundamental. (Todos os *sites* foram acessados em 3 jun. 2022.).

Aprofundamento em Matemática

1. *Coleção Matemática: aprendendo e ensinando*, de vários autores (São Paulo: Atual/Mir, 1995).

Essa coleção é composta de traduções de uma coleção russa publicada pela editora Mir e complementada por obras de autores nacionais. Cada volume aborda um tema de Matemática, em linguagem acessível. Os volumes a seguir podem ser úteis para a formação voltada ao Ensino Fundamental: *Sistemas de numeração*; *A demonstração em Geometria*; *Curvas notáveis*; *Figuras equivalentes e equicompostas*; *Método de indução matemática*; *Erros nas demonstrações geométricas*; *Equações algébricas de grau qualquer*; *Atividades em Geometria*; *Construindo gráficos*.

2. *A Matemática do Ensino Médio*, v. 1, de Elon Lages Lima e outros (Rio de Janeiro: SBM, 2016).

Essa obra apresenta noções de conjuntos, um estudo das diferentes categorias numéricas e a ideia geral das funções.

3. *Estatística básica*, de Wilton de O. Bussab e Pedro A. Morettin (São Paulo: Saraiva, 2017).

A obra aborda a análise de dados unidimensionais e bidimensionais, com atenção especial para métodos gráficos, conceitos básicos de Probabilidade e variáveis aleatórias, tópicos principais da interferência estatística, além de alguns temas especiais, como regressão linear simples.

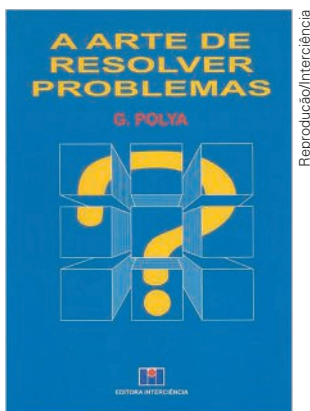
4. *Probabilidade e Estatística*, v. 1, de William Mendenhall (Rio de Janeiro: Campus, 1985).

No capítulo 1, o autor procura identificar a natureza da Estatística, os objetivos e o modo que exerce importante função nas ciências, na indústria e particularmente em nossa vida diária. Os exercícios são classificados por assunto: meio ambiente, engenharia/tecnologia, economia/negócios, política, agricultura, educação, etc.

Ensino-aprendizagem em Matemática

1. *A arte de resolver problemas*, de George Polya (Rio de Janeiro: Interciência, 1978).

Analisa métodos criativos de resolução de problemas, revela as quatro etapas básicas para solução de qualquer problema e sugere modos de trabalhar os problemas em sala de aula.

Reprodução/Interciência

2. *Didática da resolução de problemas de Matemática*, de Luiz Roberto Dante (São Paulo: Ática, 1999).

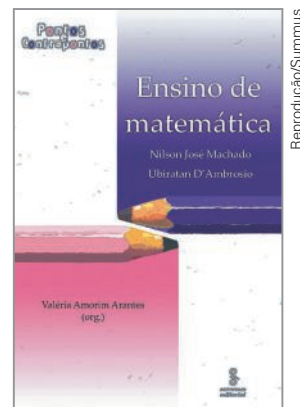
A obra mostra os objetivos da resolução de problemas, os vários tipos de problemas, as etapas da resolução e o encaminhamento da solução de um problema em sala de aula. Sugere, ainda, maneiras de propor enunciados e como conduzir os problemas em sala de aula. Os exemplos têm em vista especialmente o Ensino Fundamental.

3. *Anuários do Conselho Nacional de Professores de Matemática dos EUA*, NCTM (São Paulo: Atual, 1995).

A coleção é formada por traduções de livros-anuários do Conselho Nacional de Professores de Matemática (a sigla em inglês é NCTM) dos Estados Unidos. Cada livro aborda um tema sob a ótica do ensino-aprendizagem da Matemática, à luz da experiência de professores estadunidenses. Sugerimos os seguintes volumes para o aprofundamento dos estudos dedicados à prática no Ensino Fundamental: *Aprendendo e ensinando Geometria*; *Aplicações da Matemática escolar*; *As ideias da Álgebra*; *A resolução de problemas na Matemática escolar*.

4. *Ensino de Matemática: pontos e contrapontos*, de Nílson José Machado, Ubiratan D'Ambrosio e Valéria Amorim Arantes (org.) (São Paulo: Summus, 2014).

Nesse livro, os autores tratam de diferentes aspectos do ensino da Matemática e analisam questões históricas, epistemológicas, sociais e políticas.

Reprodução/Summus

5. *O raciocínio na criança*, de Jean Piaget (São Paulo: Record, 1967).

Piaget – importante pensador do século XX e defensor da abordagem interdisciplinar para a investigação epistemológica – discorre sobre o desenvolvimento do raciocínio na criança a partir da lógica. Mostra também como o raciocínio da criança, a princípio egocêntrico, à medida que a socialização se instaura, vai, de etapa em etapa, adquirindo a lógica do pensamento adulto.

6. *As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática*, de Zoltán Pál Dienes (São Paulo: EPU, 1986).

Nessa obra, o autor descreve estudos detalhados sobre as etapas de aprendizagem das crianças ao longo do desenvolvimento cognitivo. É uma obra interessante para o professor que deseja compreender o que o célebre cientista conceitua sobre a aquisição da aprendizagem.

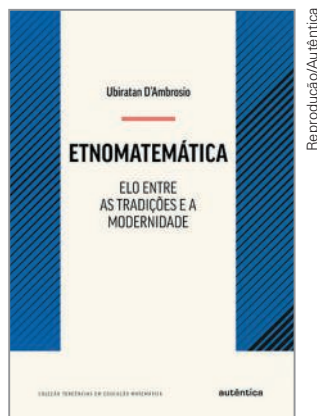
7. *Da realidade à ação*: reflexões sobre educação e Matemática, de Ubiratan D'Ambrosio (São Paulo: Summus, 1986).

Nesse importante livro da Educação Matemática, Ubiratan D'Ambrosio chama a atenção dos leitores para a importância da educação e da Matemática como modos de emancipação e de crítica social.

8. *Matemática e língua materna*, de Nilson José Machado (São Paulo: Cortez, 2011).

O professor Nilson conduz o leitor por um importante caminho: o de interligar as relações da língua materna com a aprendizagem da Matemática. Discorre sobre a importância da leitura e da literatura nas aulas de Matemática como método para ampliação dos conceitos pelos estudantes que estão em processo de formação da competência leitora.

9. *Etnomatemática* – Elo entre as tradições e a modernidade, de Ubiratan D'Ambrosio (Belo Horizonte: Autêntica, 2016), Coleção Tendências em Educação Matemática.

Livro clássico da Educação Matemática, no qual o professor Ubiratan apresenta as ideias centrais da Etnomatemática.

10. *Na vida dez*, *na escola zero*, de David Carraher e outros (São Paulo: Cortez, 2011).

Livro que é referencial teórico com diversos estudos e pesquisas que abordam o uso de práticas não escolares para a formação e a compreensão de conteúdos matemáticos.

11. *O que a Matemática tem a ver com isso? Como professores e pais podem transformar a aprendizagem da Matemática e inspirar sucesso*, de Jô Boaler (Porto Alegre: Penso, 2019).

Apresenta reflexões atuais e incentiva a escola e os pais a oferecerem práticas desafiadoras e atividades realmente interessantes aos jovens para que aprendam Matemática de maneira curiosa e real.

12. *Por que e para que aprender Matemática?* de Veleida Anahí da Silva (São Paulo, Cortez, 2009).

Essa obra contribui para estudos sobre o olhar atribuído socialmente à Matemática e como esse fato está relacionado ao sucesso ou fracasso na aprendizagem dessa ciência.

13. *Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*, de John A. Van de Walle (Porto Alegre: Artmed, 2009).

Manual descritivo e detalhado com diversas atividades para serem aplicadas no Ensino Fundamental. Traz reflexões e discussões de conceitos para o professor de Matemática.

Revistas e *sites*

Revistas

1. *Revista do Professor de Matemática* (São Paulo: SBM).

Revista quadrimestral com artigos variados e interessantes para o professor de Matemática. São abordados temas controversos, problemas desafiadores, comentários sobre livros, questões de olimpíadas, experiências pedagógicas inovadoras, etc. Para mais informações sobre a publicação, acesse: http://rpm.org.br.

2. *Nova Escola* (São Paulo: Associação Nova Escola).

A revista é destinada a professores e gestores e aborda temas como gestão da sala de aula, mudanças de políticas educacionais e muitos outros. Encontra-se disponível nas formas impressa e digital. Para mais informações, acesse: https://novaescola.org.br.

3. *Educação Matemática em Revista* (São Paulo: Sbem).

Periódico semestral que apresenta temas de interesse dos professores de Matemática. Informações sobre a revista podem ser encontradas em: www.sbembrasil.org.br.

Sites

1. www.bussolaescolar.com.br

Com *links* para todas as disciplinas escolares, traz uma seção de jogos variados. Clicando em "Matemática", há temas classificados em Ensino Fundamental, Ensino Médio, Geometria e História da Matemática.

2. www.cabri.com (em inglês)

Cabri-geometre é um *software* educacional desenvolvido especialmente para o ensino de Geometria. No *site* é possível encontrar versões demo para baixar e testar, além dos manuais para utilização.

3. www.geogebra.org (em inglês)

Disponibiliza o *software* GeoGebra, especialmente desenvolvido para o ensino de Álgebra e Geometria.

4. www.gregosetroianos.mat.br

Apresenta informações matemáticas diversificadas em linguagem acessível com gráficos animados, artigos, exercícios resolvidos e uma seção sobre erros mais comuns em Matemática.

5. www.matematica.br

Desenvolvido por professores do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), o *site* traz informações classificadas por temas matemáticos, informações históricas e indicações de programas e cursos.

6. www.obm.org.br

Traz todas as provas realizadas nas edições da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), com os exercícios resolvidos.

7. www.obmep.org.br

Você encontra todas as provas das edições da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), com as questões resolvidas. Além disso, publica bancos de atividades com questões aplicadas em olimpíadas nacionais e internacionais.

8. www.somatematica.com.br

Portal com dicas, curiosidades e material de apoio, incluindo jogos, indicações de livros, DVDs e outros materiais. Conta com uma comunidade virtual, um fórum e um espaço para contato entre professores e estudantes.

9. www2.mat.ufrgs.br/edumatec

Além de artigos e orientações sobre o uso de tecnologias, o *site* disponibiliza *softwares* especialmente desenvolvidos para o ensino de Matemática.

10. https://mentalidadesmatematicas.org.br/

O Mentalidades Matemáticas é uma cocriação do Instituto Sidarta e do Centro de Pesquisas YouCubed, da Universidade de Stanford, cujo objetivo é discorrer sobre os desafios atuais de equidade e letramento matemático.

Uso de tecnologias no ensino

Livros

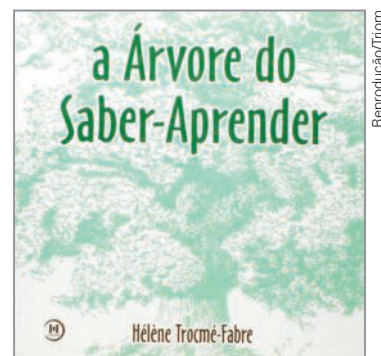
1. *Escritos sobre tecnologia educacional e educação profissional*, de Jarbas Novelino Barato (São Paulo: Senac, 2002).

O autor analisa questões que considera fundamentais da educação atual, como o uso do computador nos espaços educacionais, a sociedade do conhecimento, os novos meios de comunicação, a natureza do saber técnico, o ensino de técnicas e competências no âmbito da educação profissional e a avaliação do "saber fazer" dos trabalhadores.

2. *A árvore do saber-aprender*, de Hélène Trocmé-Fabre (São Paulo: Triom, 2004).

Essa obra pode conduzir a uma reflexão filosófica sobre a modernidade por abordar questões vitais transdisciplinares. Apresenta uma história e uma modelização para a criação do conhecimento e de saberes.

a Árvore do Saber-Aprender

Hélène Trocmé-Fabre

Reprodução/Triom

3. *Integração das tecnologias na educação*, organizado por Maria Elizabeth Bianconcini Almeida e José Manuel Moran (Brasília, DF: Ministério da Educação/Seed, 2005; disponível em: http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/iniciaissf.pdf; acesso em: 21 jun. 2022).

Esse material, de acesso livre, é um fascículo com artigos sobre o uso das tecnologias na Educação Básica. Traz ainda discussões sobre o trabalho com projetos e o uso de mídias na escola.

4. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*, de José Manuel Moran, Marcos Tarciso Masetto e Marilda Aparecida Behrens (São Paulo: Papirus, 2017).

Os autores apresentam discussões importantes sobre o papel do professor no uso de tecnologias na educação, com a perspectiva de construir novas propostas.

Novas tecnologias e mediação pedagógica

21ª Edição revista e atualizada

José Manuel Moran
Marcos T. Masetto
Marilda Aparecida Behrens

Papirus

Reprodução/Papirus

5. *A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá*, de José Manuel Moran (São Paulo: Papirus, 2011).

A obra trata das mudanças que as tecnologias trazem para a educação presencial e à distância, em todos os níveis de ensino, abordando o papel de professores e gestores ao desempenhar ações nesse cenário de inovação.

6. *Redes de aprendizagem: um guia para ensino e aprendizagem on-line*, de Linda Harasim, Murray Turoff, Lucio Teles e Starr Roxanne Hiltz (São Paulo: Senac, 2005).

O livro discorre sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação mediadas por computador – correio eletrônico, *bulletin boards system*, sistemas de conferência por computador e a própria internet – e como podem ser utilizadas no Ensino Fundamental, no Ensino Médio, na universidade e na educação de adultos.

Sites

1. http://portaldoprofessor.mec.gov.br

Disponibiliza recursos como vídeos, imagens e animações para auxiliar o professor em sala de aula.

2. http://tecedu.pro.br/

Revista eletrônica semestral com artigos e relatos de professores sobre o uso de tecnologias na aula.

3. http://webeduc.mec.gov.br/codigo_aberto

Oferece *softwares* para uso gratuito em diversas disciplinas como ferramenta de apoio ao processo de ensino e aprendizagem.

4. http://www2.eca.usp.br/moran/

Disponibiliza textos sobre educação e tecnologias aplicadas ao contexto educacional.

5. https://aedmoodle.ufpa.br/pluginfile.php/292702/mod_resource/content/1/Manual%20de%20Ferramentas%20Web%2020%20p%C2%AA%20Profs.pdf

Esse manual, disponível no *site* do Ministério da Educação de Portugal, apresenta explicações sobre ferramentas disponíveis na web 2.0 e orientações de como utilizá-las no contexto educacional.

6. https://www.youcubed.org/pt-br/

A plataforma YouCubed disponibiliza atividades, jogos, aplicativos e videoaulas que podem ser acessados *on-line* e gratuitamente. Foi criada pelo grupo de pesquisa da pesquisadora Jô Boaler, da Universidade de Stanford.

7. TV Escola. Oficina de produção de vídeos. *TV Escola*. Disponível em: https://midiasstoragesec.blob.core.windows.net/001/2017/02/dicas_producao_videos.pdf.

O material, em formato de oficina, tem o objetivo de motivar estudantes e professores a produzir vídeos.

Referências bibliográficas comentadas

ALMEIDA, Lourdes M. W.; DIAS, Michele R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, Rio Claro, v. 17, n. 22, p. 19-35, 2004. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10529. Acesso em: 3 jun. 2022.

> O trabalho aborda a modelagem matemática – conceito explanado neste Manual e desenvolvido na coleção – como alternativa pedagógica em cursos regulares. Descreve, em particular, uma atividade de modelagem matemática cujo problema investigado é o crescimento de uma colônia de formigas.

BAGNO, Marcos. *Pesquisa na escola*: o que é, como se faz. São Paulo: Edições Loyola, 2007.

> Por meio de uma abordagem reflexiva que inspirou o trabalho com o tema nesta coleção, o autor apresenta sugestões para prática de pesquisa em sala de aula como fonte de aquisição de conhecimento.

BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2000.

> Nesse livro, a modelagem matemática é levada para o dia a dia da sala de aula, com apresentação de várias possibilidades de trabalho que podem ser aplicadas com apoio dos volumes desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*: versão final. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. As concepções desta coleção, dissertadas neste Manual, estão fundamentadas nas premissas desse documento, assim como as propostas de distribuição de competências, habilidades e objetos de conhecimento ao longo dos volumes.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Documento que explica o contexto histórico e os pressupostos pedagógicos utilizados na construção dos Temas Contemporâneos Transversais. Mostra que a proposição de trabalho com eles visa ao desenvolvimento de uma educação voltada para a cidadania, como explanado neste Manual e praticado nas propostas apresentadas nos volumes da coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: Proposta de Práticas de Implementação. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Documento que traz os TCTs e explicita a ligação deles com os diferentes componentes curriculares, conforme preconizado pela BNCC e presente nas propostas desta coleção.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

> O livro analisa o papel da Matemática na cultura ocidental e a noção de que Matemática é apenas uma maneira da Etno-Matemática. O autor faz um apanhado de diversos trabalhos dessa área, já desenvolvidos no país e no exterior, que usamos como referência para a elaboração de propostas desta coleção.

DANTE, Luiz R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1989.

> O autor explora a elaboração e a resolução de problemas em sala de aula e apresenta objetivos a serem alcançados nesse trabalho, conforme referenciado neste Manual.

DEMO, Pedro. *Educar pela pesquisa*. 4. ed. Campinas: Autores Associados, 2000.

> O artigo traz reflexões acerca das características necessárias para os professores no mundo contemporâneo e que foram consideradas na elaboração deste Manual.

DISTRITO FEDERAL. Secretaria de Estado de Educação. *Convivência escolar e Cultura de Paz*. Brasília, DF, 2020. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Caderno orientador elaborado pela Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal cujo objetivo é mostrar ações para a materialização da Cultura de Paz e conscientização, prevenção e combate a todos os tipos de violência no ambiente escolar. Esse documento foi referencial para concepções explanadas neste Manual a respeito desse importante e urgente tema.

KATO, Mary A. *O aprendizado da leitura*. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

A obra faz um apanhado de como ocorrem os mecanismos para o aprendizado da leitura. As reflexões, que foram referência para concepções desta coleção, revelam as preocupações centrais da autora sobre a leitura, seus processos e sua aquisição.

KLEIMAN, Angela B. Modelos de letramento e as práticas de alfabetização na escola. *In*: KLEIMAN, Angela B. (org.). *Os significados do letramento*: uma nova perspectiva sobre a prática social da escrita. Campinas: Mercado de Letras, 1995.

O objetivo dessa obra é informar fatos e mitos sobre o letramento. Os trabalhos apresentados, resultado de pesquisas realizadas no Brasil, percorrem diversas concepções do fenômeno do letramento e serviram de referência para a elaboração desta coleção.

KOVALSKI, Larissa. *O pensamento analógico na Matemática e suas implicações na modelagem matemática para o ensino*. 2016. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/56193/R%20-%20D%20-%20LARISSA%20KOVALSKI.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 3 jun. 2022.

Esse trabalho insere-se na área de modelagem da Educação Matemática, voltado para a formação conceitual dos professores da disciplina. É uma pesquisa teórica de caráter qualitativo que foi referência para concepções pedagógicas desta coleção. Entendemos ser necessário, para a formação de um professor de Matemática, não apenas o desenvolvimento da parte lógica do pensamento matemático, ligada principalmente a demonstrações e utilização de técnicas dedutivas, mas o estudo dos modos de pensar e conceber a Matemática relacionados a outros tipos de raciocínio argumentativo, como indução, abdução e analogia.

KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. (org.) *A resolução de problemas na Matemática escolar*. Trad. de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1998.

Coletânea de 22 artigos do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) elaborados por especialistas em Educação Matemática. Com foco na resolução de problemas, há diversas orientações para ajudar professores tanto na sala de aula quanto na preparação de atividades adequadas aos estudantes do Ensino Fundamental. Foi uma fonte de consulta usada na elaboração de problemas desta coleção.

LASCANE, Mariana M.; HOMSY, Nathalia P. B.; MONTEIRO, Ana Fátima B. Construção do raciocínio lógico matemático. *Unisanta Humanitas*, Santos, v. 8, n. 2, p. 117-127, 2019. Disponível em: https://periodicos.unisanta.br/index.php/hum/article/view/2243. Acesso em: 3 jun. 2022.

A proposta desse trabalho é abordar a construção do raciocínio lógico e as maneiras de trabalhá-lo em sala de aula, e ele serviu de referencial para conceitos e propostas deste Manual.

LORENZATO, Sergio. *Para aprender Matemática*. Campinas: Autores Associados, 2008.

O livro é voltado tanto aos professores de Matemática como aos cursos de formação de professores para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio de outras disciplinas. Aborda 25 princípios educacionais cuja aplicação favorece o ensino de qualidade. Apresenta diversos exemplos de situações reais, atividades já testadas em sala de aula e materiais didáticos facilmente reproduzíveis por estudantes e docentes.

MAGALHÃES, Ana Paula de A. S. *et al. A investigação matemática como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática. In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. *Anais* [...]. São Paulo: SBEM, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4873_3348_ID.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

O artigo mostra a investigação matemática como estratégia de ensino para o desenvolvimento do pensamento matemático criativo, concepção presente nesta coleção. Propõe sugestões de atividades investigativas e como elas podem ser exploradas em sala de aula na Educação Básica.

MARCONI, Marina de A.; LAKATOS, Eva M. *Fundamentos de metodologia científica*. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2021.

A obra traz conteúdos objetivos para auxiliar o desenvolvimento de trabalhos científicos, apresentando procedimentos e variados exemplos que foram consultados na elaboração das propostas desta coleção.

MATTOS, Pablo. *Empatia e cooperação*: competência geral 9 da BNCC. 2020. [Rio de Janeiro]: Futura, 2020. (Curso *on-line*). Disponível em: https://www.futura.org.br/cursos/empatia-e-cooperacao-competencia-geral-9-da-bncc. Acesso em: 3 jun. 2022.

Curso *on-line*, gratuito, para conhecer mais profundamente a competência geral 9 da BNCC e como tal competência deve cumprir seu papel de indução curricular. Traz ainda elementos que podem ser usados no desenvolvimento, planejamento e implementação de práticas pedagógicas úteis ao desenvolvimento da competência geral 9.

MENDES, Iran A.; Chaquiam, Miguel. *História nas aulas de Matemática*: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

O livro propõe uma maneira de abordar a Matemática da Educação Básica pelo desenvolvimento histórico das ideias matemáticas em sala de aula, o que vai ao encontro da linha pedagógica de algumas seções desta coleção.

MILANI, Débora R. da C. Culturas juvenis, tecnologias da informação e comunicação e contemporaneidade. *Revista Labor*, v. 1, n. 11, p. 123-124, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/23452/1/2014_art_drcmilani.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

O artigo analisa a contemporaneidade e possíveis impasses diante das culturas juvenis e considera, sobretudo, o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação.

MORAN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, Carlos Alberto; MORALES, Ofelia Elisa Torres (org.). *Convergências midiáticas, educação e cidadania*: aproximações jovens. v. II. (Coleção Mídias Contemporâneas). Ponta Grossa: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. Disponível em: http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/mudando_moran.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Nesse texto, o autor explora o trabalho com metodologias ativas em diversos contextos, além de apresentar alguns modelos escolares inovadores.

NOVAES, Regina. Os jovens de hoje: contextos, diferenças e trajetórias. *In*: ALMEIDA, Maria Isabel M.; EUGENIO, Fernanda (org.). *Culturas jovens*: novos mapas do afeto. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2006.

> Na obra, retrata-se a multiplicidade dos jovens sem nenhum viés preconceituoso, o que também é um preceito defendido por esta coleção. O livro reúne artigos de cientistas sociais que se dedicam a entender os problemas enfrentados atualmente pelas juventudes urbanas no Brasil.

PAVANELO, Elisangela; LIMA, Renan. Sala de aula invertida: a análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I. *Bolema*, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 739-759, 2017. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/czkXrB369jBLfrHYGLV4sbb/abstract/?lang=pt. Acesso em: 3 jun. 2022.

> O artigo apresenta os resultados de uma experiência utilizando o conceito de sala de aula invertida em uma disciplina do Ensino Superior. Aponta as potencialidades, alguns problemas enfrentados e a opinião dos estudantes em relação à metodologia. Apesar de ser uma experiência com estudantes de Ensino Superior, traz importantes reflexões sobre os aspectos metodológicos que foram considerados na elaboração deste Manual e são úteis aos professores da Educação Básica.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

> O autor apresenta passos para resolução de problemas, além de outras reflexões sobre esse tema que serviram de referência para concepções desta coleção.

ROCK, Gislaine G. T.; SABIÃO, Roseline M. A importância da leitura e interpretação na Matemática. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, São Paulo, ano 3, v. 1, p. 63-84, 2018. Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/interpretacao-na-matematica. Acesso em: 3 jun. 2022.

> O artigo apresenta a importância da leitura e da interpretação na Matemática, tendo como ponto primordial a leitura.

SALA DE AULA INVERTIDA. [*S. l.*], [*s. n.*], 2018. 1 vídeo (2 min 10 s). Publicado pelo canal José Moran. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=fp2eItLz-8M. Acesso em: 3 jun. 2022.

> No vídeo, Moran apresenta uma proposta de trabalho com sala de aula invertida, tipo de metodologia ativa sugerido neste Manual.

SARAIVA, José A. B. Padrão tensivo dos argumentos indutivo, dedutivo e abdutivo. *Revista Estudos Semióticos*, São Paulo, v. 15, 2019. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/esse/article/view/153769/172404. Acesso em: 3 jun. 2022.

> O artigo apresenta e descreve três tipos básicos de argumentação (dedutivo, indutivo e abdutivo) que estão incluídos nas propostas didáticas desta coleção.

VINHAL, Maria de Lourdes. *O gênero tira e a argumentação*: uma relação produtiva. 2019. Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Federal de Uberlândia: Programa de Pós-graduação em Letras (PROFLETRAS), Uberlândia, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25355/3/G%C3%AAneroTiraArgumenta%C3%A7%C3%A3o.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Esse trabalho desenvolve e aplica uma proposta didática em que os estudantes são levados a usar a capacidade argumentativa, o que favorece o desenvolvimento da criticidade e da percepção consciente e participativa do contexto social, econômico e político em que vivem.

WING, Jeannette M. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Curitiba, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711/pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Trata-se da tradução do trabalho intitulado "Computational Thinking", da autora estadunidense Jeannette Wing, que foi referência para as concepções de pensamento computacional desta coleção.

Orientações específicas

Sugestões de cronogramas para o volume

Este volume é composto de 19 capítulos, organizados em 9 Unidades, abordando todas as habilidades da BNCC previstas para o 8º ano do Ensino Fundamental.

Para colaborar com o planejamento de seu trabalho ao utilizar este volume, apresentamos sugestões de distribuição dos conteúdos em cronogramas bimestral, trimestral e semestral. No entanto, você pode organizar conteúdos, capítulos e Unidades seguindo critérios de seleção dos temas de acordo com as necessidades da turma e levando em consideração a carga horária, a grade curricular e o projeto pedagógico da escola.

Para elaboração dessas sugestões de cronograma, foram consideradas 40 semanas letivas, conforme previsto na Lei Federal nº 13.415, de 2017.

<table>
<tr><th colspan="4">Sugestões de organização</th><th>Unidades</th><th>Capítulos</th></tr>
<tr><td rowspan="10">1º semestre</td><td rowspan="7">1º trimestre</td><td rowspan="4">1º bimestre</td><td>Semanas 1 e 2</td><td rowspan="2">Unidade 1: Números</td><td>Capítulo 1: Números naturais, inteiros e racionais</td></tr>
<tr><td>Semanas 3 e 4</td><td>Capítulo 2: Porcentagens</td></tr>
<tr><td>Semanas 5 e 6</td><td rowspan="2">Unidade 2: Potenciação e radiciação</td><td>Capítulo 3: Potenciação</td></tr>
<tr><td>Semanas 7 e 8</td><td>Capítulo 4: Radiciação</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2º bimestre</td><td>Semanas 9 e 10</td><td rowspan="2">Unidade 3: Triângulos</td><td>Capítulo 5: Congruência de triângulos</td></tr>
<tr><td>Semanas 11 e 12</td><td>Capítulo 6: Pontos notáveis do triângulo e propriedades</td></tr>
<tr><td>Semana 13</td><td rowspan="2">Unidade 4: Cálculo algébrico</td><td>Capítulo 7: Expressões algébricas</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2º trimestre</td><td>Semana 14</td><td>Capítulo 8: Operações com polinômios</td></tr>
<tr><td rowspan="6">3º bimestre</td><td>Semanas 15 e 16</td><td rowspan="2">Unidade 5: Quadriláteros</td><td>Capítulo 9: Quadriláteros: noções gerais</td></tr>
<tr><td>Semanas 17 e 18</td><td>Capítulo 10: Propriedades dos quadriláteros notáveis</td></tr>
<tr><td rowspan="9">2º semestre</td><td>Semanas 19 e 20</td><td rowspan="2">Unidade 6: Álgebra</td><td>Capítulo 11: Equações</td></tr>
<tr><td>Semanas 21, 22 e 23</td><td>Capítulo 12: Sistema de equações</td></tr>
<tr><td>Semanas 24, 25 e 26</td><td rowspan="2">Unidade 7: Circunferência e transformações geométricas</td><td>Capítulo 13: Circunferência e círculo</td></tr>
<tr><td rowspan="6">3º trimestre</td><td>Semanas 27 e 28</td><td>Capítulo 14: Transformações geométricas</td></tr>
<tr><td rowspan="5">4º bimestre</td><td>Semanas 29, 30 e 31</td><td rowspan="2">Unidade 8: Área, volume e variação de grandezas</td><td>Capítulo 15: Área e volume</td></tr>
<tr><td>Semana 32</td><td>Capítulo 16: Proporcionalidade</td></tr>
<tr><td>Semanas 33, 34 e 35</td><td rowspan="3">Unidade 9: Estatística e Probabilidade</td><td>Capítulo 17: Medidas estatísticas</td></tr>
<tr><td>Semanas 36, 37 e 38</td><td>Capítulo 18: Pesquisas e gráficos</td></tr>
<tr><td>Semanas 39 e 40</td><td>Capítulo 19: Contagem e Probabilidade</td></tr>
</table>

Unidade 1

Números

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Retomar e aprofundar o estudo dos números naturais, números inteiros e números racionais.
- Utilizar métodos para obter uma fração geratriz para uma dízima periódica.
- Resolver e elaborar problemas utilizando cálculo de porcentagens.

Justificativas

O objetivo desta Unidade é retomar e ampliar conceitos e o trabalho com números naturais, inteiros e racionais desenvolvido nos anos anteriores. Para isso, em um primeiro momento, retomamos elementos que julgamos necessários para os objetivos da Unidade, como as regras do sistema de numeração, os conceitos de número natural, número inteiro e número racional nas formas de fração e decimal e as operações com esses números.

Entendemos que uma abordagem por meio da resolução de problemas pode desenvolver a capacidade de identificar oportunidades para a utilização da Matemática em outros contextos, aplicando procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las de acordo com a situação.

O trabalho com porcentagens e taxas percentuais é proposto como maneira de resolver problemas que envolvem conceitos de Matemática financeira.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG01
- CG02

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT02
- CEMAT05
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 1

- EF08MA05

Capítulo 2

- EF08MA04

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Educação Financeira*
- *Educação Fiscal*
- *Educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*
- *Educação para o Consumo*
- *Trabalho*

Nesta Unidade

O estudo proposto nesta Unidade visa auxiliar o desenvolvimento das habilidades que dizem respeito a estabelecer relações entre os números naturais, inteiros e racionais, bem como gerar a compreensão das características das dízimas periódicas e de suas respectivas frações geratrizes.

Na Unidade temática *Números*, o tema escolhido para a abertura da Unidade vai relacionar a arquitetura africana com fractais e números naturais, inteiros e racionas, ampliando o conhecimento do estudante sobre os conjuntos numéricos.

No capítulo **1**, vamos adentrar no conteúdo de dízimas periódicas e frações geratrizes. Na Unidade temática *Álgebra*, utilizamos o contexto dos fractais para relacioná-los ao conteúdo de expressões algébricas. A partir do estudo das diferentes medidas e dos padrões de figuras repetidas de objetos, foi possível desenvolver o conteúdo relacionado à equação do 1º grau.

O trabalho com porcentagens é desenvolvido no capítulo **2**, ampliando e aprofundando os estudos realizados nos anos anteriores e preparando os estudantes para os conteúdos que serão apresentados posteriormente.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Unidade 2

Potenciação e radiciação

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Resolver problemas com potências de expoentes inteiros.
- Representar números em notação científica.

- Elaborar problemas usando a relação entre a potenciação e a radiciação.
- Representar a raiz de um número como potência de expoente fracionário.

Justificativas

Nesta Unidade, são abordados temas relativos às Unidades temáticas *Números* e *Álgebra*, que se articulam com os objetivos pedagógicos a serem alcançados e norteiam as habilidades a serem desenvolvidas. São exploradas as operações de potenciação e radiciação envolvendo números racionais em suas diferentes representações, as propriedades da potenciação com expoentes inteiros, a notação científica, as potências com expoente fracionário, a radiciação com foco no cálculo da raiz quadrada e as equações quadráticas simples.

É retomado e ampliado o trabalho com potências feito nos anos anteriores e é apresentado o cálculo de potências com expoente inteiro negativo e com expoente racional fracionário (não inteiro), propriedades da potenciação e cálculo de raiz quadrada, que embasam a continuidade do estudo dos campos numéricos no 9º ano.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG02
- CG03
- CG04
- CG05
- CG07
- CG09
- CG10

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT02
- CEMAT03
- CEMAT05
- CEMAT06

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 3

- EF08MA01
- EF08MA03
- EF08MA04

Capítulo 4

- EF08MA02
- EF08MA09

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Ciência e Tecnologia*
- *Educação Ambiental*
- *Saúde*
- *Vida Familiar e Social*

Nesta Unidade

Nesta Unidade, é abordado o estudo da operação potenciação com base racional e expoente inteiro. Relembre o conteúdo de potências já estudado em anos anteriores para, depois, apresentar a potência de expoente negativo e as propriedades da potenciação, além de tratar de um número expresso em notação científica. Esses conteúdos embasam os estudos no 9º ano. Os assuntos desenvolvidos no capítulo **3** são: potências de expoente inteiro, inclusive potências de base racional não inteira; potências de 10 e notação científica; e propriedades da potenciação.

No capítulo **4**, é abordado o cálculo de raiz quadrada de um número racional fundamentado nos estudos de potências do capítulo anterior, e que embasará a continuidade dos estudos em Matemática no ano seguinte. Também são abordadas as equações do 2º grau simples, ampliando o estudo sobre equações feito no 7º ano e que será ampliado no 9º ano. Além desses assuntos, nesse capítulo, são explorados: cálculos aproximados; potências com expoentes racionais não inteiros; e raízes de frações.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Unidade 3

Triângulos

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Identificar as propriedades dos quadriláteros por meio da congruência de triângulos.
- Construir ângulos com medida de 90°, 60°, 45° e 30°, retas específicas, como mediatriz e bissetriz, e polígonos regulares.
- Resolver problemas aplicando os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos.

Justificativas

Os objetivos desta Unidade visam abordar assuntos referentes ao estudo de triângulos, a partir da classificação de triângulos, com vistas a aprofundar aprendizagens realizadas em anos anteriores, com a apresentação dos conceitos de mediatriz e bissetriz e propriedades delas em um triângulo. Assim, se faz necessário utilizar ferramentas como a régua e o compasso para que os estudantes possam visualizar propriedades relacionadas aos triângulos.

Nesta Unidade, exploram-se várias construções geométricas em que se usam régua e compasso. Por isso, é importante solicitar aos estudantes que providenciem previamente esses materiais. Caso seja possível, sugerimos que tente realizar essas construções por meio de um *software* computacional ou aplicativo de celular.

As construções geométricas podem ser utilizadas para a exploração de propriedades, uma vez que desempenham um papel relevante no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Além disso, ao fazer construções, é possível aplicar e rever conceitos que podem ser utilizados na resolução de situações do cotidiano.

Nesse sentido, é proposto o trabalho de verificação de resultados e propriedades dos triângulos, com o intuito de desenvolver o raciocínio dedutivo e mostrar aos estudantes o papel de destaque de uma demonstração no processo de desenvolvimento de conhecimentos da Matemática.

O estudo de triângulos é retomado e ampliado com a introdução do conceito de congruência de triângulos e dos casos de congruência, com o objetivo de desenvolver novas habilidades para resolver situações-problema.

Nesta Unidade, também são apresentados e investigados dois pontos notáveis de um triângulo, conhecidos como incentro e circuncentro. São apresentadas também as propriedades do triângulo isósceles, que permitem demonstrar outros resultados da Geometria e justificar algumas construções realizadas com régua e compasso.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG01
- CG03
- CG04
- CG05
- CG07
- CG09

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT02
- CEMAT05
- CEMAT07

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 5

- EF08MA14

Capítulo 6

- EF08MA15
- EF08MA17

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Ciência e Tecnologia*
- *Diversidade Cultural*
- *Educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*

Nesta Unidade

Nesta Unidade, são ampliados os estudos relacionados à Unidade temática *Geometria*, com foco no desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo do estudante por trabalhar com figuras e lugares geométricos e suas propriedades, além de possibilitar a investigação de propriedades, a produção de conjecturas e argumentos geométricos. Também é oportunizado o trabalho com o método hipotético-dedutivo que julgamos ser necessário para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Dentre as ampliações desta Unidade temática, destacamos a identificação de elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e de pontos notáveis em um triângulo qualquer.

No capítulo **5**, serão explorados os tópicos que abordam a ideia de congruência de triângulos, o conceito matemático de congruência de triângulos e casos de congruência de triângulos.

O capítulo **6** propõe o trabalho com ponto médio de um segmento, bissetriz de um ângulo, bissetrizes e incentro, além das propriedades dos triângulos isósceles e dos triângulos equiláteros.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Unidade 4

Cálculo algébrico

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Resolver problemas que envolvem expressões algébricas aplicando as propriedades das operações.
- Elaborar problemas que envolvem expressões algébricas.
- Identificar a regularidade de sequências numéricas definidas por fórmulas recursivas e por fórmulas não recursivas.
- Construir fluxogramas que permitam indicar os próximos números ou figuras de sequências definidas por fórmulas recursivas e por fórmulas não recursivas.

Justificativas

Os objetivos desta Unidade visam desenvolver a habilidade de representar situações-problema utilizando a linguagem algébrica, além do cálculo do valor numérico de expressões algébricas, e do reconhecimento de polinômios, e operações envolvendo polinômios.

Os estudantes também identificarão a regularidade em sequências numéricas e figurais, em sequências definidas por fórmulas recursivas e por fórmulas não recursivas e a construir fluxogramas relacionados a sequências.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG01
- CG02

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT02
- CEMAT03
- CEMAT06
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 7

- EF08MA06
- EF08MA10
- EF08MA11

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Ciência e Tecnologia*
- *Educação Ambiental*
- *Educação Financeira*
- *Educação para o Consumo*
- *Trabalho*

Nesta Unidade

Esta Unidade aborda conceitos algébricos, fundamentais para a resolução de diferentes problemas matemáticos ou de situações do cotidiano. Contudo, são conceitos que demandam uma atenção especial por parte do professor, haja vista que os estudantes estão efetuando a transição do pensamento matemático elementar para o mais avançado. Nesse contexto, o movimento de generalização de padrões ou a elaboração de um modelo matemático que possibilitará a compreensão de dado fenômeno consiste em uma ação importante nesse processo de transição. Isso é realizado ao longo do capítulo **7**, de expressões algébricas, no qual são explorados assuntos como sequências numéricas e polinômios. No capítulo **8**, são exploradas as operações com polinômios, utilizadas na resolução de problemas em diversos contextos. Ainda que neste capítulo não seja explorada nenhuma habilidade específica de Matemática do 8º ano, consideramos que o conteúdo proposto é importante para a continuidade dos estudos no campo da *Álgebra*.

Ao longo das atividades propostas, também será possível perceber as conexões entre a *Álgebra* e a *Geometria*, uma vez que a visualização das soluções geométricas de algumas atividades poderá contribuir para uma maior compreensão do que é demandado ou calculado. Contudo, embora haja uma densidade conceitual, o docente pode recorrer a diversas estratégias para abordar os tópicos propostos nos capítulos.

Todo esse trabalho contribui para a abordagem do TCT *Ciência e Tecnologia* e para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Unidade 5

Quadriláteros

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Adquirir noções gerais sobre quadriláteros e associá-los ao cotidiano.

- Reconhecer trapézios, paralelogramos, losangos, retângulos e quadrados como quadriláteros notáveis.
- Utilizar a congruência de triângulos para demonstrar as propriedades dos quadriláteros notáveis.

Justificativas

Os objetivos desta Unidade visam a formação de conceitos acerca da Geometria plana, sobretudo o reconhecimento de trapézios, paralelogramos, losangos, retângulos e quadrados como quadriláteros notáveis, conhecimentos essenciais para a continuidade dos estudos no 9º ano do Ensino Fundamental. Espera-se, ainda, que os estudantes utilizem a congruência de triângulos para demonstrar as propriedades dos quadriláteros notáveis, que também serão úteis nas próximas etapas de estudo.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG02
- CG03
- CG05

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT02
- CEMAT03
- CEMAT04
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 9

- EM08MA14

Capítulo 10

- EM08MA14

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Ciência e Tecnologia*

Nesta Unidade

Esta Unidade é dedicada aos estudos dos quadriláteros e suas propriedades. Alguns conceitos acerca desses polígonos foram abordados anteriormente, e provavelmente deverão ser resgatados aqui, tais como tipos de polígono soma de ângulos internos de um triângulo, ângulos internos, entre outros. Por isso, é importante, sempre que possível, suscitar plenárias e incentivar a participação oral dos estudantes, fazendo-os trazer seus saberes prévios acerca do tema.

A obra de arte trazida no capítulo **9** é de Adam Lister. Ao apresentá-la aos estudantes, é importante chamar a atenção deles para a composição da obra, sobretudo pelo uso de quadriláteros e a sensação que é produzida no observador. Aproveite esse espaço para debater a importância da arte para a humanidade, bem como analisar como vários artistas plásticos mobilizam aspectos da Matemática em suas obras.Ainda no capítulo **9**, os estudantes irão reconhecer trapézios, paralelogramos, losangos, retângulos e quadrados como quadriláteros notáveis.

O capítulo **10** trata das propriedades dos quadriláteros notáveis e procura estabelecer conexões com situações do cotidiano como abertura do tema uma obra de arte de Piet Modrian, conhecido pela combinação das cores primárias. Antes de iniciar os estudos dos quadriláteros e suas propriedades, é importante incentivar os estudantes, resgatando possíveis saberes prévios que possuem sobre este tema, bem como propondo que analisem formas geométricas presentes no espaço físico pelo qual circulam.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Unidade 6

Álgebra

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Resolver e elaborar problemas que envolvam expressões algébricas.
- Associar uma equação linear do 1º grau com duas incógnitas a uma reta do plano cartesiano.
- Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Justificativas

Esta Unidade retoma os conceitos de *Álgebra* trabalhados em anos anteriores, aprofundando-os e dando sentido prático e teórico ao seu uso e aprendizado, por meio de situações-problema, resoluções diretas e modelagem de situações diversas. É entendida como parte essencial para o que se chama letramento matemático, pois aqui são manejadas competências e habilidades envolvendo pensamento computacional, raciocínio lógico, argumentação matemática e formalização do raciocínio, além de competências atitudinais, como o entendimento da Matemática como ferramenta de compreensão para tomada de decisão no mundo.

Diante do cenário pós-pandemia, a retomada de conteúdos envolvendo o pensamento algébrico e o seu aprofundamento, além da preparação para os estudos futuros, é de suma importância, sendo que sem os quais toda a linguagem matemática a ser estudada posteriormente pelos estudantes fica comprometida.

Justamente pelas características basais do estudo de *Álgebra* como um todo e, posteriormente, de sistemas de equações, esta Unidade torna possível a aproximação da Matemática com diversas situações cotidianas, de ordens pessoal, familiar e global, sendo assim a oportunidade para mobilizar diversos temas contemporâneos transversais e auxiliar na tarefa de dar significado aos estudos da Matemática.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG01
- CG02
- CG06
- CG07
- CG08
- CG09
- CG10

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT02
- CEMAT03
- CEMAT05
- CEMAT06
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 11

- EF08MA06

Capítulo 12

- EF08MA07
- EF08MA08

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Educação em Direitos Humanos*
- *Educação Financeira*
- *Educação Fiscal*
- *Educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*
- *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso*
- *Saúde*
- *Trabalho*
- *Vida Familiar e Social*

Nesta Unidade

A Unidade se inicia com o debate sobre trabalho formal e os impostos pagos pelo trabalhador, envolvendo os TCTs *Trabalho*, *Educação Fiscal* e, posteriormente, *Educação Financeira* na reflexão sobre compras parceladas, juros e taxas cobradas. Todo o processo reflexivo permitirá que o estudante possa analisar e argumentar sobre decisões individuais e coletivas.

Os conceitos de equação linear e sistemas de equações são trabalhados com os estudantes alternadamente com a resolução de exercícios para que compreendam as estratégias de cálculo e a resolução de problemas para a aplicação do conteúdo, estabelecendo significado para as incógnitas e a situação-problema.

O conteúdo do capítulo **11** sobre equações é uma retomada do que foi estudado no 7º ano e pré-requisito para o conteúdo de sistemas de equações. Neste capítulo, também são apresentadas algumas equações sem raiz (equações impossíveis), bem como outras com infinitas raízes (equações indeterminadas).

O capítulo **12** amplia e aprofunda os métodos de resolução de equações, além de apresentar sistemas de equações, em que o conceito de modelagem matemática é introduzido, ainda que não com esse nome. Dessa forma, ao longo de todo o capítulo, diversas práticas e técnicas envolvendo raciocínio lógico, letramento matemático e pensamento computacional são utilizadas, comumente aplicadas a situações e contextos próximos do cotidiano. Neste capítulo, também são apresentados alguns sistemas sem solução (sistemas impossíveis), bem como outros com solução em aberto (sistemas indeterminados).

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Unidade 7

Circunferência e transformações geométricas

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Resolver problemas que envolvem distâncias entre pontos e retas.

- Resolver problemas que envolvem posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências.
- Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz.
- Resolver problemas que envolvem arcos e ângulos.
- Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas.

Justificativas

Esta Unidade aborda diversos aspectos da Geometria plana euclidiana. O objetivo é incentivar o olhar do estudante para reconhecer as figuras como lugares geométricos – conjuntos de pontos que obedecem a propriedades específicas. Assim, são apresentados os conceitos de mediatriz, bissetriz e circunferência.

No decorrer do texto, aparecem diversas construções geométricas que necessitam de instrumentos de desenho específicos para sua realização: régua, compasso, par de esquadros e transferidor. As construções são uma parte fundamental do aprendizado do estudante; envolvem destreza motora e proporcionam incentivo a disciplina, ordem e método para uma realização satisfatória.

Um complemento eficaz a essas construções manuais é a utilização de aplicativos de desenho gratuitos.

Todas as construções são mostradas passo a passo, acompanhadas de ilustrações das etapas do processo. A habilidade de construir textos de orientação em língua materna é incentivada.

Um objetivo adicional é a apresentação de fluxogramas como alternativa à descrição do processo construtivo. Essa outra linguagem encontra aplicações nas linguagens de programação de computadores.

No final da Unidade, tratamos de transformações geométricas: reflexão, translação e rotação.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG02
- CG07

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT02
- CEMAT03
- CEMAT05
- CEMAT06
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 13

- EF08MA15
- EF08MA16
- EF08MA17

Capítulo 14

- EF08MA18

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Ciência e Tecnologia*
- *Educação Ambiental*
- *Trabalho*

Nesta Unidade

Esta Unidade é destinada ao estudo da circunferência, do círculo e das transformações geométricas. Alguns conteúdos que serão abordados aqui podem ter sido estudados anteriormente, por isso, sempre que possível, fomente debates de modo que os saberes prévios dos estudantes sejam compartilhados entre si.

No capítulo **13**, são explorados os seguintes assuntos: distâncias entre dois pontos e entre ponto e reta; circunferência e círculo e seus elementos; posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências; arco de circunferência; semicircunferência; ângulo central; arcos congruentes; medida angular de um arco; e construção de polígonos regulares.

O capítulo **14** trata de transformações geométricas, apresentando construções por reflexão, translação e rotação com a utilização de instrumentos de desenho e de *software* de Geometria dinâmica.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Unidade 8

Área, volume e variação de grandezas

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Resolver e elaborar problemas que envolvem medidas de área de figuras geométricas.

- Resolver e elaborar problemas que envolvem medidas de volume.
- Identificar a relação de proporcionalidade direta, inversa ou de não proporcionalidade entre duas grandezas.
- Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

Justificativas

Nesta Unidade, são abordados assuntos relativos às Unidades temáticas *Álgebra*, *Geometria* e *Grandezas e medidas* da BNCC, que se articulam com os objetivos pedagógicos a serem alcançados e norteiam as habilidades a serem desenvolvidas. São retomados alguns conceitos abordados em anos anteriores sobre área, volume e grandezas proporcionais, favorecendo o estudo em espiral. Contudo, a retomada nesse momento tem por objetivo aprofundar os conhecimentos prévios e introduzir a noção de grandezas não proporcionais.

Com o conjunto de atividades proposto na Unidade, é possível promover um espaço para debates e compartilhamento de conhecimentos, possibilitando aos estudantes desenvolver a competência da argumentação.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG02
- CG09

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT02
- CEMAT03
- CEMAT05
- CEMAT06
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 15

- EF08MA19
- EF08MA20
- EF08MA21

Capítulo 16

- EF08MA12
- EF08MA13

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Educação Ambiental*
- *Educação Financeira*
- *Educação para o Consumo*
- *Saúde*
- *Trabalho*

Nesta Unidade

No capítulo **15** desta Unidade, são abordadas a noção de área e as unidades de medida de área (cm^2, m^2 e km^2, entre outras). São apresentados e debatidos os procedimentos para determinar a medida de área das seguintes figuras geométricas: retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, losango, trapézio, polígonos regulares e círculo. Para subsidiar o debate sobre esse tema, são apresentados diferentes conceitos, como o de comprimento da circunferência e o dos elementos notáveis de um polígono regular, para, então, introduzir a noção de polígono inscrito na circunferência. Além do trabalho com área, o conceito de

volume também é abordado nesta Unidade. São tratados os procedimentos para calcular a medida do volume do prisma e a do cilindro e a relação entre volume e capacidade.

No capítulo **16**, é retomada a noção de variação de grandezas e são propostas situações para analisar se duas grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais e, também, situações em que as grandezas não são proporcionais.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Unidade 9

Estatística e Probabilidade

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Obter valores de medidas de tendência central e amplitude dos dados de uma pesquisa estatística.
- Verificar a adequação de vários tipos de gráfico para representar um conjunto de dados.
- Construir gráficos de barras e gráficos de setores.
- Aplicar o princípio fundamental da contagem e calcular a probabilidade de eventos.

Justificativas

Nesta Unidade, são ampliados os estudos relacionados à Unidade temática *Probabilidade e Estatística*; dessa maneira, procuramos, conforme a BNCC, enfatizar o desenvolvimento de habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos.

Iniciamos com a apresentação de conhecimentos prévios que julgamos serem necessários para os temas propostos nesta Unidade: porcentagem; leitura, interpretação e construção de gráficos de barras (ou colunas) e de setores; pesquisa estatística; média; amplitude; e probabilidade. Os temas da Unidade temática *Probabilidade e Estatística* da BNCC nos anos finais do Ensino Fundamental ocorrem de maneira espiral, de modo que os mesmos conceitos são retomados e aprofundados a cada ano. Os conhecimentos prévios relacionados a leitura de gráficos e tabelas, pesquisa estatística, média, amplitude e probabilidade são retomados nesta Unidade, de modo que, se houver defasagens de anos anteriores, é possível recuperá-los durante o desenvolvimento dos estudos. Caso seja conveniente, realize uma avaliação diagnóstica que aborde esses temas, pois é importante que os estudantes tenham esses conhecimentos prévios para melhor desenvolvimento dos demais conceitos.

Recomendamos que o desenvolvimento desta Unidade seja realizado na ordem sugerida de capítulos, uma vez que os conceitos de cada capítulo são conhecimentos prévios para o seguinte. É possível iniciar a Unidade com o capítulo **19**, uma vez que os temas princípio multiplicativo e probabilidade diferem dos demais, entretanto, há atividades nesse capítulo que envolvem o cálculo da média, a leitura de gráficos e a construção de tabelas.

Finalizamos destacando que a proposta de resolução e elaboração de problemas está presente nesta Unidade, e configura-se como uma oportunidade na qual os estudantes são incentivados a mobilizar seus conhecimentos matemáticos e a apropriar-se de outros conceitos, seja individualmente ou com os seus pares, para desenvolver estratégias que auxiliem nas resoluções dos problemas.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG01
- CG02
- CG04
- CG07
- CG08
- CG09

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT02
- CEMAT04
- CEMAT06
- CEMAT07
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 17

- EF08MA04
- EF08MA25

Capítulo 18

- EF08MA23
- EF08MA24
- EF08MA26
- EF08MA27

Capítulo 19

- EF08MA03
- EF08MA22

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Educação Alimentar e Nutricional*
- *Educação em Direitos Humanos*
- *Educação Financeira*
- *Educação Fiscal*
- *Educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*
- *Educação para o Consumo*
- *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso*
- *Saúde*

Nesta Unidade

Nesta Unidade, são ampliados os estudos relacionados à Unidade temática *Probabilidade e Estatística*, com foco em: cálculo de medidas de tendência central e amplitude dos dados de uma pesquisa estatística; verificação e adequação de tipos de gráfico para representar determinado conjunto de dados; aplicação do princípio fundamental da contagem; e cálculo da probabilidade de eventos.

No capítulo **17**, são estudados os seguintes assuntos: médias (aritmética, ponderada e geométrica); cálculo da média em uma tabela de frequências; medidas de tendência central; e medidas de dispersão.

No capítulo **18**, são retomadas as etapas para o desenvolvimento de uma pesquisa estatística, o estudo de gráfico de barras (ou colunas) e são apresentados os gráficos de linha e de setores, a classificação de variáveis quantitativas em discretas e contínuas, a distribuição de frequência por classes e a representação por histograma.

No capítulo **19**, são estudados o princípio fundamental da contagem e o cálculo de probabilidades.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Resoluções

Unidade 1

Abertura (p. 9)

Resposta pessoal.

Capítulo 1

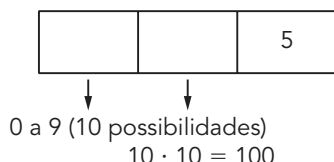
Atividades

1. a) Não.
b) Porque 15 é a representação no sistema de numeração decimal, e XV, no sistema de numeração romano.

2. a) 1
b) Dezena de milhão.
c) É múltiplo de 5, pois na divisão por 5 o resultado é 0. Não é múltiplo de 2 porque não é par, nem de 3 porque a soma dos algarismos é 43, e 43 não é múltiplo de 3.

3. a) De 50 a 59 há 10 números; de 150 a 159 há 10 números; ...; de 950 a 959 há 10 números. Portanto, são $10 \cdot 10 = 100$; 100 números.
b) 5, 15, 25, 35, ..., 95, 105, 115, ..., 995; logo, 100 números.
Outro modo: Usando o princípio multiplicativo da contagem, para a ordem das centenas há 10 possibilidades, e para a ordem das dezenas, 10 possibilidades.

		5

0 a 9 (10 possibilidades)
$10 \cdot 10 = 100$

Banco de imagens/ Arquivo da editora

4. a) Os números naturais múltiplos de 2 são: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...; são chamados números pares.
b) Os dez primeiros números naturais ímpares são: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

5. a) É um número natural maior do que 1, divisível apenas por 1 e por ele mesmo.
b) Os dez primeiros números naturais primos são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

6. $2\,020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$
a) $1 \cdot 2\,020$; $2 \cdot 1\,010$; $4 \cdot 505$; $5 \cdot 404$; $10 \cdot 202$; $20 \cdot 101$.
Logo, de 6 modos.
b) Com o fator 1, são: $1 \cdot 1 \cdot 2020$; $1 \cdot 2 \cdot 1\,010$; $1 \cdot 4 \cdot 505$; $1 \cdot 5 \cdot 404$; $1 \cdot 10 \cdot 202$; $1 \cdot 20 \cdot 101$.
Sem o fator 1, são: $2 \cdot 2 \cdot 505$; $2 \cdot 10 \cdot 101$; $2 \cdot 5 \cdot 202$; $4 \cdot 5 \cdot 101$.
Logo, de 10 modos.

7. a) Os divisores de 6 são 1, 2, 3 e 6. Temos: $1 + 2 + 3 + 6 = 12$.
Os divisores de 9 são 1, 3 e 9. Temos: $1 + 3 + 9 = 13 \neq 12$.
Então, 6 e 9 não são equivalentes.
b) Os divisores de 16 são: 1, 2, 4, 8 e 16. Temos:
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$.
Os divisores de 25 são: 1, 5 e 25. Temos: $1 + 5 + 25 = 31$.
Então, 16 e 25 são equivalentes.
c) Os divisores de 10 são: 1, 2, 5 e 10. Temos: $1 + 2 + 5 + 10 = 18$.
Como $18 = 1 + 17$ e os divisores de 17 são 1 e 17, os números 10 e 17 são equivalentes. Portanto, existe número natural equivalente a 10, o número 17.
Observação: como a soma dos divisores de 10 é 18, um número equivalente a 10 deve ser menor que 18. Podemos verificar que o único número equivalente a 10 é 17.

8. São dois naturais cujo mdc é 1. Por exemplo: 4 e 9, 8 e 15, etc.

9. a) Como $12 = 3 \cdot 4$ e 3 e 4 são primos entre si, um número é divisível por 12 se for divisível por 3 e por 4.
b) $15 = 3 \cdot 5$ e 3 e 5 são primos (logo, primos entre si). Um número é divisível por 15 se for divisível por 3 e por 5.
c) Divisíveis por 12: 2 016 e 2 028. Divisíveis por 15: apenas 2 025.

10. Os múltiplos de 4, com dois algarismos, são:

$$\begin{array}{cccccc} 12, & 16, & 20, & 24, & \ldots, & 96 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 3 \cdot 4 & 4 \cdot 4 & 5 \cdot 4 & 6 \cdot 4 & & 24 \cdot 4 \end{array}$$

Se fosse de $1 \cdot 4$ a $24 \cdot 4$, seriam 24 números. Como começa no $3 \cdot 24$, são 22 números.
Outro modo:
Os múltiplos de 4 são:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 \cdot 4, & 2 \cdot 4, & 3 \cdot 4, & 4 \cdot 4, & \ldots, & 24 \cdot 4, & 25 \cdot 4, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ 4 & 8 & 12 & 16 & & 96 & 100 & \end{array}$$

Com dois algarismos, são $24 - 2 = 22$; 22 números.

11. a) $(3, 12, 48, 192, \ldots)$
b) $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$
c) $\left(3, 4, \frac{16}{3}, \frac{64}{9}, \ldots\right)$

12. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...
(13 + 21 = 34; 21 + 34 = 55; 34 + 55 = 89; 55 + 89 = 144)
O primeiro que se escreve com três algarismos é 144.

13. a) 0
b) -3
c) 4
d) 0

14. a) $|+8| = 8$
b) $|-8| = 8$
c) $|-15| = 15$
d) $|15| = 15$
e) $|0| = 0$
f) $|-(-1)| = |+1| = 1$
g) $2 \cdot |-5| - |+3| = 2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7$
h) $|-6| + |2 - (9 - 3) + 1| = 6 + |2 - 6 + 1| = 6 + |-3| =$
$= 6 + 3 = 9$

15. $1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10, 11, \ldots$
a) O 50º número é -50 (número par, trocamos o sinal).
b) $1 + (-2) = -1$; $3 + (-4) = -1$.
c) Nos 50 primeiros números, temos 25 grupos de soma -1:

$$\underbrace{1, \ -2}_{-1}, \ \underbrace{3, \ -4}_{-1}, \ \underbrace{5, \ -6}_{-1}, \ \ldots, \ \underbrace{49, \ -50}_{-1}$$

A soma é $25 \cdot (-1) = -25$.

d) Na sequência dos inteiros positivos, conservamos os números ímpares e multiplicamos os números pares por -1, isto é, trocamos os sinais deles.
O 25º número é 25 (número ímpar, conservamos o sinal).

e) Agrupando de dois em dois, a soma de cada grupo é -1.
Nos 25 primeiros números, temos 12 grupos, e o 25º número é 25.
Então, a soma é: $12 \cdot (-1) + 25 = -12 + 25 = 13$.

f) Nos 25 primeiros números inteiros positivos, temos 12 números pares; logo, 12 números negativos na sequência. O produto é positivo.

g) Nos 50 primeiros números inteiros positivos, temos 25 números pares; logo, 25 números negativos na sequência. O produto é negativo.

Na olimpíada (p. 12)

O problema da calculadora

$2014 = 19 \cdot 106 = 19 \cdot 2 \cdot 53 = 38 \cdot 53$

Apertando seis teclas, sendo uma o sinal $\times$ e outra o sinal $=$, foram quatro teclas com os algarismos 3, 8, 5 e 3. O maior algarismo digitado foi 8.

[3] [8] [×] [5] [3] [=]

Logo, alternativa **d**.

16. a)
29 | 10
90 | 2,9
0

b)
2874 | 100
874 | 28,74
740
400
0

c)
3700 | 1000
7000 | 0,037
0

d)
8 | 5
30 | 1,6
0

e)
17 | 2
10 | 8,5
0

f)
41 | 25
160 | 1,64
100
0
Logo, $-1,64$.

g)
5 | 3
20 | 1,666...
20
20

h)
7 | 6
10 | 1,1666...
40
40
40
Logo, $-1,1666...$

i)
30 | 8
60 | 0,375
40
0

j)
8 | 3
20 | 2,666...
20
20

k)
90 | 20
100 | 0,45
0
Logo, $-0,45$.

l)
20 | 9
20 | 2,222...
20
20
Logo, $-2,222...$

17. a) $0,57 = \frac{57}{100}$ (2 casas decimais)

b) $1,28 = \frac{128^{:4}}{100_{:4}} = \frac{32}{25}$ (2 casas decimais)

c) $3,125 = \frac{3125^{:125}}{1000_{:125}} = \frac{25}{8}$ (3 casas decimais)

d) $-31,25 = -\frac{3125^{:25}}{100_{:25}} = -\frac{125}{4}$ (2 casas decimais)

18. a) $\frac{7^{\cdot 5}}{20_{\cdot 5}} = \frac{35}{100} = 3,5$

b) $\frac{17}{15}$, denominador $15 = 5 \cdot 3$, que tem o fator primo 3, diferente de 2 e 5.

$\frac{17}{15} = 1,1333...$

c) $-\frac{37}{100} = -0,37$

d) $-\frac{102^{\cdot 2}}{5_{\cdot 2}} = -\frac{204}{10} = -20,4$

Logo, alternativas **a**, **c** e **d**.

19.

DE	DP
$\frac{11}{10} = 1,1$	$-\frac{37}{75} = -0,49333...$
$-\frac{11}{20} = -0,55$	$\frac{13}{3} = 4,3333...$
$\frac{207}{100} = 2,07$	$\frac{15}{7} = 2,142857...$
$\frac{42}{14} = 3$	$\frac{32}{27} = 1,185185...$
$\frac{21}{6} = 3,5$	
$-\frac{15}{3} = -5$	

20. a)
320 | 2
160 | 2
80 | 2
40 | 2
20 | 2
10 | 2
5 | 5
1 |

$320 = 2^6 \cdot 5$

b) Decimal exato, porque o denominador só tem os fatores primos 2 e 5.

21. a) Três números são naturais: 0; 58 e 1.
b) Seis números são inteiros: -111; 0; 58; -4; -17 e 1.
c) Doze números são racionais, todos eles.
d) -111

22. a) O período de 0,342342342... é 342.
b) O período de 27,57777... é 7.
c) O período de 1036,898989... é 89.

23. $x = 0,666...$
$10x = 6,666...$
$-\ \ x = 0,666...$
$9x = 6$
$x = \frac{6^{:3}}{9_{:3}} = \frac{2}{3}$

24. $x = 3,2222...$
$10x = 32,222...$
$-\ \ x = 3,222...$
$9x = 29$
$x = \frac{29}{9}$

25. a) $x = 5{,}474747\ldots$

$$\begin{array}{rl} 100x = & 547{,}474747\ldots \\ -\quad x = & 5{,}474747\ldots \\ \hline 99x = & 542 \end{array}$$

$$x = \frac{542}{99}$$

b) $x = 0{,}312312312\ldots$

$$\begin{array}{rl} 1\,000x = & 312{,}312312312\ldots \\ -\quad x = & 0{,}312312312\ldots \\ \hline 999x = & 312 \end{array}$$

$$x = \frac{312^{:3}}{999_{:3}} = \frac{104}{333}$$

26. a) $x = 0{,}777\ldots$

$$\begin{array}{rl} 10x = & 7{,}777\ldots \\ -\quad x = & 0{,}777\ldots \\ \hline 9x = & 7 \end{array}$$

$$x = \frac{7}{9}$$

b) $x = 3{,}888\ldots$

$$\begin{array}{rl} 10x = & 38{,}888\ldots \\ -\quad x = & 3{,}888\ldots \\ \hline 9x = & 35 \end{array}$$

$$x = \frac{35}{9}$$

c) $10x = 61{,}777\ldots$

$$\begin{array}{rl} 100x = & 617{,}777\ldots \\ -\quad 10x = & 61{,}777\ldots \\ \hline 90x = & 556 \end{array}$$

$$x = \frac{556^{:2}}{90_{:2}} = \frac{278}{45}$$

d) $10x = 58{,}333\ldots$

$$\begin{array}{rl} 100x = & 583{,}333\ldots \\ -\quad 10x = & 58{,}333\ldots \\ \hline 90x = & 525 \end{array}$$

$$x = \frac{525^{:15}}{90_{:15}} = \frac{35}{6}$$

e) $x = 9{,}151515\ldots$

$$\begin{array}{rl} 100x = & 915{,}151515\ldots \\ -\quad x = & 9{,}151515\ldots \\ \hline 99x = & 906 \end{array}$$

$$x = \frac{906^{:3}}{99_{:3}} = \frac{302}{33}$$

f) $x = +12{,}3454545\ldots$

$$\begin{array}{rl} 1\,000x = & 12\,345{,}4545\ldots \\ -\quad 10x = & 123{,}4545\ldots \\ \hline 990x = & 12\,222 \end{array}$$

$$x = \frac{12\,222^{:18}}{990_{:18}} = \frac{679}{55}$$

Assim, a fração geratriz de $-12{,}3454545\ldots$ é $-\frac{679}{55}$.

27. a) $0{,}\underbrace{7}_{\text{1 casa decimal}} = \frac{7}{10}$

b) $0{,}\underbrace{33}_{\text{2 casas decimais}} = \frac{33}{100}$

c) $1{,}\underbrace{333}_{\text{3 casas decimais}} = \frac{1\,333}{1\,000}$

d) $5{,}\underbrace{21}_{\text{2 casas decimais}} = \frac{521}{100}$

e) $x = 2{,}333\ldots$

$$\begin{array}{rl} 10x = & 23{,}333\ldots \\ -\quad x = & 2{,}333\ldots \\ \hline 9x = & 21 \end{array}$$

$$x = \frac{21^{:3}}{9_{:3}} = \frac{7}{3}$$

f) $3{,}\underbrace{4}_{\text{1 casa decimal}} = \frac{34^{:2}}{10_{:2}} = \frac{17}{5}$

28. Temos:

$x = 2{,}8333\ldots$

$$\begin{array}{rl} 100x = & 283{,}333\ldots \\ -\quad 10x = & 28{,}333\ldots \\ \hline 90x = & 255 \end{array}$$

$$x = \frac{255^{:15}}{90_{:15}} = \frac{17}{6}$$

$x = 1{,}6666\ldots$

$$\begin{array}{rl} 10x = & 16{,}666\ldots \\ -\quad 1x = & 1{,}666\ldots \\ \hline 9x = & 15 \end{array}$$

$$x = \frac{15^{:3}}{9_{:3}} = \frac{5}{3}$$

a) $\frac{17}{6} + \frac{5}{3} = \frac{17 + 10}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4{,}5$

b) $\frac{17}{6} \cdot \frac{5}{3} = \frac{85}{18} = 4{,}7222\ldots$

29. I. $\frac{1}{100}, \frac{1}{50}, \frac{3}{100}, \frac{1}{25}, \frac{1}{20}, \frac{3}{50}, \ldots$

$\downarrow$

$\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \frac{4}{100}, \frac{5}{100}, \frac{6}{100}, \ldots$

II. $6, -12, 18, -24, 30, -36, 42, \ldots$

$\downarrow$

$1 \cdot 6 \quad -2 \cdot 6 \quad 3 \cdot 6 \quad -4 \cdot 6 \quad 5 \cdot 6 \quad -6 \cdot 6 \quad 7 \cdot 6, \ldots$

III. $\frac{5}{12}, \frac{5}{6}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{25}{12}, \frac{5}{2}, \frac{35}{12}, \ldots$

$\downarrow$

$\frac{5}{12}, \frac{10}{12}, \frac{15}{12}, \frac{20}{12}, \frac{25}{12}, \frac{30}{12}, \frac{35}{12}, \ldots$

a) O próximo número de cada sequência é:

I. $\frac{7}{100}$; **II.** $-8 \cdot 6 = -48$; **III.** $\frac{40}{12} = \frac{10}{3}$.

b) I. $\frac{\left(\frac{10}{100}\right)}{\left(\frac{1}{100}\right)} = \frac{10}{100} \cdot \frac{100}{1} = 10$

II. $\frac{(-10 \cdot 6)}{1 \cdot 6} = -10$

III. $\frac{\left(\frac{10 \cdot 5}{12}\right)}{\left(\frac{1 \cdot 5}{12}\right)} = \frac{50}{12} \cdot \frac{12}{5} = 10$

c) I. $\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \ldots \frac{10}{100} = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + 10}{100} =$

$= \frac{55^{:5}}{100_{:5}} = \frac{11}{20}$ (ou 0,55)

II. $\underbrace{6 - 12}_{-6} + \underbrace{18 - 24}_{-6} + \underbrace{30 - 36}_{-6} + \underbrace{42 - 48}_{-6} + \underbrace{54 - 60}_{-6} =$

$= 5 \cdot (-6) = -30$

III. $\frac{5}{12} + \frac{10}{12} + \frac{15}{12} + \ldots + \frac{50}{12} = \frac{5 + 10 + 15 + \ldots + 50}{12} =$

$= \frac{275}{12}$

d) I. $\frac{100}{100} + \frac{101}{100} = \frac{100 + 101}{100} = \frac{201}{100}$ (ou 2,01)

II. $(-100 \cdot 6) + 101 \cdot 6 = -600 + 606 = 6$

III. $\frac{100 \cdot 5}{12} + \frac{101 \cdot 5}{12} = \frac{500 + 505}{12} = \frac{1005^{:3}}{12_{:3}} = \frac{335}{4}$

Capítulo 2

Atividades

1. I. $7\% = \frac{7}{100}$; item **c**.

II. $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$; item **a**.

III. $\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot 100\% = 12{,}5\%$; item **d**.

IV. $1 = 1 \cdot 100\% = 100\%$; item **b**.

2. a) A turma toda corresponde a 100%.

b) $\frac{30}{32} = \frac{15}{16} \cdot 100\% = 93{,}75\%$

3. 24% de $35\,000 = \frac{24}{100} \cdot 35\,000 = 8\,400$

A medida de área devastada pelo incêndio foi de 8 400 km^2.

4. a) Em 1 000 mL de combustível, 200 mL são de etanol. Portanto, a porcentagem de etanol é $\frac{200^{:10}}{1000_{:10}} = \frac{20}{100} = 20\%$.

b) No galão, ficam 3 200 mL, e a medida de volume do álcool é: $3 \cdot 200$ mL + 200 mL = 800 mL.

A porcentagem de álcool é: $\frac{800}{3200} \cdot 100\% = \frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$.

5. 18,24% de R\$ 10,60 = $\frac{18{,}24}{100} \cdot$ R\$ 10,60 = R\$ 1,93

6. $4\,741 + 1\,028 + 869 = 6\,638$

x% de $6\,638 = 4\,741$

$\frac{x}{100} \cdot 6\,638 = 4\,741$

$x = \frac{4\,741}{6\,638} \cdot 100$

$x = 71{,}4\%$

7. $\frac{2\,842\,332}{5\,523\,023} \cdot 100\% \simeq 51{,}5\%$

8. Exemplo de resposta: A população de uma cidade é de 550 000 habitantes. Sabendo-se que 23% dessa população é de crianças com menos de 12 anos, calcule o número de crianças até 12 anos que vivem nessa cidade. Resposta: $\frac{23}{100} \cdot 550\,000 = 126\,500$; são 126 500 crianças com menos de 12 anos que vivem nessa cidade.

9. Aumento porcentual: $\frac{13\,500 - 12\,000}{12\,000} \cdot 100\% = 12{,}5\%$.

10. Redução porcentual: $\frac{36 - 20}{36} \cdot 100\% \simeq 44{,}4\%$.

11. Aumento porcentual: $\frac{513 - 475}{475} \cdot 100\% = 8\%$.

12. Exemplo de resposta: Em uma feira de livros, paguei R\$ 136,00 por um livro que custava R\$ 160,00. Qual foi o percentual do desconto oferecido na feira? Resposta: $160{,}00 - 136{,}00 = 24{,}00$;

$\left(\frac{24{,}00}{160{,}00} \cdot 100\right)\% = \frac{240}{16}\% = 15\%$.

13. R\$ 728,50 − R\$ 530,35 = R\$ 198,15

$\frac{x}{100} \cdot$ R\$ 728,50 = R\$ 198,15

$x = \frac{\text{R\$ } 198{,}15}{\text{R\$ } 728{,}50} \cdot 100$

$x = 27{,}2\%$

Foram descontados 27,2%.

14. (valor novo) = (100% + 20%) do (valor antigo) = = 120% · (valor antigo) = 1,20 · (valor antigo)

Logo, devemos multiplicar por 1,20.

15. $110\% \cdot 3{,}20 = 1{,}10 \cdot 3{,}20 = 3{,}52$; R\$ 3,52.

16. $106\% \cdot 180\,000 = 1{,}06 \cdot 180\,000 = 190\,800$; 190 800 mulheres.

17. a) $108\% \cdot 425{,}50 = 1{,}08 \cdot 425{,}50 = 459{,}54$; R\$ 459,54.

b) $107{,}5\% \cdot 425{,}50 = 1{,}075 \cdot 425{,}50 = 457{,}41$; R\$ 457,41.

18. Preço em fevereiro: $110\% \cdot 5{,}00$.

Preço em março: $105\% \cdot (110\% \cdot 5{,}00) = 1{,}05 \cdot 1{,}10 \cdot 5{,}00 = 5{,}775 \simeq 5{,}78$; aproximadamente R\$ 5,78.

19. (valor novo) = (100% − 10%) do (valor antigo) = = 90% · (valor antigo) = 0,90 · (valor antigo)

Logo, devemos multiplicar por 0,90.

20. $100\% - 25\% = 75\% = 0{,}75$ e $0{,}75 \cdot 16 = 12$. Portanto, ele faz essa digitação em 12 minutos.

21. $100\% - 8{,}5\% = 91{,}5\%$ e $91{,}5\% \cdot 140\,000 = 0{,}915 \cdot 140\,000 = 128\,100$. Portanto, 128 100 candidatos fizeram a prova.

22. a) Produção em 2018 (em bilhões de litros): $95{,}8\% \cdot 12{,}837$.

Produção em 2019 (em bilhões de litros): $102{,}9\% \cdot (95{,}8\% \cdot 12{,}837) = 1{,}029 \cdot 0{,}958 \cdot 12{,}837 \simeq 12{,}654$.

b) Houve decréscimo de $\frac{12\,837 - 12\,654}{12\,837} \cdot 100\% \simeq 1{,}4\%$.

Outro modo de resolver o item **b**:

(produção em 2019) = 1,029 · 0,958 · (produção de 2017)

(produção em 2019) ≃ 0,986 · (produção de 2017) = = 98,6% · (produção de 2017)

Houve decréscimo de aproximadamente $100\% - 98{,}6\% = 1{,}4\%$.

23. Exemplo de resposta: Uma escola tinha 150 estudantes de oitavo ano em 2019 e teve um acréscimo de 20% em 2020. Mas, em 2021, houve decréscimo de 15% relativamente a 2020. Quantos estudantes de oitavo ano essa escola tinha em 2021 a mais do que em 2019? Resposta: $150 \cdot 1{,}20 = 180$ e $180 \cdot 0{,}85 = 153$. Logo, $153 - 150 = 3$, ou seja, 3 estudantes.

24. Exemplo de resposta: Uma loja vende um determinado modelo de televisão por R\$ 2.000,00. Para incentivar a venda dessa televisão, fez uma promoção, oferecendo um desconto de 10%. Quanto passou a custar essa televisão? Resposta: 10% de $2\,000 = 200$ e $2\,000 - 200 = 1\,800$; R\$ 1.800,00.

Educação financeira

I. Resposta pessoal.

II. R$ 100,00 · 1,01 · 1,01 · 1,01 = R$ 103,03

III. (R$ 1.000,00 : 1,02) : 1,02 ≃ R$ 961,17
Redução percentual: (R$ 1.000,00 − R$ 961,17) : R$ 1.000,00 = = 0,0388 = 3,88%.

IV. Pode-se pesquisar o histórico do IPCA (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo) na página do IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?=&t=series-historicas. Acesso em: 2 jul. 2022.

V. Resposta pessoal.

1. Os índices mais comumente usados para avaliar a inflação são o IPCA (fornecido pelo IBGE) e o IGP-M (fornecido pela FGV). Esses índices podem ser pesquisados e conferidos mês a mês desde o início do plano real. No entanto, a notícia não informa qual é o índice utilizado. Uma vez conhecido o índice, pode-se pesquisar seu histórico de valores para aferir se a notícia é verdadeira ou *fake news*.

2. Resposta pessoal.

Na Unidade

1. $3{,}125 = \frac{3125^{:125}}{1000_{:125}} = \frac{25}{8}$. Logo, alternativa **b**.

2. Para escrever a fração $\frac{3}{40}$ na forma decimal, basta dividir o número 3 por 40, ou seja, $\frac{3}{40} = 3 : 40 = 0{,}075$. Logo, alternativa **b**.

3. Quando o denominador de uma fração apresenta apenas os fatores primos 2 e 5, ela é uma fração que equivale a um decimal exato; então, temos:
- na alternativa **a**, o denominador é $8 = 2^3$; decimal exato;
- na alternativa **b**, o denominador é $25 = 5^2$; decimal exato;
- na alternativa **c**, o denominador é $6 = 2 \cdot 3$; decimal não exato;
- na alternativa **d**, o denominador é $40 = 2^3 \cdot 5$; decimal exato.

Logo, alternativa **c**.

4. Cada traço da régua equivale a 0,01; então, a marca em vermelho equivale ao número 132,283. Logo, alternativa **b**.

5.
$$\begin{array}{rl} 100x = & 45{,}4545\ldots \\ -\quad x = & 0{,}454545\ldots \\ \hline 99x = & 45 \end{array}$$
$$x = \frac{45^{:9}}{99_{:9}} = \frac{5}{11}$$
Logo, alternativa **a**.

6.
$$\begin{array}{rl} 100x = & 273{,}333\ldots \\ -\ 10x = & 27{,}333\ldots \\ \hline 90x = & 246 \end{array}$$
$$x = \frac{246^{:6}}{90_{:6}} = \frac{41}{15}$$
Então, o numerador é 41. Logo, alternativa **c**.

7. 36 − 9 = 27; 27 estudantes que não usam óculos.
$\frac{x}{100} \cdot 36 = 27$
$x = \frac{27}{36} \cdot 100$
$x = 75\%$
Logo, alternativa **d**.

8. $\frac{65}{100} \cdot 80 = 52$; 52 carros novos a menos.
80 − 52 = 28; 28 carros novos vendidos em dezembro de 2021.
Logo, alternativa **a**.

9. $\frac{75}{100} \cdot 60 = 45$; 45 carros seminovos a mais.
60 + 45 = 105; 105 carros seminovos vendidos em dezembro de 2021.
Logo, alternativa **c**.

10. Vendidos em 2020: 80 + 60 = 140.
Vendidos em 2021: 28 + 105 = 133.
Em 2021, foram vendidos 7 carros a menos que em 2020, pois 140 − 133 = 7.
$\frac{x}{100} \cdot 140 = 7$
$x = \frac{7}{140} \cdot 100$
$x = 5\%$
Logo, alternativa **d**.

Unidade 2

Abertura (p. 29)

Os computadores trabalham com potências de 2 e $1024 = 2^{10}$ é a potência de 2 mais próxima de 1 000.

Capítulo 3

Participe (p. 31)

a) 2^0; 1 grão.
b) 2^1; 2 grãos.
c) 2^2; 4 grãos.
d) 2^3; 8 grãos.
e) 2^4; 16 grãos.
f) 2^5; 32 grãos.
g) 2^6; 64 grãos.
h) 2^{10}; 1 024 grãos.

Atividades

1. Cada caractere é formado por 1 *byte*, ou seja, 8 *bits*, e cada *bit* pode utilizar apenas dois dígitos (0 e 1); então, é possível formar:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$; 256 caracteres diferentes.

2. a) 1 kB = 1 000 *bytes* ou 1 kB = 1 000 · 8 *bits* = 8 000 *bits*; 10 kB, portanto, são 80 000 *bits*.
b) 1 KiB = 1 024 *bytes* ou 1 KiB = 1 024 · 8 *bits* = 8 192 *bits*; 10 KiB, portanto, são 81 920 *bits*.

3. a) A cada hora que passa, a medida de volume fica multiplicada por 2. Então, após 10 horas, a medida de volume será $2^{10} \cdot 1\ cm^3 = 2^{10}\ cm^3$.
b) A medida de volume, 4 horas antes era $\frac{1\ cm^3}{2^4} = 2^{-4}\ cm^3$.

4. Exemplo de resposta: Cristina estava brincando de desenhar quadrados em uma folha de papel com 30 cm de medida do lado. O 1º quadrado que ela desenhou tinha 1 cm de medida do lado; a medida do lado do 2º quadrado era o dobro em relação à do 1º quadrado; no 3º quadrado, a medida do lado era o dobro em relação à do 2º quadrado; e assim sucessivamente. Considerando o espaço que ela tem para desenhar e sabendo que os desenhos eram representados em uma única linha sem espaço entre eles, quantos quadrados no máximo Cristina conseguiu desenhar? Resposta: 4 quadrados.

5. Quadro **A**
a) $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$
b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$
c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25}$

d) $(-1{,}1)^2 = (-1{,}1) \cdot (-1{,}1) = 1{,}21$
e) $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$
f) $(3{,}14)^1 = 3{,}14$
g) $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
h) $(-1)^6 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$
i) $0^9 = 0$
j) $(-10)^0 = 1$

Quadro **B**

a) $10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$

b) $(-2)^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

e) $(0{,}1)^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = 10^2 = 100$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$

g) $6^{-3} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

h) $(-1)^{-4} = \left(-\frac{1}{1}\right)^4 = 1$

i) $(-2)^{-5} = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$

j) $\left(\frac{10}{9}\right)^{-1} = \frac{9}{10}$

6. Por ano, o valor multiplica-se por 0,8; em 3 anos, seu valor será, em reais:
$60\,000 \cdot (0{,}8)^3 = 60\,000 \cdot 0{,}512 = 30\,720$
Daqui a 3 anos, o carro valerá R$ 30.720,00.

7. a) $100 \cdot (1{,}2)^0 = 100 \cdot 1 = 100$
b) $100 \cdot (1{,}2)^1 = 100 \cdot 1{,}2 = 120$
c) $100 \cdot (1{,}2)^2 = 100 \cdot 1{,}44 = 144$
d) $100 \cdot (1{,}2)^3 = 100 \cdot 1{,}728 = 172{,}8$

8. a) $x^3 - x^2 - x + 1$; para $x = -1$:
$(-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$
b) $10x^2 + 100x - 1\,000$; para $x = 5$:
$10 \cdot 5^2 + 100 \cdot 5 - 1\,000 = 10 \cdot 25 + 500 - 1\,000 =$
$= 250 - 500 = -250$

9. a) $3^2 - 2^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 9 - 8 + 1 = 2$

b) $4 \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot (-2)^1 = 4 \cdot 8 + \frac{6}{2} = 32 + 3 = 35$

c) $5^1 \cdot 3^{-2} + 3^{-1} - 3 \cdot 3^0 =$
$= 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - 3 \cdot 1 = 5 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 3 =$
$= \frac{5}{9} + \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{5 - 24}{9} = -\frac{19}{9}$

d) $2^3 - 2 \cdot 3^2 = 8 - 2 \cdot 9 = 8 - 18 = -10$

e) $(-1)^{10} + 3 \cdot (-1)^5 - 3 \cdot (-1)^6 = 1 + 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 =$
$= 1 - 3 - 3 = -5$
f) $(+5)^4 - (-5)^4 = 625 - 625 = 0$

10. a) $100 + 7 = 107$; 107 habitantes.
b) $100 \cdot x = 107$
$x = \frac{107}{100}$
$x = 1{,}07$
c) $1{,}07 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}07 = (1{,}07)^3$
d) $196 \cdot (1{,}07)^3 \simeq 240$. Portanto, a estimativa da população brasileira para 2040 é de aproximadamente 240 milhões de habitantes.

11. a) Para cada 100 ratos, um ano depois haverá 150 ratos. Logo, haverá um aumento de 50 ratos para cada 100 ratos. O aumento será de 50%.
b) $(1{,}5)^4 = 5{,}0625$
c) (quantidade há 1 ano) $\cdot$ 1,5 = (quantidade de hoje)
(quantidade há 1 ano) = $\frac{1}{1{,}5}$ $\cdot$ (quantidade de hoje)
(quantidade há 1 ano) = $\frac{2}{3}$ $\cdot$ (quantidade de hoje)

12. a) $3 \cdot 10^7 = 3 \cdot 10\,000\,000 = 30\,000\,000$
b) $1{,}2 \cdot 10^6 = 1{,}2 \cdot 1\,000\,000 = 1\,200\,000$
c) $4{,}15 \cdot 10^9 = 4{,}15 \cdot 1\,000\,000\,000 = 4\,150\,000\,000$
d) $2{,}22 \cdot 10^{10} = 2{,}22 \cdot 10\,000\,000\,000 = 22\,200\,000\,000$

13. a) $700\,000 = 7 \cdot 10^5$
b) $1\,800\,000\,000 = 18 \cdot 10^8 = 1{,}8 \cdot 10^9$
c) $35\,000\,000 = 35 \cdot 10^6 = 3{,}5 \cdot 10^7$
d) $295\,000\,000\,000 = 295 \cdot 10^9 = 2{,}95 \cdot 10^{11}$

14. $150\,000\,000 = 1{,}5 \cdot 100\,000\,000 = 1{,}5 \cdot 10^8$; $1{,}5 \cdot 10^8$ km

15. $161\,000\,000\,000 = 1{,}61 \cdot 100\,000\,000\,000 = 1{,}61 \cdot 10^{11}$;
ou seja, $1{,}61 \cdot 10^{11}$ reais.

16. a) $1{,}1 \cdot 10^{10} = 11 \cdot 10^9$ e $11 \cdot 10^9 > 9{,}9 \cdot 10^9$.
O maior é $1{,}1 \cdot 10^{10}$.
b) $160\,000\,000 = 16 \cdot 10^7$
A igualdade está correta, pois a quantidade de zeros corresponde ao expoente.
Mas $16 \cdot 10^7$ não é notação científica de 160 000 000, pois, nesse tipo de notação, o coeficiente deve ser um número compreendido entre 1 e 10. A notação científica é $1{,}6 \cdot 10^8$.

17. a) $5{,}25 \cdot 10^7$
b) $3{,}256 \cdot 10^7$
c) $2{,}5 \cdot 10^4$
d) $1{,}83 \cdot 10^6$

18. 1 sextilhão ou $1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 1 \cdot 10^{21}$
$6{,}02 \cdot 10^{23} = 602 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{23} = 602 \cdot 10^{21}$ ou 602 sextilhões

19. a) $1{,}3 \cdot 10^{-3} = 0{,}0013$
b) $4{,}25 \cdot 10^{-5} = 0{,}0000425$
c) $1{,}11 \cdot 10^{-4} = 0{,}000111$
d) $8 \cdot 10^{-6} = 0{,}000008$

20. a) $0{,}000012 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$
b) $0{,}000007 = 7 \cdot 10^{-6}$
c) $0{,}01111 = 1{,}111 \cdot 10^{-2}$
d) $0{,}00222 = 2{,}22 \cdot 10^{-3}$

21. $0{,}05 = \frac{5}{100} = \frac{5}{10^2} = 5 \cdot 10^{-2}$
$1\,000 = 1 \cdot 10^3$
$20\,000 = 2 \cdot 10\,000 = 2 \cdot 10^4$
$0{,}00005 = \frac{5}{100\,000} = \frac{5}{10^5} = 5 \cdot 10^{-5}$

22. $5{,}5 \cdot 10^{-5} = 0{,}000055$
$6{,}6 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000066$
$6{,}6 \cdot 10^{-6} < 5{,}5 \cdot 10^{-5}$

Participe (p. 38)

a) 1 024; 10^3.
b) 10^6; 1 milhão.
c) 10^9; 1 bilhão.
d) 10^{12}; 1 trilhão.
e) 10^{15}; 1 quatrilhão.
f) 10^{18}; 1 quintilhão.
g) 8 quintilhões de grãos.
h) 15 quintilhões de grãos.

23. a) $10\,000 = 10^4$
b) Miríade de miríades: $10^4 \cdot 10^4 = 10^8$ ou 100 000 000.

24. a) $(1{,}25 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^8) = (1{,}25 \cdot 6) \cdot (10^4 \cdot 10^8) = 7{,}5 \cdot 10^{12}$
b) $(4{,}5 \cdot 10^7) : (2{,}5 \cdot 10^4) = (4{,}5 : 2{,}5) \cdot (10^7 : 10^4) = 1{,}8 \cdot 10^3$
c) $(3{,}2 \cdot 10^{-2}) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-6}) = (3{,}2 \cdot 1{,}5) \cdot (10^{-2} \cdot 10^{-6}) = 4{,}8 \cdot 10^{-8}$
d) $(6 \cdot 10^4) \cdot (5{,}5 \cdot 10^6) = (6 \cdot 5{,}5) \cdot (10^4 \cdot 10^6) = 33 \cdot 10^{10} =$
$= 3{,}3 \cdot 10^{11}$

25. a) $10^3 \cdot 10^2 = 10^{3+2} = 10^5$
b) $10^8 : 10^5 = 10^{8-5} = 10^3$
c) $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4$
d) $2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-2} = (2 \cdot 3 \cdot 5)^{-2} = 30^{-2}$
e) $60^3 : 12^3 = (60 : 12)^3 = 5^3$
f) $250^4 : 125^4 = (250 : 125)^4 = 2^4$
g) $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$
h) $(10^{-1})^{-2} = 10^{(-1) \cdot (-2)} = 10^2$

26. a) Em 1 ano, há $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ segundos. Então:
1 ano-luz $= 300\,000 \cdot (365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60) \simeq 9{,}5 \cdot 10^{12}$; aproximadamente $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km.
b) $6 \cdot 9{,}5 \cdot 10^{12} = 57 \cdot 10^{12} = 5{,}7 \cdot 10^{13}$; aproximadamente $5{,}7 \cdot 10^{13}$ km.

27. a) $9{,}8^2 \cdot 9{,}8^3 \cdot 9{,}8^{-1} = 9{,}8^{2+3+(-1)} = 9{,}8^4$
b) $10^8 : 10^5 = 10^{8-5} = 10^3$
c) $a^{10} \cdot b^{10} \cdot c^{10} = (a \cdot b \cdot c)^{10}$
d) $(a \cdot x)^2 = a^2 \cdot x^2$
e) $(-0{,}5)^5 : (-0{,}5)^2 = (-0{,}5)^{5-2} = (-0{,}5)^3$
f) $\left(\dfrac{a}{2}\right)^3 = \dfrac{a^3}{2^3} = \dfrac{a^3}{8}$
g) $\left(\dfrac{2 \cdot a^2}{5}\right)^3 = \dfrac{2^3 \cdot a^{2 \cdot 3}}{5^3} = \dfrac{8a^6}{125}$
h) $(17^5)^{-3} = 17^{5 \cdot (-3)} = 17^{-15}$

28. a) Dividiu 1 000 g por 0,05 g.
$$\begin{array}{r|l} 1\,000{,}00 & 0{,}05 \\ \hline 00\,00 & 20\,000 \end{array}$$
b) $(1 \cdot 10^3) : (5 \cdot 10^{-2}) = (1 : 5) \cdot 10^{3-(-2)} = 0{,}2 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^4$
c) Dividiu 1 L por 20 000.
d) $(1 \cdot 10^0) : (2 \cdot 10^4) = (1 : 2) \cdot 10^{0-4} = 0{,}5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}$

29. a) $\dfrac{10^2 \cdot 10^4}{10^3} = 10^{2+4-3} = 103$ (verdadeiro)
b) $(2x)^{10} = 2^{10} \cdot x^{10} \neq 2 \cdot x^{10}$ (falso)
c) $(5 \cdot 3)^2 = 5^2 \cdot 3^2$ (verdadeiro)
d) $(5 : 3)^2 = 5^2 : 3^2$ (verdadeiro)
e) $(5 + 3)^2 = 8^2 = 64$
$5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$
Assim, $(5 + 3)^2 \neq 5^2 + 3^2$ (falso).
f) $(5 - 3)^2 = 2^2 = 4$
$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$
Assim, $(5 - 3)^2 \neq 5^2 - 3^2$ (falso).

30. a) Em março de 2022, eram $2{,}14 \cdot 10^8$ habitantes, segundo o IBGE (disponível em: https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/index.html; acesso em: 9. mar. 2022).
b) Em março de 2022, eram $8{,}51 \cdot 10^6$ km^2 segundo o IBGE (disponível em: https://www.ibge.gov.br/geociencias/organizacao-do-territorio/estrutura-territorial/15761-areas-dos-municipios.html?=&t=o-que-e; acesso em: 9 mar. 2022).
$(2{,}14 \cdot 10^8) : (8{,}51 \cdot 10^6) = (214 \cdot 10^6) : (8{,}51 \cdot 10^6) \simeq 25{,}1$
Em março de 2022, a densidade demográfica era aproximadamente 25,1 hab./km^2.

31. Em um dia, há $24 \cdot 60 \cdot 60$ s $= 86\,400$ s $= 8{,}64 \cdot 10^4$ s.
Assim, $8{,}64 \cdot 10^{10}$ s são 10^6 dias, ou seja, 1 000 000 dias, ou, ainda, $\dfrac{1\,000\,000}{365}$ anos, ou aproximadamente 2 740 anos. Vai demorar mais de 2 000 anos.

32. a) $3{,}2 \cdot 10^6 = 32 \cdot 10^5$ e $32 \cdot 10^5 > 8{,}4 \cdot 10^5$, logo $3{,}2 \cdot 10^6$ é maior.
b) $6{,}6 \cdot 10^{-11} = 66 \cdot 10^{-12}$ e $66 \cdot 10^{-12} > 3{,}9 \cdot 10^{-12}$, logo $6{,}6 \cdot 10^{-11}$ é maior.

33. a) $2{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}25 \cdot 10^{-2}$ e $0{,}25 \cdot 10^{-2} < 8 \cdot 10^{-2}$, logo $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ é menor.
b) $9{,}9 \cdot 10^{21} = 0{,}099 \cdot 10^{23}$ e $0{,}099 \cdot 10^{23} < 1{,}1 \cdot 10^{23}$, logo $9{,}9 \cdot 10^{21}$ é menor.

34. a) $(8 \cdot 10^{15}) : (2 \cdot 10^{12}) = (8 : 2) \cdot (10^{15} : 10^{12}) = 4 \cdot 10^3$
b) $(4{,}5 \cdot 10^6) \cdot (9{,}2 \cdot 10^4) = (4{,}5 \cdot 9{,}2) \cdot (10^6 \cdot 10^4) = 41{,}4 \cdot 10^{10} =$
$= 4{,}14 \cdot 10^{11}$
c) $(2{,}25 \cdot 10^4) : (9 \cdot 10^6) = (2{,}25 : 9) \cdot (10^4 : 10^6) = 0{,}25 \cdot 10^{-2} =$
$= 2{,}5 \cdot 10^{-3}$
d) $(2 \cdot 10^{-3}) \cdot (5 \cdot 10^{-8}) = 10 \cdot 10^{-3-8} = 10^1 \cdot 10^{-11} = 10^{-10}$

35. a) $(10)^2 = 100$ ou $(-10)^2 = 100$
b) $(4)^3 = 64$
c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$ ou $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$
d) $(12)^2 = 144$ ou $(-12)^2 = 144$
e) $(3)^3 = 27$
f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$
g) $(1)^3 = 1$
h) $(0{,}2)^2 = 0{,}04$ ou $(-0{,}2)^2 = 0{,}04$

Na olimpíada (p. 42)

As invenções de José

$(1 \blacksquare 0) \cdot (1 \blacksquare 1) \cdot (1 \blacksquare 2) \cdot (1 \blacksquare 3) \cdot (1 \blacksquare 4) =$
$= 10 \cdot 200 \cdot 3\,000 \cdot 40\,000 \cdot 500\,000 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10^{15} =$
$= 120 \cdot 10^{15} = 12 \cdot 10^{16}$
Portanto, a multiplicação acima tem 16 zeros. Logo, alternativa **d**.

Na mídia

1. a)

Medida de tempo (em dias)	Quantidade de novas pessoas que receberam ajuda	Representação em forma de potência
10	3	3^1
20	$3 \cdot 3$	3^2
30	$3 \cdot 3 \cdot 3$	3^3
40	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	3^4
50	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	3^5
60	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	3^6
70	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	3^7

b) Nos primeiros 40 dias: $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 3 + 9 + 27 + 81 =$
$= 120$; 120 pessoas.

c) Em 2 meses (60 dias): $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 = 1\,092$; 1 092 pessoas.

2. Após 20 minutos, mais de 100 pessoas terão recebido essa mensagem, pois: $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$; 121 pessoas.
3. Resposta pessoal; depende da quantidade de estudantes da turma.
4. Resposta pessoal.
5. Exemplo de resposta: Atualmente, com o avanço da tecnologia, as informações são transmitidas rapidamente, e muitas *fake news* circulam nas redes sociais. Para evitar esse tipo de ação, não se deve espalhar notícias falsas e, antes de transmitir alguma informação, é preciso verificar se realmente ela é verdadeira.

Capítulo 4

Participe (p. 46)

I. a) 28^2

b) Sim, porque 28 é positivo e $28^2 = 28 \cdot 28 = 784$.

c) ① radiciação (Rafaela extraiu a raiz quadrada de 784.)

② potenciação (Rafaela elevou 28 ao quadrado.)

d) 28

e) 784

f) Como 14 é positivo e $14^2 = 196$, podemos concluir que $\sqrt{196} = 14$.

g) 14

h) $\sqrt{10\,000} = 100$, porque 100 é positivo e $100^2 = 10\,000$.

i) 10 000

II. a) **A**: radiciação (extrair a raiz quadrada); **B**: potenciação (elevar ao quadrado); **C**: potenciação (elevar ao quadrado); **D**: radiciação (extrair a raiz quadrada).

b) n

c) n

d) Quando $n \geqslant 0$; sim.

III. a) 2022; $\sqrt{4\,088\,484}$.

b) Exemplo de resposta: 3,16227766.

IV. a) 7,1; 7,07; 7,071.

b) 22,4; 22,36; 22,361.

c) 70,7; 70,71; 70,711.

Atividades

1. $\sqrt{4} = 2$, portanto, o lado mede 2 cm.

$\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$, portanto, o lado mede 2,5 cm.

$\sqrt{9} = 3$, portanto, o lado mede 3 cm.

2. a) $\sqrt{16} = 4$

b) $\sqrt{100} = 10$

c) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

d) $\sqrt{225} = 15$

e) $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$

f) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

g) $\sqrt{1} = 1$

h) $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$

i) $\sqrt{0} = 0$

j) $\sqrt{900} = 30$

k) $\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$

l) $\sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}$

3. a) $\sqrt{1000} \simeq 31{,}62$ b) $\sqrt{1500} \simeq 38{,}73$

4. A lajota de 1 m² de medida de área deve ter lado medindo 1 m, pois $\sqrt{1} = 1$. A lajota de 2 m² de medida de área deve ter lado medindo 1,41 m, pois $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$. A lajota de 3 m² de medida de área deve ter lado medindo 1,73 m, pois $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.

5. a) $\sqrt{49} = 7$

b) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

c) $\sqrt{121} = 11$

d) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

e) $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

f) $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$

6. a) $\sqrt{625} = 25$. Verdadeira, porque $25 > 0$ e $25^2 = 625$.

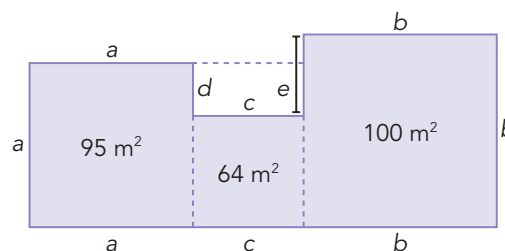
b) $\sqrt{62{,}5} = 2{,}5$. Falsa, porque $2{,}5^2 = 6{,}25$.

c) $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$. Verdadeira, porque $2{,}5 > 0$ e $2{,}5^2 = 6{,}25$.

d) $\sqrt{625} = -25$. Falsa, porque $-25 < 0$.

7. a) $3\sqrt{16} - \sqrt{25} = 3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$

b) $\sqrt{3 \cdot 16 + 1} = \sqrt{48 + 1} = \sqrt{49} = 7$

8.

As medidas a, b, c, d e e na figura são determinadas da seguinte maneira: $a = \sqrt{95}$; $b = \sqrt{100} = 10$; $c = \sqrt{64} = 8$; $d = a - c = \sqrt{95} - 8$; $e = b - c = 10 - 8 = 2$.

Então, a medida de perímetro da figura que representa o salão é:

$a + a + a + b + b + b + c + c + d + e =$

$= \sqrt{95} + \sqrt{95} + \sqrt{95} + 10 + 10 + 10 + 8 + 8 + \sqrt{95} - 8 + 2 =$

$= 4\left(10 + \sqrt{95}\right) \simeq 78{,}987$; aproximadamente 79 m.

Participe (p. 48)

I. a) 0 e 1.

b) $4^0 = 1$

c) $4^1 = 4$

d) Entre 1 e 4.

e) $m \cdot n$

f) $4^{0,5} = \left(2^2\right)^{0,5} = 2^{2 \cdot 0,5} = 2^1 = 2$

g) Sim, porque $1 < 2 < 4$.

II. a) $\frac{1}{2}$

b) $4^{\frac{1}{2}}$

c) $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 4^1 = 4$

d) Raiz quadrada de a; $\sqrt{a}$.

e) No item **c** desta questão **II**, descobrimos que $4^{\frac{1}{2}}$ elevado ao quadrado dá 4. Assim, descobrimos que $4^{\frac{1}{2}}$ é a raiz quadrada de 4. Simbolicamente, $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}$.

9. a) $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

10. a) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

b) $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $(0{,}16)^{0{,}5} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

11. a) $\sqrt{36} = 36^{\frac{1}{2}} = (6^2)^{\frac{1}{2}} = 6^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 6^1 = 6$

b) $\sqrt{256} = 256^{\frac{1}{2}} = (16^2)^{\frac{1}{2}} = 16^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 16^1 = 16$

c) $\sqrt{1{,}21} = 1{,}21^{\frac{1}{2}} = (1{,}1^2)^{\frac{1}{2}} = 1{,}1^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1{,}1^1 = 1{,}1$

d) $\sqrt{\frac{49}{4}} = \left(\frac{49}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{7}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{7}{2}\right)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = \left(\frac{7}{2}\right)^1 = \frac{7}{2}$

12. Exemplo de resposta: Daniela adora flores e fez um canteiro quadrado de 4 m^2 de medida de área, com suas flores preferidas. Qual é a medida de cada lado desse canteiro? Resposta $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$. A medida de cada lado é 2 m.

13. a) $\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$

$$\begin{array}{r|l} 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

b) $\sqrt{1296} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4} = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

$$\begin{array}{r|l} 1\,296 & 2 \\ 648 & 2 \\ 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

c) $\sqrt{729} = \sqrt{3^6} = 3^2 = 27$

$$\begin{array}{r|l} 729 & 3 \\ 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

d) $\sqrt{5625} = \sqrt{5^4 \cdot 3^2} = 5^2 \cdot 3 = 75$

$$\begin{array}{r|l} 5\,625 & 3 \\ 1\,875 & 3 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

14. a) $256 = 16^2 = 2^8$; é inteiro quadrado perfeito.

$$\begin{array}{r|l} 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

b) $392 = 2^3 \cdot 7^2$; não é inteiro quadrado perfeito, pois em sua forma fatorada há expoente 3, e o 3 não é par.

$$\begin{array}{r|l} 392 & 2 \\ 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

15. a) $\sqrt{784} = 28$

b) $\sqrt{11664} = 108$

c) $\sqrt{948} = 30{,}7896086$

d) $\sqrt{9966} = 99{,}8298553$

Os itens **a** e **b** são inteiros quadrados perfeitos.

16. a) $A = 625$. É inteiro quadrado perfeito, pois $625 = 5^4$.

b) $B = 576$. É inteiro quadrado perfeito, pois $576 = 2^6 \cdot 3^2$.

c) $A - B = 625 - 576 = 49 = 7^2$, logo $A - B$ é inteiro quadrado perfeito.

17. a) Temos $225 = 3^2 \cdot 5^2$ e $256 = 2^8$. Assim:

$$\sqrt{\frac{225}{256}} = \sqrt{\frac{3^2 \cdot 5^2}{2^8}} = \frac{3 \cdot 5}{2^4} = \frac{15}{16}.$$

b) Temos $5{,}76 = \frac{576}{100}$ e, ainda, $576 = 2^6 \cdot 3^2$ e $100 = 2^2 \cdot 5^2$. Assim:

$$\sqrt{5{,}76} = \sqrt{\frac{576}{100}} = \sqrt{\frac{2^6 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 5^2}} = \frac{2^3 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{24^{:2}}{10_{:2}} = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

c) Temos $4 = 2^2$ e $1\,089 = 3^2 \cdot 11^2$. Assim:

$$\sqrt{\frac{4}{1089}} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2 \cdot 11^2}} = \frac{2}{3 \cdot 11} = \frac{2}{33}.$$

d) Temos $0{,}4225 = \frac{4\,225}{10\,000}$ e, ainda, $4\,225 = 5^2 \cdot 13^2$ e $10\,000 = 10^4$. Assim:

$$\sqrt{0{,}4225} = \sqrt{\frac{4\,225}{10\,000}} = \sqrt{\frac{5^2 \cdot 13^2}{10^4}} = \frac{5 \cdot 13}{10^2} = \frac{65}{100} = 0{,}65.$$

18. a) $\sqrt{25} = 5$, pois $5^2 = 25$.

b) $\sqrt{2\,500} = 50$, pois $50^2 = 2\,500$.

c) $\sqrt{100} = 10$, pois $10^2 = 100$.

d) $\sqrt{10\,000} = 100$, pois $100^2 = 10\,000$.

e) $\sqrt{\frac{1}{400}} = \frac{1}{20}$, pois $\left(\frac{1}{20}\right)^2 = \frac{1}{400}$.

f) $\sqrt{\frac{49}{900}} = \frac{7}{30}$, pois $\left(\frac{7}{30}\right)^2 = \frac{49}{900}$.

g) $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$, pois $(0{,}7)^2 = 0{,}49$.

h) $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, pois $(1{,}2)^2 = 1{,}44$.

19. a) $\sqrt{65} \simeq 8{,}06$; medida de perímetro: $4 + 7 + 8{,}06 = 19{,}06$; ou seja, 19,06 cm.

b) $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$ e $\sqrt{5} \simeq 2{,}24$; medida de perímetro:

$\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + 5 = 1{,}73 + 1{,}73 + 2{,}24 + 5 = 10{,}70$; ou seja, 10,70 cm.

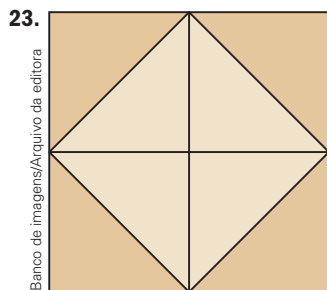
20. O século XX foi de 1901 a 2000. Temos: $43^2 = 1\,849$; $44^2 = 1\,936$; e $45^2 = 2\,025$; então o único ano do século XX que é quadrado perfeito é 1936.

21. Temos $3\,000 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^3$. Obteremos um inteiro quadrado perfeito (expoentes pares na decomposição) se multiplicarmos por $2 \cdot 3 \cdot 5$, isto é, por 30.

22. $\sqrt{1\,764} = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

O lado do quadrado mede 42 cm.

23.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Medida de área do quadrado menor: 36 cm^2.

Medida de área do quadrado maior: 36 cm^2 + 36 cm^2 = 72 cm^2.

Medida do lado do quadrado maior: $\sqrt{72} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = 6\sqrt{2} \simeq 6 \cdot 1{,}4142 \simeq 8{,}49$;
ou seja, aproximadamente 8,49 cm.

24. Exemplo de resposta: O piso de um escritório retangular cuja medida de área é 6,93 m^2 está forrado por 77 lajotas quadradas, todas de mesmo tamanho. Qual é a medida do lado de cada lajota? Resposta: 0,3 m = 30 cm.

25. $320 : 5 = 64$; medida do lado do tatame: $\sqrt{64}$ m = 8 m.

26. Medida da largura: x.
Medida do comprimento: $3x$.
Medida de área: $x \cdot 3x = 675$.
$3x^2 = 675 \Rightarrow x^2 = 675 : 3 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x = \sqrt{225} \Rightarrow x = 15$
Medida da largura: 15 m; medida do comprimento: $3x = 3 \cdot 15$ m = 45 m.

27. Medida de área de cada quadrado que é casa do tabuleiro de xadrez: $2\,304\ cm^2 : 64 = 36\ cm^2$.

Medida de cada lado da casa: $\sqrt{36\ cm^2} = \sqrt{(6\ cm)^2} = 6$ cm.

28. a) Medida de área do retângulo: $4 \cdot 2{,}25\ cm^2 = 9\ cm^2$.

Medida de área do quadrado equivalente ao retângulo: $x^2 = 9\ cm^2$.

Medida do lado do quadrado: $\sqrt{9\ cm^2} = \sqrt{(3\ cm)^2} = 3$ cm.

b) Medida de área do triângulo: $\dfrac{5\ cm \cdot 4{,}9\ cm}{2} = \dfrac{24{,}5}{2}\ cm^2 = 12{,}25\ cm^2$.

Medida de área do quadrado equivalente ao triângulo: $x^2 = 12{,}25\ cm^2$.

Medida do lado do quadrado: $\sqrt{12{,}25\ cm^2} = \sqrt{(3{,}5\ cm)^2} = 3{,}5$ cm.

29. Medida da largura do terreno: x.
Medida do comprimento do terreno: $2x$.
Medida de área do terreno: $x \cdot 2x = 1\,250$.
$2x^2 = 1\,250$
$x^2 = \dfrac{1\,250}{2}$
$x^2 = 625$
$x = \sqrt{625}$
$x = 25$; a largura do terreno mede 25 m.
$2x = 2 \cdot 25 = 50$; o comprimento do terreno mede 50 m.
Medida do comprimento da cerca: 25 m + 25 m + 50 m + 50 m = 150 m.

30. Medida de área do painel: $120\ cm \cdot 80\ cm = 9\,600\ cm^2$.
Medida de área de cada pastilha: $9\,600\ cm^2 : 600 = 16\ cm^2$.
Medida do lado de cada pastilha: $\sqrt{16\ cm^2} = 4$ cm.

31. Exemplo de resposta: A metade da medida de área de um terreno quadrado é 72 m^2. Quanto mede o lado do terreno? Resposta: Medida de área do terreno: $2 \cdot 72\ m^2 = 144\ m^2$. Medida do lado do terreno: $\sqrt{144} = 12$; 12 m.

Na Unidade

1. $1\,110\,000\,000 = 1{,}11 \cdot 10^9$. Logo, alternativa **c**.
2. 40 000 km = 40 000 000 m = $4 \cdot 10^7$. Logo, alternativa **c**.

3. 10 L de óleo $\rightarrow 10^7$ L de água potável contaminada.
$10 \cdot 100$ L = 1 000 L de óleo $\rightarrow 10^7 \cdot 100$ L $= 10^7 \cdot 10^2$ L $= 10^9$ L de água potável contaminada.
Logo, alternativa **e**.

4. $(1 \cdot 10^{-4}) : (8 \cdot 10^{-7}) = (1 : 8) \cdot (10^{-4} : 10^{-7})$
$0{,}125 \cdot 10^{-4+7} = 0{,}125 \cdot 10^3 = 1{,}25 \cdot 10^{-1} \cdot 10^3 = 1{,}25 \cdot 10^2 = 125$
Logo, alternativa **a**.

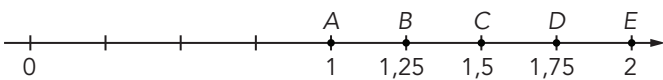
5. $\dfrac{4^6 \cdot 4^{-2}}{8^4} = \dfrac{4^{6-2}}{8^4} = \dfrac{4^4}{8^4} = \dfrac{(2^2)^4}{(2^3)^4} = \dfrac{2^8}{2^{12}} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}.$
Logo, alternativa **d**.

6. $\sqrt{110{,}25} = \sqrt{\dfrac{11\,025}{100}} = \sqrt{\dfrac{105^2}{10^2}} = \dfrac{105^{:5}}{10_{:5}} = \dfrac{21}{2} = 10{,}5.$
Logo, alternativa **a**.

7. Os números das alternativas terminam em 4. Um quadrado perfeito termina em 4 quando é o quadrado de um número que termina em 2 ou em 8. As alternativas estão entre 2 000 e 2 500 = 50^2. Por tentativa, encontramos $48^2 = 2\,304$. Logo, alternativa **c**.

8. $\sqrt{1{,}96} = \sqrt{1{,}4^2} = 1{,}4$

A B C D E
0 1 1,25 1,5 1,75 2

Banco de imagens/Arquivo da editora

Logo, $\sqrt{1{,}96}$ está entre *B* e *C*. Logo, alternativa **b**.

9. a) $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \sqrt{\dfrac{3^2}{2^2}} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ (decimal exato)

b) $\sqrt{\dfrac{49}{16}} = \sqrt{\dfrac{7^2}{4^2}} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$ (decimal exato)

c) $\sqrt{\dfrac{81}{64}} = \sqrt{\dfrac{9^2}{8^2}} = \dfrac{9}{8} = 1{,}125$ (decimal exato)

d) $\sqrt{\dfrac{25}{144}} = \sqrt{\dfrac{5^2}{12^2}} = \dfrac{5}{12} = 0{,}41666666\ldots$ (dízima periódica)

Logo, alternativa **d**.
Recorde que uma fração irredutível gera uma dízima periódica quando o denominador tem fator primo diferente de 2 e de 5. O denominador 12 tem o fator primo 3, então $\dfrac{5}{12}$ gera dízima periódica.

10. Medida de área do salão retangular: 9 m · 15 m = 135 m^2.
Medida de área de cada lajota quadrada: 135 m^2 : 240 = 0,5625 m^2.
Medida do lado de cada lajota: $\sqrt{0{,}5625 \text{ m}^2} = \sqrt{(0{,}75 \text{ m})^2} = 0{,}75$ m.
Logo, alternativa **a**.

Unidade 3

Abertura (p. 57)

Na charge, o humor apresentado é devido ao fato de que o aparelho GPS mostra a localização exata deles, mas não os ajuda a se comunicar em uma língua estrangeira.

A expressão "tronco linguístico" significa um conjunto de famílias linguísticas, ou seja, um conjunto de línguas que têm origem em uma mesma língua, muito antiga, que não é mais falada, e, por isso, é difícil perceber similaridades entre as línguas que vieram dela.

A relação entre as 3 imagens de abertura da Unidade é que todas mostram a utilização do GPS: para que uma pessoa saiba qual o caminho para ir ao seu destino (imagem de fundo) ou qual a sua localização (charge), além de servir para localizar um ser que se move (onça-pintada).

O processo de funcionamento do GPS se chama **triangulação**, pois, em qualquer lugar da superfície terrestre que se encontre um receptor, ele sempre terá o alcance de pelo menos **3** satélites que enviam sinais para esse receptor, que calcula quanto tempo cada sinal leva para chegar nele, levando em conta a medida de velocidade de propagação do sinal. O ponto de intersecção desses dados permite identificar a exata localização do receptor.

Capítulo 5

Participe (p. 58)

Seguindo as orientações, ao final do experimento o estudante deve ser capaz de perceber que quando dois triângulos têm todas as mesmas medidas iguais, tanto as de ângulos quanto as de lados, eles são congruentes. Ele também deve perceber que não é necessário verificar todas as medidas dos ângulos e dos lados dos triângulos para saber se eles são congruentes, pois, ao verificarmos algumas dessas medidas, podemos afirmar se as outras serão ou não congruentes. Esses casos estão demonstrados em cada um dos experimentos realizados, a saber:

Experimento **1**: O estudante deve perceber que, apesar de todos os triângulos apresentarem as mesmas medidas de ângulos internos, isso não é suficiente para afirmar que os triângulos são ou não congruentes. Apenas os triângulos 1 e 4 também apresentam as medidas dos lados congruentes, logo só eles são os triângulos congruentes.

Experimento **2**: O estudante deve perceber que, apesar de todos os triângulos apresentarem ângulo de 90°, apenas nos triângulos 3 e 4 as medidas dos lados que formam esse ângulo são iguais (esses lados medem 3 cm nos dois triângulos); logo, apenas os triângulos 3 e 4 são congruentes.

Experimento **3**: O estudante deve perceber que, apesar de esses triângulos apresentarem dois lados com mesma medida, o ângulo formado por esses dois lados é diferente em todos os triângulos; logo, nenhum par desses triângulos é congruente.

Experimento **4**: O estudante deve perceber que, para cada triângulo do experimento **3**, um triângulo do experimento **4** é congruente a ele, pois, em cada par de triângulos, o ângulo formado pelos dois lados congruentes também apresenta a mesma medida nos dois triângulos; logo, temos 4 pares de triângulos congruentes.

Atividades

1. $\overline{XY} \cong \overline{RS}$; $\hat{X} \cong \hat{R}$.
$\overline{YZ} \cong \overline{ST}$; $\hat{Y} \cong \hat{S}$.
$\overline{ZX} \cong \overline{TR}$; $\hat{Z} \cong \hat{T}$.

2. $3x = 2x + 10°$
$3x - 2x = 10°$
$x = 10°$
$5y = y + 48°$
$5y - y = 48°$
$y = 12°$

3. $\overline{AC} \cong \overline{EC}$; $\overline{BC} \cong \overline{DC}$; $\overline{AB} \cong \overline{ED}$; $\hat{A} \cong \hat{E}$; $\hat{B} \cong \hat{D}$; $\hat{1} \cong \hat{2}$.

4. $\overline{AC} \cong \overline{CE}$; $\overline{BC} \cong \overline{DE}$; $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\hat{B} \cong \hat{D}$; $\hat{A} \cong \hat{2}$; $\hat{1} \cong \hat{E}$.

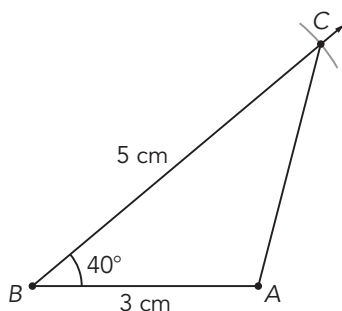
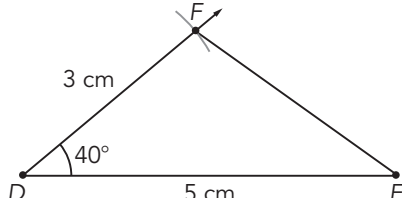
5. $\overline{AB} \cong \overline{MN}$; $\hat{A} \cong \hat{M}$.
$\overline{BC} \cong \overline{NP}$; $\hat{B} \cong \hat{N}$.
$\overline{AC} \cong \overline{MP}$; $\hat{C} \cong \hat{P}$.

6. De acordo com o enunciado, temos que:
$x = 2y$ ①
$2x = 3y + 8$ ②
Substituindo ① em ②:
$2 \cdot (2y) = 3y + 8$
$4y = 3y + 8$
$4y - 3y = 8$
$y = 8$

Substituindo $y = 8$ em (1):
$x = 2 \cdot 8$
$x = 16$

7. a)

b)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

8. Sim, pelo caso LAL, pois $\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\hat{B} \cong \hat{D}$ e $\overline{BC} \cong \overline{DE}$.

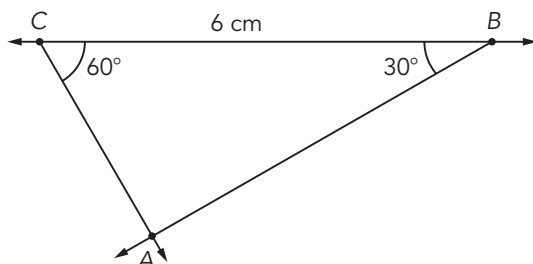
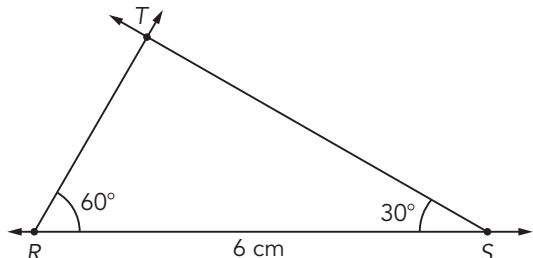
9. $\hat{A} \cong \hat{F}$; $\hat{B} \cong \hat{D}$; $\hat{C} \cong \hat{E}$.

10. 30° e 60°.

11. 2 cm e $2\sqrt{3}$ cm.

12. a)

b)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

13. Sim, pelo caso ALA, pois $\hat{B} \cong \hat{S}$, $\overline{BC} \cong \overline{RS}$ e $\hat{C} \cong \hat{R}$.

14. $\overline{BC} \cong \overline{RS}$, $\overline{BA} \cong \overline{ST}$ e $\overline{AC} \cong \overline{TR}$, $AC = TR = 3$ cm; $BA = ST = 5{,}2$ cm.

Participe (p. 66)

a) Os ângulos adjacentes ao lado de um triângulo são os que estão nas extremidades do segmento de reta que forma esse lado; logo, observando a figura dada, os ângulos adjacentes ao lado de 38,6 mm medem 60° e 45°.

b) O ângulo que é oposto ao lado de um triângulo é aquele que não está em nenhuma das extremidades do segmento de reta que forma esse lado; logo, observando a figura dada, o ângulo oposto ao lado de 38,6 mm é o ângulo de 75°.

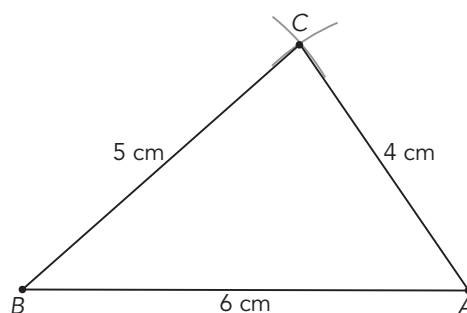
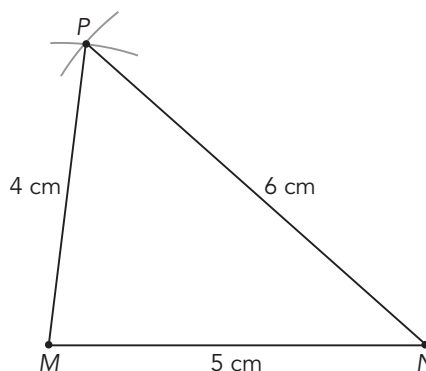
c) O ângulo que é oposto ao lado de um triângulo é aquele que não está em nenhuma das extremidades do segmento de reta que forma esse lado; logo, observando a figura dada, o ângulo oposto ao lado de 34,6 mm é o ângulo de 60°.

d) O lado que é oposto à abertura de um ângulo do triângulo é aquele que não está em nenhum dos segmentos de reta que formam esse ângulo; logo, observando a figura dada, o lado oposto ao ângulo de 45° é o lado que mede 28,3 mm.

e) Os lados adjacentes à abertura do ângulo de 45° são os lados que formam esse ângulo; logo, observando a figura dada, esses lados medem 38,6 mm e 34,6 mm.

15. a)

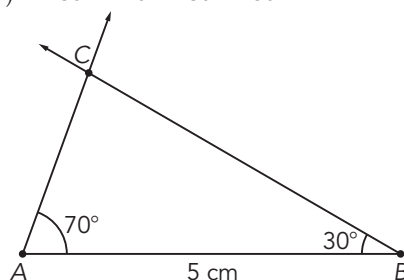
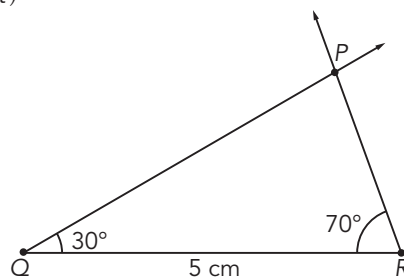
b)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

16. Sim, pelo caso LLL, pois $\overline{AB} \cong \overline{NP}$, $\overline{BC} \cong \overline{MN}$ e $\overline{AC} \cong \overline{MP}$.

17. $\hat{A} \cong \hat{P}$, $\hat{B} \cong \hat{N}$ e $\hat{C} \cong \hat{M}$.

18. a) $\text{med}(\hat{B}) = 180° - 70° - 80° = 30°$

b) $\text{med}(\hat{Q}) = 180° - 70° - 80° = 30°$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

19. Sim, pelo caso LAA_o, pois $\overline{AB} \cong \overline{QR}$, $\hat{A} \cong \hat{R}$ e $\hat{C} \cong \hat{P}$. Ou pelo caso ALA, calculando as medidas de $\hat{B}$ e $\hat{Q}$.

20. $\overline{AB} \cong \overline{RQ}$; $\overline{BC} \cong \overline{QP}$; $\overline{CA} \cong \overline{PR}$.

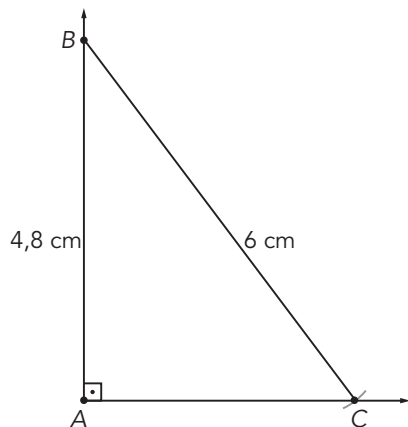
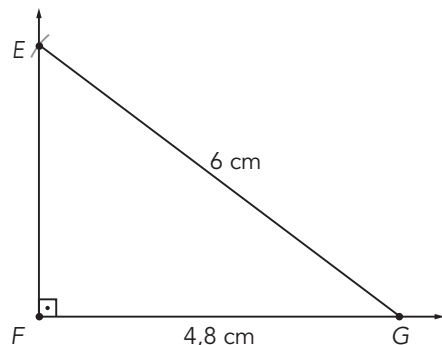
21. a) 4 cm

b) 5 cm

22. a)

4,8 cm; 6 cm; B; A; C

b)

E; 6 cm; F; 4,8 cm; G

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

23. Sim, pelo caso cateto-hipotenusa.

24. $\hat{A} \cong \hat{F}$; $\hat{B} \cong \hat{G}$; $\hat{C} \cong \hat{E}$.

25. $\triangle DEF \cong \triangle GHI$ pelo caso cateto-hipotenusa.

26. a) 1 ≅ 4; 2 ≅ 6; 3 ≅ 5; todos pelo caso ALA.

b) 1 ≅ 5; 2 ≅ 4; 3 ≅ 6; todos pelo caso LLL.

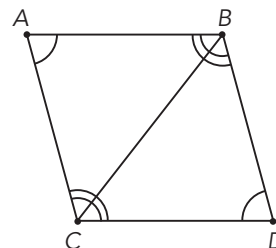
c) 1 ≅ 5; 2 ≅ 4; 3 ≅ 6; todos pelo caso LAA_o.

27. a) LLL; $x = 40°$.

b) LAL; $x = 5$ cm.

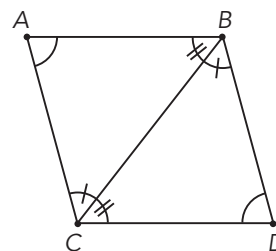
c) LAL; $x = 20$ mm.

28. Considerando o paralelogramo dado, vamos traçar a diagonal $\overline{BC}$:

A; B; C; D

Banco de imagens/Arquivo da editora

A diagonal $\overline{BC}$ é uma transversal das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são alternos internos, logo, são congruentes.

Essa diagonal $\overline{BC}$ também é transversal das retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$, então os ângulos $C\hat{B}D$ e $A\hat{C}B$ são alternos internos e, por isso, são congruentes.

A; B; C; D

Banco de imagens/Arquivo da editora

Traçando essa diagonal, também notamos que o paralelogramo é dividido em dois triângulos: $\triangle ACB$ e $\triangle DBC$. Esses triângulos têm um dos lados em comum: lado $\overline{BC}$ (que é a diagonal do paralelogramo).

$\triangle ACB \cong \triangle DBC$ pelo caso ALA (ângulo, lado, ângulo), pois: $A\hat{B}C \cong B\hat{C}D$. BC é comum aos dois triângulos e $A\hat{C}B \cong C\hat{B}D$.

Como esses dois triângulos são congruentes, todos os lados correspondentes são congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ e os outros ângulos correspondentes também são congruentes: $B\hat{A}C \cong C\hat{D}B$.

Logo, provamos por congruência de triângulos que: os lados opostos são congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, e os ângulos opostos também são congruentes: $B\hat{A}C \cong C\hat{D}B$ e $A\hat{B}D \cong A\hat{C}D$.

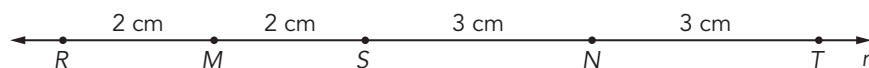
29. a) ALA; $x = 25$.

b) ALA; $x = 15$.

Capítulo 6

Participe (p. 73)

Seguindo as orientações do enunciado, temos:

2 cm; 2 cm; 3 cm; 3 cm; R; M; S; N; T; r

Banco de imagens/Arquivo da editora

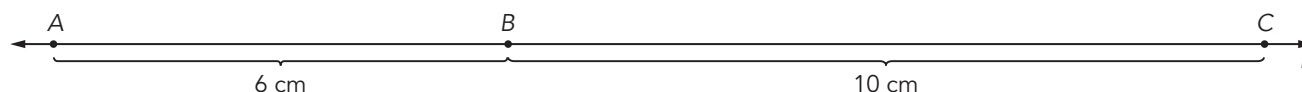
a) $RT = 2 + 2 + 3 + 3 = 10$; ou seja, 10 cm.

b) $MN = 2 + 3 = 5$; ou seja, 5 cm.

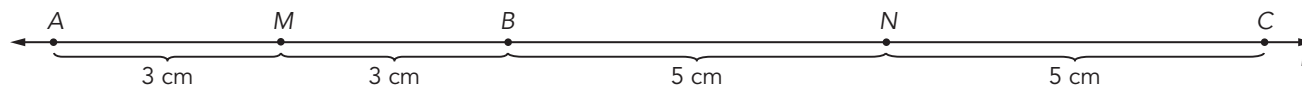
c) $MT = 2 + 3 + 3 = 8$; ou seja, 8 cm.

Atividades

1. a)

A; B; C; r; 6 cm; 10 cm

$AC = AB + BC = 6 \text{ cm} + 10 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$

b)

A; M; B; N; C; r; 3 cm; 3 cm; 5 cm; 5 cm

$MN = 3 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

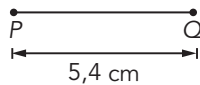
2. a) $AP = x + 6$
$PB = x$
$x + 6 + x = 20$
$2x = 20 - 6$
$2x = 14$
$x = 7$; ou seja, 7 cm.

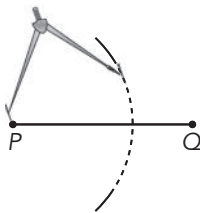
b) $AC = 3x$
$BC = x + 2$
$20 + x + 2 = 3x$
$x + 22 = 3x$
$x - 3x = -22$
$-2x = -22$
$2x = 22$
$x = 11$; ou seja, 11 cm.

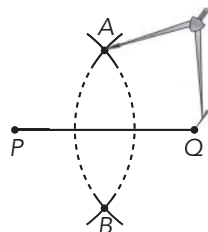
3. $2x + x + 7 = 4x - 5$
$3x + 7 = 4x - 5$
$3x - 4x = -5 - 7$
$-x = -12$
$x = 12$
$AB = 2x = 2 \cdot 12 = 24$

4. As imagens não estão representadas com medidas reais.

a) Com o auxílio da régua ou do compasso, trace o segmento de reta $\overline{PQ}$ de medida 5,4 cm.

P Q
5,4 cm

b) Considerando o segmento de reta representado para o item **a**, com o auxílio do compasso com abertura maior do que a metade de $\overline{PQ}$, fixamos a ponta-seca em P e traçamos um arco.

P Q

Mantendo a abertura do compasso, fixamos a ponta-seca em Q e traçamos outro arco. Dessa maneira, temos os pontos A e B, que são as intersecções dos arcos.

A P Q B

Traçamos a reta que une os pontos A e B e chamamos de M o ponto em que $\overline{AB}$ intersecta $\overline{PQ}$.

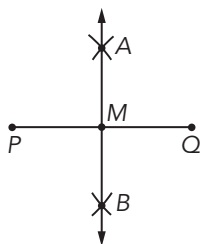
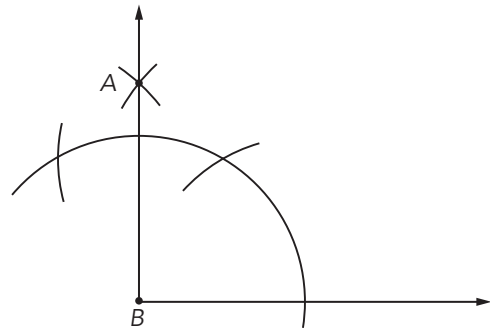
A M P Q B

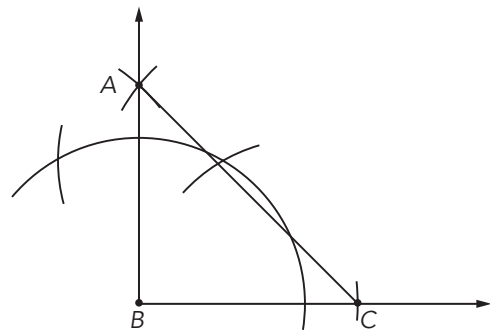
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

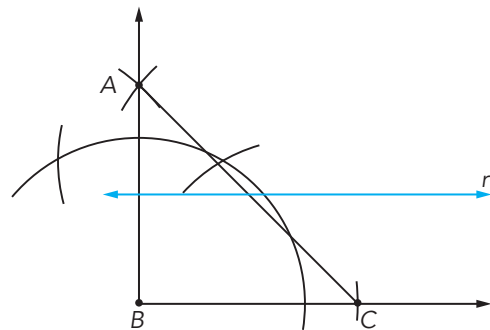
c) $PM = \frac{5,4}{2}$ cm $= 2,7$ cm

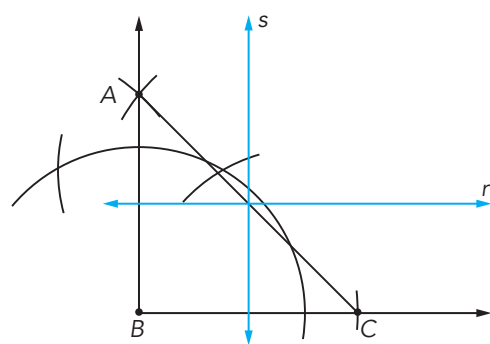
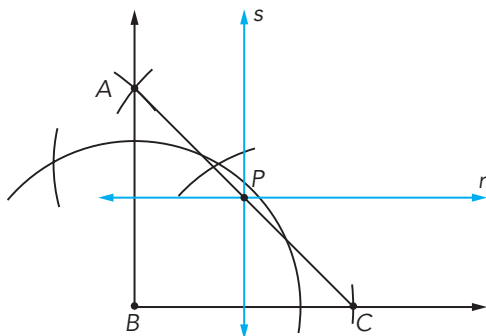
5. 1º) Construímos um ângulo reto de vértice B.

A B

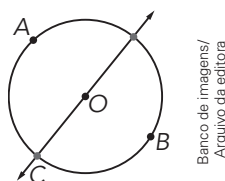
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2º) Com a mesma abertura de $\overline{AB}$, marcamos o ponto C e depois unimos os pontos A e C, formando o triângulo retângulo isósceles ABC.

A B C

a) Traçamos a mediatriz do lado $\overline{AB}$, seguindo os passos da construção de mediatriz dados no livro, e a chamamos de r.

A r B C

b) Traçamos a mediatriz do lado $\overline{BC}$, seguindo os passos da construção de mediatriz dados no livro, e a chamamos de s.

s A r B C

c) Chamamos de P a intersecção de r com s, conforme a figura a seguir:

Banco de imagens/Arquivo da editora

d) Analisando a figura do item **c**, notamos que P é o centro da circunferência que passa pelos vértices A, B e C do triângulo; logo, as medidas dos segmentos de reta $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$ são iguais.

6. a) Usando régua e compasso, trace a mediatriz em relação aos pontos A e B. Depois determine os pontos de intersecção da mediatriz com a circunferência, sendo esses pontos as posições das barracas para venda de alimentos.

Banco de imagens/Arquivo da editora

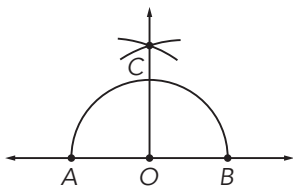
b) Foram marcados 2 pontos de intersecção com a circunferência, pois a mediatriz traçada em relação aos pontos A e B tem 2 pontos de intersecção com a circunferência. Sendo assim, existem duas maneiras de se posicionar as barracas de venda de alimentos.

c) O termo "afro-brasileiro" designa pessoas e objetos culturais e materiais de origem do continente africano.

d) Exemplo de resposta: Os povos africanos contribuíram para a cultura brasileira em aspectos como dança, música, religião e culinária. Instrumentos musicais como berimbau e agogô e comidas como acarajé e vatapá são típicos da cultura africana e também pertencem à cultura brasileira.

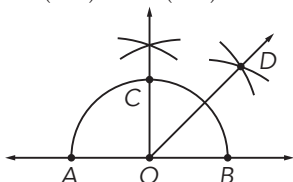
Participe (p. 76)

a) O ângulo raso $A\hat{O}B$ mede 180°; as duas semirretas que compõem o ângulo formam uma reta.

b)

c) $med(A\hat{O}B) = 180°$

$med(A\hat{O}C) = med(\text{bissetriz de } A\hat{O}B) = \dfrac{med(A\hat{O}B)}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$

d) $med(C\hat{O}B) = med(A\hat{O}C) = 90°$

e)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

7. $3x - 5° = 2x + 10°$

$3x - 2x = 10° + 5°$

$x = 15°$

8. $x + 10° = y - 10°$ (I)

$2y + (y - 10°) + (x + 10°) = 180°$ (II)

De (I), vem $x = y - 20°$.

De (II), vem $3y + x = 180°$.

Substituindo (I) em (II), temos:

$3y + (y - 20°) = 180°$

$y = 50°$

Substituindo $y = 50°$ em (I), temos:

$x = 50° - 20°$

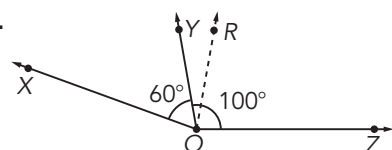
$x = 30°$

9. a) $med(R\hat{V}T) = 70° + 40° = 110°$

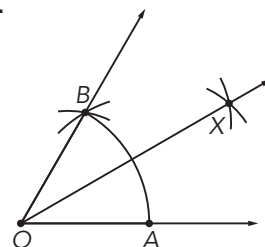
b) $med(D\hat{V}S) = 35°$; $med(S\hat{V}C) = 20°$;

$med(C\hat{V}D) = 35° + 20° = 55°$.

10.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$med(Z\hat{O}R) = \dfrac{100° + 60°}{2} = \dfrac{160°}{2} = 80°$

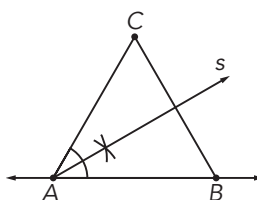
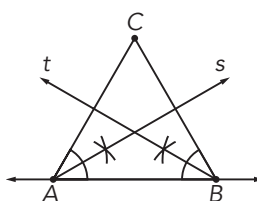
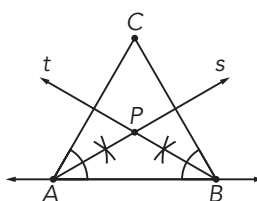
$med(Y\hat{O}R) = 100° - 80° = 20°$

11.

Banco de imagens/Arquivo da editora

A propriedade que todos os pontos de $\overrightarrow{OX}$ têm é que eles distam igualmente de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

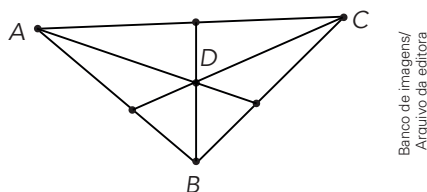
12. a)

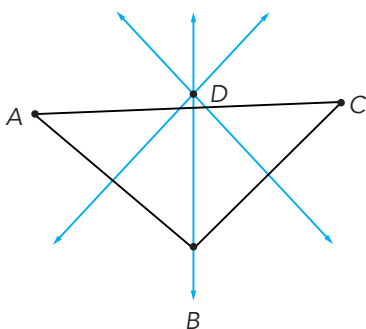
b)

c)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

d) As medidas de distância de P até cada lado do triângulo ABC são iguais.

Participe (p. 77)

a) Opção **1**: A flor deve estar à mesma medida de distância das estacas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$; $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.
Esse ponto é o encontro das bissetrizes dos ângulos $A\hat{B}C$; $A\hat{C}B$ e $B\hat{A}C$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Opção **2**: A flor deve estar à mesma medida de distância das estacas A, B e C.
Esse ponto é o encontro das mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$; $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

A opção mais viável é a opção **1**, pois a planta ficará a uma mesma medida de distância de todos os lados do canteiro; além disso, na opção **2**, o ponto que representa a posição em que a planta deve ser semeada está fora do canteiro.

b) O ponto em que a planta deve ser semeada, que ficará a uma mesma medida de distância dos três lados do canteiro, é chamado de incentro, ponto de encontro das 3 bissetrizes de um triângulo.

13. a) Se $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, então $x = 50°$.
$y = 180° - (50° + x) = 180° - (50° + 50°) =$
$= 180° - 100° = 80°$

b) $\text{med}(\widehat{C_e}) = 180° - 110° = 70°$

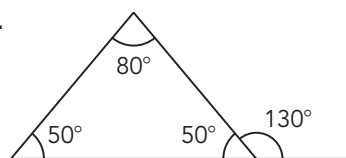
Se $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, então $x = 70°$.
$y = 180° - (70° + 70°) = 180° - 140° = 40°$

14. $2x - 20° = x + 30°$
$2x - x = 30° + 20°$
$x = 50°$

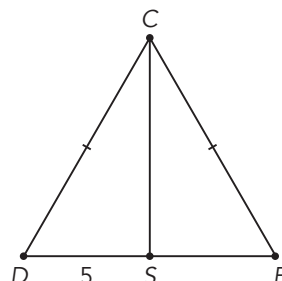
15. a) $\text{med}(\hat{C}) = x + 15°$
$x + 15° + x + 15° + x = 180°$
$3x = 180° - 30°$
$3x = 150°$
$x = 50°$

b) $x = 180° - 4x$
$5x = 180°$
$x = 36°$

c) $2 \cdot (180° - 2x) + 80° = 180°$
$360° - 4x = 180° - 80°$
$4x = 100° - 360°$
$4x - 260°$
$x = \frac{260°}{4}$
$x = 65°$

16.

Banco de imagens/Arquivo da editora

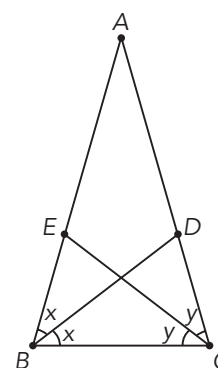
17. $2x - 40° = x + 45°$
$2x - x = 45° + 40°$
$x = 85°$
$\text{med}(\widehat{Q_e}) = 2 \cdot 85° - 40° = 170° - 40° = 130°$
$\text{med}(\hat{R}) = 180° - 130° = 50°$
Logo: $y = 50°$.

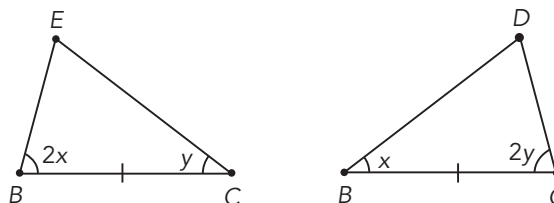
18. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Se $\overline{DS}$ mede 5 cm, então $ES = 5$ cm e $\text{med}(C\hat{S}D) = 90°$.

19. Se $\overline{AM}$ é mediana, então $y = \text{med}(A\hat{M}B) = 90°$.

Se $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, então:
$x = 180° - (90° + 40°) = 180° - 130° = 50°$

20.
- O triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$; portanto $\hat{B} \cong \hat{C}$.
- $\overline{BD}$ é bissetriz de $\hat{B}$, então: $\text{med}(\hat{B}) = 2x$.
- $\overline{CE}$ é bissetriz de $\hat{C}$, então: $\text{med}(\hat{C}) = 2y$.
- Como $\hat{B} \cong \hat{C}$, temos: $2x = 2y$ e $x = y$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

- Comparemos os triângulos:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{C} \Rightarrow 2x = 2y \\ \overline{BC} \cong \overline{BC} \\ \hat{C} \cong \hat{B} \Rightarrow y = x \end{array}\right\} \overset{ALA}{\Rightarrow} \overline{CE} \cong \overline{BD}$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

21. $x = 180° - (20° + 20°) = 180° - 40° = 140°$

22. Se $\overline{BP}$ é bissetriz, então: $med(\hat{B}) = 80° = x$.

$z = 180° - (40° + 80°) = 180° - 120° = 60°$

$y = 180° - (80° + 80°) = 180° - 160° = 20°$

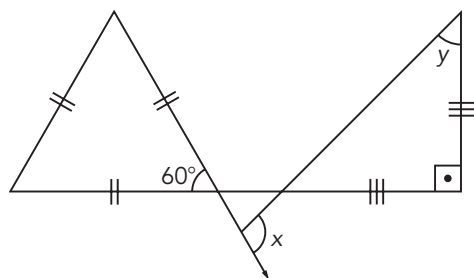
23. Os três ângulos têm medidas iguais. Cada um mede: $\frac{180°}{3} = 60°$.

24. a) $3y = 180°$

$y = \frac{180°}{3}$

$y = 60°$

$x = 180° - 60° = 120°$

b)

Banco de imagens/Arquivo da editora

$y = \frac{180° - 90°}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$

$x = 60° + 45° = 105°$

25. $med(B\hat{C}D) = \frac{180° - 90°}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$

Se o triângulo *ABC* é equilátero, a medida de cada ângulo interno vale 60°.

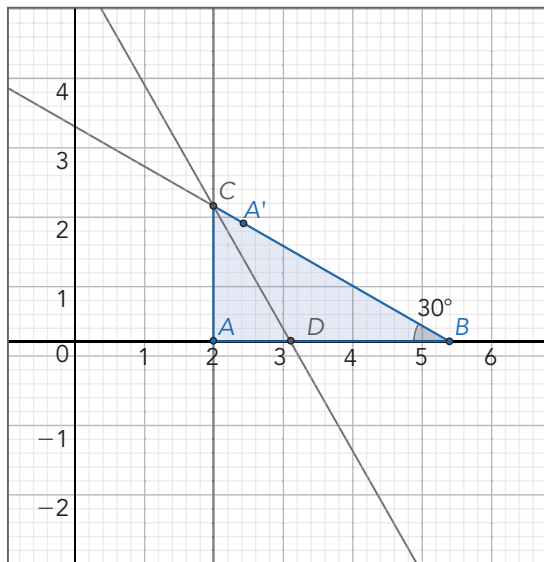
$med(C\hat{B}D) = med(B\hat{C}D) = 45°$

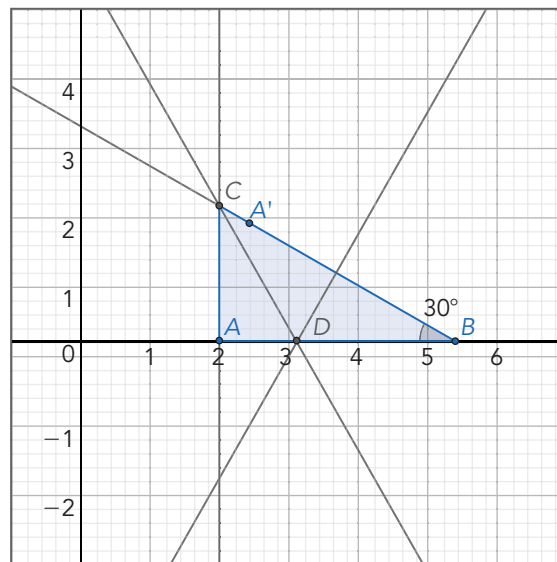
$med(A\hat{B}D) = 60° + med(C\hat{B}D) = 60° + 45° = 105°$

Portanto, $B\hat{C}D$ mede 45° e $A\hat{B}D$ mede 105°.

Matemática e tecnologias

1. Seria possível determinar a medida do ângulo $A\hat{C}B$ calculando $med(\hat{C}) = 180° - 90° - 30°$.

2. Após seguir os passos indicados na atividade, há uma reta na figura que passa pelo ponto *C*, dividindo o ângulo $A\hat{C}B$ em dois ângulos congruentes.

Banco de imagens/Arquivo da editora

3.

Banco de imagens/Arquivo da editora

4. 1ª) Na aba "Ferramentas", em "Ferramentas Básicas", selecione o ícone "Segmento" com o botão esquerdo do *mouse* e trace um segmento de reta qualquer na malha quadriculada.

2ª) Ainda na aba "Ferramentas", em "Construções", selecione o ícone "Reta perpendicular" com o botão esquerdo do *mouse*, clique com o botão esquerdo do *mouse* no ponto *A* e depois no segmento de reta.

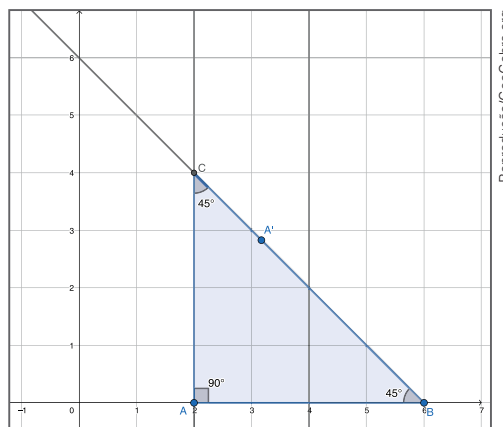
3ª) Agora, na aba "Ferramentas", em "Medições", selecione o ícone "Ângulo com Amplitude Fixa" com o botão esquerdo do *mouse*, clique com o botão esquerdo do *mouse* no ponto *A* e depois no ponto *B*. Na janela que abrir, digite "45°" e selecione "sentido horário", obtendo o ângulo $A\hat{B}A'$.

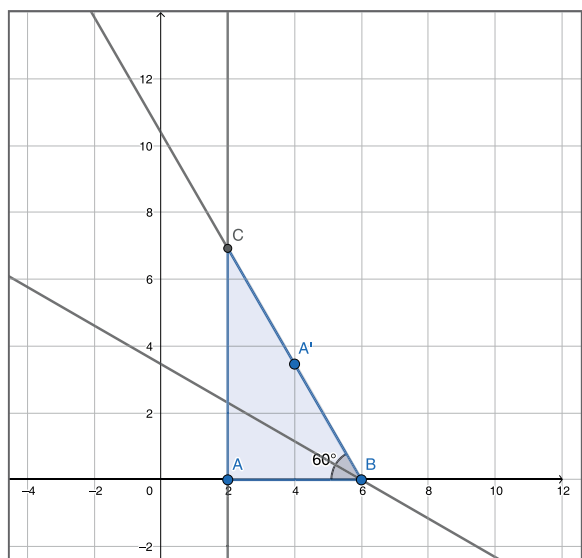
4ª) Na aba "Ferramentas", em "Retas", selecione o ícone "Semirreta" com o botão esquerdo do *mouse*, clique com o botão esquerdo do *mouse* no ponto *B* e depois no ponto *A'*.

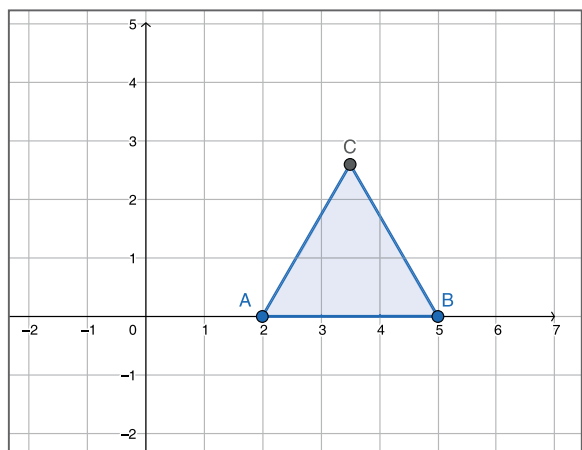
5ª) Marque o ponto *C*, com o ícone "Ponto" selecionado na aba "Ferramentas", em "Ferramentas Básicas", na intersecção da reta perpendicular pelo ponto *A* construída no 2º passo com a semirreta construída no 4º passo.

6ª) Na aba "Ferramentas", em "Ferramentas Básicas", selecione o ícone "Polígono" e clique nos pontos *A*, *B*, *C* e *A* de novo, obtendo o triângulo *ABC*.

7ª) Para conferir a medida dos outros ângulos do triângulo, na aba "Ferramentas", em "Medições", selecione o ícone "Ângulo" e clique nos pontos *C*, *A* e *B*, obtendo o ângulo de 90°, e depois clique em *A*, *C* e *B*, obtendo o ângulo de 45°.

5.

Reprodução/GeoGebra.org

6.

Reprodução/GeoGebra.org

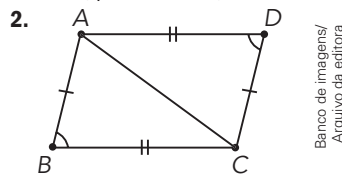
7.

Reprodução/GeoGebra.org

Na História

1. A obra geométrica de Pitágoras, bem como sua escola, não se limitou, como a de Tales, a apenas justificar alguns resultados esparsos mediante argumentos lógicos.
2. Estender o método dedutivo para toda a Geometria.
3. Algumas razões: (**I**) O número reduzido de manuscritos de cada obra, devido ao processo artesanal pelo qual eram produzidos. (**II**) Os exemplares anteriores da obra, inclusive aquela de que foi copiado o manuscrito referido, não sobreviveram ao tempo; uma das causas foi a destruição das poucas bibliotecas da Antiguidade, como a de Alexandria, a maior e mais importante de todas, consumida por três grandes incêndios, o último no ano 640. (**III**) O pouco interesse pelo assunto, a partir do momento em que a Matemática grega entrou em declínio (c. 100 a.C.), o que persistiu por muitos séculos.
4. No estudo moderno da Geometria, “ponto”, “reta” e “plano” são conceitos considerados primitivos, ou seja, conceitos aceitos sem uma definição formal. Na verdade, esse enfoque remonta ao grego Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) e, portanto, é anterior a Euclides, mas não foi adotado por ele, que talvez quisesse dar um fundo material à sua geometria. No entanto, é evidente que, por exemplo, a “definição” de “ponto” dada por Euclides (como, aliás, a de reta e a de plano) não expõe com precisão e clareza as características do objeto definido, como, a rigor, seria necessário.

Na Unidade

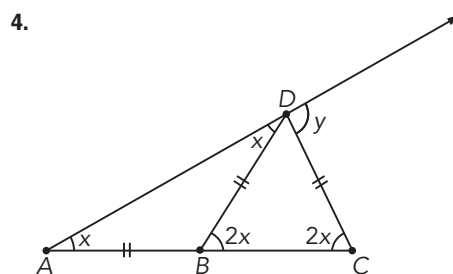
1. $\overline{AF} \cong \overline{EF}$; $A\hat{F}B \cong E\hat{F}D$ (pois são opostos pelo vértice) e $\overline{FB} \cong \overline{FD}$. Então, pelo caso LAL, temos $\triangle AFB \cong \triangle EFD$. Logo, alternativa **c**.

2.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Pelo caso LAL, temos $A\hat{B}C \cong C\hat{D}A$. Logo, alternativa **d**.

3. No $\triangle GOL$, temos: $\text{med}(\hat{O}) = \text{med}(\hat{L}) = \dfrac{140°}{2} = 70°$.

Como $\overline{OL} \mathbin{/\!/} \overline{BA}$, temos $\text{med}(G\hat{O}L) = 70°$. Logo, alternativa **c**.

4.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$\text{med}(B\hat{C}D) = 180° - 4x$

$y = 180° - x - (180° - 4x) = 180° - x - 180° + 4x = 3x$

Logo, alternativa **a**.

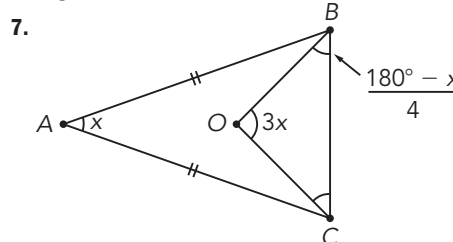
5. Ligando B a C, completamos o $\triangle ABC$ cujos lados são diagonais de faces do cubo. Logo, $\triangle ABC$ é equilátero e $\text{med}(B\hat{A}C) = 60°$. Logo, alternativa **b**.

6. $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = \dfrac{180° - 40°}{2} = \dfrac{140°}{2} = 70°$

$\text{med}(B\hat{Y}X) = \text{med}(Z\hat{Y}C) = \dfrac{180° - 70°}{2} = \dfrac{110°}{2} = 55°$

$\text{med}(X\hat{Y}Z) = 180° - 110° = 70°$

Logo, alternativa **d**.

7.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$$3x + \frac{180° - x}{4} + \frac{180° - x}{4} = 180°$$

$12x - 180° - x + 180° - x = 720°$

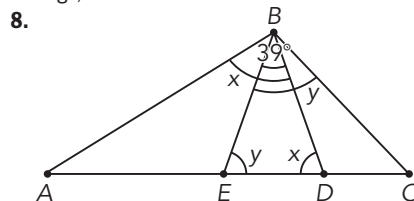
$12x - 2x = 720° - 360°$

$10x = 360°$

$x = \dfrac{360°}{10}$

$x = 36°$

Logo, alternativa **d**.

8.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Como $AB = AD$, temos que $\triangle ABD$ é isósceles; então: $\text{med}(A\hat{B}D) = \text{med}(A\hat{D}B) = x$.

Como $CB = CE$, temos que $\triangle CBE$ é isósceles; então: $\text{med}(C\hat{B}E) = \text{med}(C\hat{E}B) = y$.

No $\triangle BED$, temos: $x + y = 180° - 39° = 141°$.

$\text{med}(A\hat{B}C) = x + y - 39° = 141° - 39° = 102°$

Logo, alternativa **a**.

9. Em um triângulo, o maior lado é o oposto ao maior ângulo.

$\triangle CDE$: o maior lado é $\overline{CE}$.

$\triangle ACE$: o maior lado é $\overline{AE} \cong \overline{AC}$.

$\triangle ABC$: como $\text{med}(\hat{A}) = 180° - 55° - 65° = 60°$, o maior ângulo é $\hat{C}$; logo, o maior lado é $\overline{AB}$.

Como $AB > AC > CE$, o maior segmento é $\overline{AB}$. Logo, alternativa **a**.

10. Os mosaicos 4 e 5 não têm formato de triângulo retângulo. O mosaico 3 não tem triângulo isósceles. No mosaico 1, os triângulos retângulos não são congruentes, porque a hipotenusa do cinza é cateto do branco.

O mosaico 2 é o que satisfaz às condições descritas. Logo, alternativa **b**.

Unidade 4

Abertura (p. 87)

Resposta pessoal. Espera-se que o estudante expresse meios de comunicação que conhece, como a língua portuguesa, a Língua Brasileira de Sinais (mesmo que ele não conheça todos os símbolos), a linguagem matemática, a música, o código Morse, e, caso algum estudante já conheça alguma linguagem computacional, mencione a utilizada por ele. Ao verificar as anotações do estudante, espera-se que o passo a passo descrito por ele execute as funções que foram solicitadas.

Exemplos de respostas:

- Existe linguagem não verbal (comunicação por meio de signos visuais ou sonoros, sem o uso de palavras), linguagem artística (comunicação por meio do teatro, dança, música, etc.).
- Outra maneira de resolver e comunicar o problema seria:

1. Dividir a quantidade de estudantes por 4.
2. Se o resultado for maior do que 11, significa que precisará de mais *vans*.
3. Caso contrário, as *vans* serão suficientes.

Capítulo 7

Participe (p. 89)

a) Exemplos de resposta: $3a$ (ou $3b$ ou $3c$ ou $3x$, etc.).
b) Utilizando x como variável: $x + x^2$.
c) Utilizando x como variável: $\frac{3}{4}x + 5$.
d) Utilizando a e b como variáveis: $\frac{a+b}{2}$.
e) Utilizando x como variáveis: $x + 37$.
f) Utilizando x como variável: $180° - x$.
g) A medida de perímetro é a soma das medidas dos 4 lados do quadrado, que pode ser expressa como $x + x + x + x = 4x$.
h) Utilizando x como variável para representar as medidas dos lados do primeiro polígono e B, b e h para representar as medidas das bases e da altura do trapézio, temos: $(x + 2) \cdot x$; $\left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h$.

Atividades

1. **a)** $\frac{a}{3}$
b) $2x + 5$
c) x^2
d) $x + \sqrt{x}$
e) $x^2 - 4x$
f) $n \cdot (n + 1)$

2. **a)** $x^2 + 3y$
b) $x^2 + y^2$
c) $(a + b)^2$
d) $\frac{b \cdot h}{2}$
e) $90° - x$
f) $2x + 2y$

3.
```
num1 = int(input("Digite um número inteiro que represente uma medida de tempo em minutos:"))
div = num1/60
if div > 1:
print("É mais de 1 hora.")
else:
print("É 1 hora ou menos.")
```

4. **I.** Exemplo de regularidade: Adicionar 4 ao termo anterior; próximo termo 31; $(11, 15, 19, 23, 27, 31, \ldots)$.
II. Exemplo de regularidade: Multiplicar o termo anterior por 2; próximo termo 96; $(3, 6, 12, 24, 48, 96, \ldots)$.

5. **I.**

INÍCIO → Anotar o primeiro termo: $a_1 = 11$. → Calcular o termo seguinte adicionando 4 ao valor do termo anterior e anotá-lo. → É o termo desejado? (Não → volta a "Calcular o termo seguinte"; Sim → FIM)

II.

INÍCIO → Anotar o primeiro termo: $a_1 = 3$. → Calcular o termo seguinte multiplicando por 2 o valor do termo anterior e anotá-lo. → É o termo pedido? (Não → volta a "Calcular o termo seguinte"; Sim → FIM)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

6. **I.** $a_1 = 11$ e $a_n = a_{n-1} + 4$, para $n \geq 2$; ou $a_1 = 11$ e $a_{n+1} = a_n + 4$, para $n \geq 1$.
II. $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} \cdot 2$, para $n \geq 2$; ou $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n \cdot 2$, para $n \geq 1$.

7. **II.** $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + n$, para $n \geq 2$; ou $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + n$, para $n \geq 1$.
III. $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + n$, para $n \geq 2$; ou $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + n$, para $n \geq 1$.

8. $(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1\,024, \ldots)$

a) $a_9 = 512$ e $a_{10} = 1\,024$.

b) Exemplo de resposta: **I.** $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} \cdot 2$, para $n \geqslant 2$. **II.** $a_n = 2^n$, para $n \geqslant 1$.

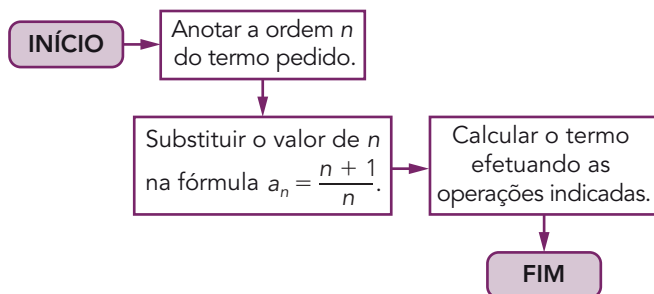
c) Exemplo de resposta: A primeira sim, porque, para calcular cada termo, deve-se conhecer o anterior; a segunda não, porque, para calcular cada termo, não é necessário conhecer o anterior.

9. a) $a_1 = \frac{2}{1}$; $a_2 = \frac{3}{2}$; $a_3 = \frac{4}{3}$; $a_4 = \frac{5}{4}$; $a_5 = \frac{6}{5}$; ...; $a_{10} = \frac{11}{10}$.

b) $a_n = \frac{n+1}{n}$, para $n \geqslant 1$ é fórmula não recursiva.

10. Exemplo de resposta:

INÍCIO → Anotar a ordem n do termo pedido. → Substituir o valor de n na fórmula $a_n = \frac{n+1}{n}$. → Calcular o termo efetuando as operações indicadas. → FIM

Banco de imagens/Arquivo da editora

11. a) Para $n = 6$, temos: $a_6 = \frac{6+1}{6^2} = \frac{7}{36}$.

b) $a_1 = 10$ e $a_{n+1} = a_n - 2n$, para $n = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Para $n = 1$, temos: $a_{1+1} = a_1 - 2 \cdot 1 \Rightarrow a_2 = 10 - 2 = 8$.

Para $n = 2$, temos: $a_3 = a_2 - 2 \cdot 2 \Rightarrow a_3 = 8 - 4 = 4$.

Para $n = 3$, temos: $a_4 = a_3 - 2 \cdot 3 \Rightarrow a_4 = 4 - 6 = -2$.

Para $n = 4$, temos: $a_5 = a_4 - 2 \cdot 4 \Rightarrow a_5 = -2 - 8 = -10$.

Para $n = 5$, temos: $a_6 = a_5 - 2 \cdot 5 \Rightarrow a_6 = -10 - 10 = -20$.

12. $\left(\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \frac{7}{36}, \ldots\right)$. Exemplo de resposta: Sucessão de frações em que os numeradores formam a sucessão dos naturais maiores que 1 e os denominadores formam a sucessão dos naturais quadrados perfeitos positivos.

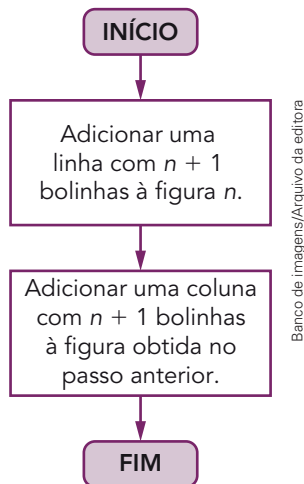
13. $(10, 8, 4, -2, -10, -20, \ldots)$. Exemplo de resposta: O n-ésimo termo é igual à diferença entre o termo anterior e o dobro de $n - 1$.

14. a) Exemplo de resposta: seguindo o padrão apresentado nas figuras, a próxima figura terá uma linha e uma coluna a mais.

b) $(2, 6, 12, 20, \ldots)$

c) Exemplo de resposta: A n-ésima figura é formada por bolinhas dispostas em n linhas e $(n + 1)$ colunas e a quantidade de bolinhas é dada pela fórmula: $a_n = n \cdot (n + 1)$, para $n \geqslant 1$.

d)

INÍCIO → Adicionar uma linha com $n + 1$ bolinhas à figura n. → Adicionar uma coluna com $n + 1$ bolinhas à figura obtida no passo anterior. → FIM

Banco de imagens/Arquivo da editora

15. a) A quantidade de bolinhas na figura 6 é: $6 \cdot 6 = 36$.

A quantidade de bolinhas pretas na figura 6 é: $5 \cdot 5 = 25$.

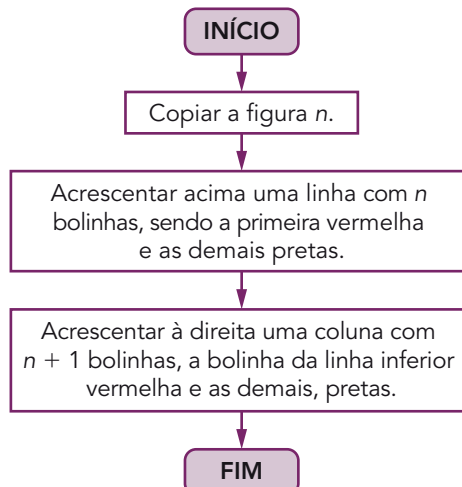
A quantidade de bolinhas vermelhas na figura 6 é: $36 - 25 = 11$.

b) A quantidade de bolinhas na figura n é: $n \cdot n = n^2$.

A quantidade de bolinhas pretas na figura n é: $(n - 1) \cdot (n - 1) = (n - 1)^2$.

A quantidade de bolinhas vermelhas na figura n é: $n^2 - (n - 1)^2$.

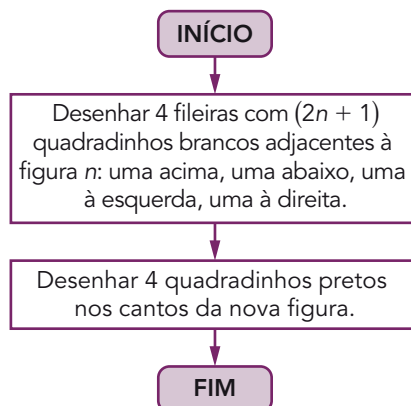
c)

INÍCIO → Copiar a figura n. → Acrescentar acima uma linha com n bolinhas, sendo a primeira vermelha e as demais pretas. → Acrescentar à direita uma coluna com $n + 1$ bolinhas, a bolinha da linha inferior vermelha e as demais, pretas. → FIM

Banco de imagens/Arquivo da editora

16. a) A próxima figura é um quadrado com duas linhas e duas colunas de quadradinhos a mais que a anterior. São pintados de preto os quadradinhos das diagonais.

b) A próxima figura terá $(9 \cdot 9)$ quadradinhos, sendo os das diagonais $(9 + 8)$ pintados de preto. O total de quadradinhos é 81, os pretos são 17 e os demais são brancos. O número de brancos é: $81 - 17 = 64$.

c)

INÍCIO → Desenhar 4 fileiras com $(2n + 1)$ quadradinhos brancos adjacentes à figura n: uma acima, uma abaixo, uma à esquerda, uma à direita. → Desenhar 4 quadradinhos pretos nos cantos da nova figura. → FIM

Banco de imagens/Arquivo da editora

17. a) $x + (x + 37) + x + (x + 37)$ ou $4x + 74$.

b) $4 \cdot 74 + 74 = 370$; a medida de perímetro é 370 m.

18. Como Paulo trabalha recebendo R$ 129,00 por hora trabalhada, temos que $\frac{4128}{129} = 32$; portanto, 32 horas.

19. a) $x^2 + (x + 4) \cdot 2$

b) Para $x = 3$, temos: $3^2 + (3 + 4) \cdot 2 = 9 + 7 \cdot 2 = 9 + 14 = 23$; ou seja, 23 cm².

Para $x = 6$, temos: $6^2 + (6 + 4) \cdot 2 = 36 + 10 \cdot 2 = 36 + 20 = 56$; ou seja, 56 cm².

Para $x = 9$, temos: $9^2 + (9 + 4) \cdot 2 = 81 + 13 \cdot 2 = 81 + 26 = 107$; ou seja, 107 cm².

Para $x = 4{,}5$, temos: $(4{,}5)^2 + (4{,}5 + 4) \cdot 2 = 20{,}25 + 8{,}5 \cdot 2 = 20{,}25 + 17 = 37{,}25$; ou seja, 37,25 cm².

c) $x^2 + 2 \cdot x + 8$

d) $3^2 + 2 \cdot 3 + 8 = 9 + 6 + 8 = 23$; ou seja, 23 cm².

e) Os resultados são iguais.

20. a) Para determinar a expressão, calculamos a medida de área total do terreno descontando os banheiros:

$(20 \cdot 5) - (4 \cdot x^2) = 100 - 4x^2$

b) $100 - 4 \cdot 1^2 = 100 - 4 = 96$; ou seja, 96 m².

21. $x = \dfrac{-5 + \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-5 + \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{-5 + 1}{2} =$

$= \dfrac{-4}{2} = -2$

22. $p + q \cdot x = 5{,}90 + 2{,}90 \cdot 6 = 5{,}90 + 17{,}40 = 23{,}30$. Pagam-se R\$ 23,30 por uma corrida de 6 km.

23. Exemplo de resposta: João fará uma horta em um terreno quadrado cujos lados medem $x + 2$.

a) Escreva a expressão que representa a medida de área do terreno dessa horta. Resposta: $x^2 + 4x + 4$.

b) Calcule a medida de área do terreno da horta sabendo que $x = 2$. Resposta: 16.

24. Quadro A

x	y	$(x + 1)^2$	$x^2 + y^2$
3	4	$(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$	$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
-7	7	$(-7 + 7)^2 = 0^2 = 0$	$(-7)^2 + 72 = 49 + 49 = 98$
6	6	$(6 + 6)^2 = 12^2 = 144$	$6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$
0	9	$(0 + 9)^2 = 9^2 = 81$	$0^2 + 9^2 = 0 + 81 = 81$
1,1	0,4	$(1{,}1 + 0{,}4)^2 = 1{,}52 = 2{,}25$	$1{,}1^2 + 0{,}4^2 = 1{,}21 + 0{,}16 = 1{,}37$

Quadro B

x	$(x + 1)^3$	$x^3 + 1$
0	$(0 + 1)^3 = 1^3 = 1$	$0^3 + 1 = 0 + 1 = 1$
1	$(1 + 1)^3 = 2^3 = 8$	$1^3 + 1 = 1 + 1 = 2$
2	$(2 + 1)^3 = 3^3 = 27$	$2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$
-1	$(-1 + 1)^3 = 0^3 = 0$	$(-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2} + 1\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}$

25. a) Como a medida de área é $A = ab - a^2$, e temos $A = CD \cdot (3b - a)$, então: $CD = \dfrac{ab - a^2}{3b - a}$.

b) $\dfrac{0{,}5 \cdot 1{,}5 - 0{,}5^2}{3 \cdot 1{,}5 - 0{,}5} = \dfrac{0{,}75 - 0{,}25}{4{,}5 - 0{,}5} = \dfrac{0{,}5}{4} = 0{,}125$

26. a) $(4 \cdot (-2) - (-2) + 1) \cdot (4 \cdot (-2) + 4 - 1) =$

$= (-8 + 2 + 1) \cdot (-8 + 4 - 1) = (-5) \cdot (-5) = 25$

b) $(1 + (-1) + 1) \cdot (1 - (-1) + 1) \cdot (1 - (-1) - 1) =$

$= (1 - 1 + 1) \cdot (1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1 - 1) = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$

c) $\dfrac{1 \cdot 1{,}5 - 1}{2 \cdot (1{,}5) - 1} = \dfrac{1{,}5 - 1}{3 - 1} = \dfrac{0{,}5}{2} = 0{,}25$

d) $p = \dfrac{a + b + c}{2} = \dfrac{3 + 4 + 5}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

$6 \cdot (6 - 3) \cdot (6 - 4) \cdot (6 - 5) = 6 \cdot (3) \cdot (2) \cdot (1) = 6 \cdot 6 = 36$

e) $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{4}{5}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}} = \dfrac{\frac{10 + 12}{15}}{\frac{15 - 8}{15}} = \dfrac{22}{5} \cdot \dfrac{15}{7} = \dfrac{22}{7}$

27. $\dfrac{4 + 0{,}25}{1 - \frac{2}{3} \cdot (0{,}25)} = \dfrac{4{,}25}{1 - 1} = \dfrac{4{,}25}{0}$

Não existe o valor numérico, pois não existe divisão por zero.

28. O denominador não pode ser zero. Por isso, não existe o valor numérico se $x - 2 = 0$; logo, $x = 2$.

29.

Número de lados	Nome do polígono	Número de diagonais
9	Eneágono	$\dfrac{9 \cdot (9 - 3)}{2} = 27$
10	Decágono	$\dfrac{10 \cdot (10 - 3)}{2} = 35$
11	Undecágono	$\dfrac{11 \cdot (11 - 3)}{2} = 44$
12	Dodecágono	$\dfrac{12 \cdot (12 - 3)}{2} = 54$

30. Aplicando a fórmula algébrica, temos:

$D = \dfrac{n \cdot (n - 3)}{2} = \dfrac{24 \cdot (24 - 3)}{2} = 252.$

31. a) Binômio.

b) Binômio.

c) Monômio.

d) Trinômio.

e) Monômio.

32. a) 6

b) -12

c) $\dfrac{3}{5}$

d) 1

e) -1

f) $\dfrac{1}{4}$

33. a) $11x$

b) $4y$

c) $-\dfrac{3}{2}xy$

d) $8x^2$

e) $6xy$

f) $-\dfrac{17}{20}x$

34. a) $x + x + 1 + x + 2 = 3x + 3$. Termo independente: $+3$.

b) $x + 2 + 2x + x + 2x + 1 + x + 1 = 7x + 4$.

Termo independente: $+4$.

c) $a + b + a + b = 2a + 2b$. Termo independente é igual a zero.

d) $y + x + x + y + x + x = 4x + 2y$. Termo independente é igual a zero.

35. $n + n + 5 + n + 2 + n - 6 = 4n + 1$

36. a) Medida de área: $5a^2$; medida de perímetro: $12a$.

b) Medida de área: $2x^2 + y^2 + yx$; medida de perímetro: $6x + 4y$.

37. a) $4x^2 - 7x + 6x^2 + 2 + 4x - x^2 - 1 =$

$= 4x^2 + 6x^2 - x^2 - 7x + 4x + 2 - 1 = 9x^2 - 3x + 1$;

tem grau 2.

b) $6x + 1 - x^2 - 2 + 3x - 2x + x^2 - 3x = 6x - 2x + 1 - 2 =$

$= 4x - 1$; tem grau 1.

c) $3x + 4 - 5x^2 + 7x - 3x^3 + 6x^2 - 7 + 2x + 8x^3 =$

$= 23x^3 + 8x^3 - 5x^2 + 6x^2 + 3x + 7x + 2x + 4 - 7 =$

$= 5x^3 + x^2 + 12x - 3$; tem grau 3.

38. a) Exemplo de resposta: $x^2 + 3x + 1$.

b) Exemplo de resposta: $y^2 + 7y$.

c) Exemplo de resposta: $10w^3$.

d) Exemplo de resposta: $9t^3 - 5$.

39. Para o grau, temos: 5; e para o termo independente, temos: -1.

Educação financeira

1. **a)** Exemplo de resposta: Inflação é o aumento dos preços de bens e serviços. Ela implica diminuição do poder de compra da moeda. A inflação é medida pelos índices de preços. (Fonte dos dados: BANCO CENTRAL DO BRASIL. *O que é inflação?* Disponível em: https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/oqueinflacao. Acesso em: 18 abr. 2022.)
   b) Exemplo de resposta: A inflação gera incertezas na economia, desestimulando o investimento e prejudicando o crescimento econômico.
2. Respostas pessoais.
3. Respostas pessoais.

Capítulo 8

Atividades

1. **a)** Mário vai gastar $p + 10q$ e $p + 12q$ em cada corrida. Ao todo, ele vai gastar: $p + 10q + p + 12q = 2p + 22q$.
2. **a)** A: $n^2 + n + 1$; B: $3n^2 + n - 1$.
   b) $A + B = n^2 + n + 1 + 3n^2 + n - 1 = 4n^2 + 2n$
   Exemplo de resposta: O quádruplo do quadrado de n mais o dobro de n.
3. Como a medida de perímetro é a soma das medidas dos lados do polígono, temos:
   a) $n + 3 + 2n + 2n + 1 = 5n + 4$
   b) $x + 2x + x + 4 + 3x - 1 = 7x + 3$
4. **a)** $(3x^2 + 2x - 1) + (-2x^2 + 4x + 2) =$
   $= 3x^2 - 2x^2 + 2x + 4x - 1 + 2 = x^2 + 6x + 1$
   b) $(x^2 - 2x + 1) + (3x^2 + 4x - 2) + (x^2 - 2x + 2) =$
   $= x^2 - 2x + 1 + 3x^2 + 4x - 2 + x^2 - 2x + 2 = 5x^2 + 1$
5. **a)** $(2x^2 - x - 1) + (-3x^2 + 3x) + (4x^2 - 3) =$
   $= 2x^2 - 3x^2 + 4x^2 - x + 3x - 1 - 3 = 3x^2 + 2x - 4$
   b) $(2x^2 - x - 1) + (-3x^2 + 3x) + (x^2 + 7x + 1) =$
   $= 2x^2 - 3x^2 + x^2 - x + 3x + 7x + 1 = +9x$
   c) $(-3x^2 + 3x) + (4x^2 - 3) + (2x + 3) =$
   $= -3x^2 + 4x^2 + 3x + 2x - 3 + 3 = x^2 + 5x$
6. **a)** $-3x - 4y - 5$
   b) $-a + 3b + c$
   c) $-5x^2 + 3x - 1$
7. **a)**
$$\begin{array}{rrrr} & 3x & +2y & +1 \\ + & -2x & -\ y & +1 \\ \hline & x & +\ y & +2 \end{array}$$
   b)
$$\begin{array}{rrrr} & -\ x^2 & +5x & -1 \\ + & -2x^2 & & -1 \\ \hline & -3x^2 & +5x & -2 \end{array}$$
8. $a + 2b - 3c - 3a + b - c = -2a + 3b - 4c$
9. $R + P = Q$, então $R = Q - P$.
   $R = x^2 - 5x - 10 + 3x^2 + 2x - 1$
   $R = 4x^2 - 3x - 11$
10. Como $\text{med}(B\hat{O}C) = \text{med}(A\hat{O}C) - \text{med}(A\hat{O}B)$, temos:
    $6x + 20° - 2x - 30° = 4x - 10°$.
11. **a)** Não, conservamos todos os sinais.
    b) Sim, trocamos todos os sinais.
12. **a)** $(7x + 5) - (2x + 3) = (7x + 5) - (2x + 3) = 5x + 2$
    b) $\left(3x^2 - \dfrac{1}{3}\right) - \left(6x^2 - \dfrac{4}{5}\right) = 3x^2 - \dfrac{1}{3} - 6x^2 + \dfrac{4}{5} =$
    $= -3x^2 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{5} = -3x^2 + \left(\dfrac{-5 + 12}{15}\right) = -3x^2 + \dfrac{7}{15}$
    c) $(2a - 3ab + 5b) - (-a - ab + 2b) =$
    $= 2a - 3ab + 5b + a + ab - 2b = 3a - 2ab + 3b$
13. **a)** $x^2 + 3x + 3 - 3x^2 + 2x + 1 + x^2 - x - 2 =$
    $= x^2 - 3x^2 + x^2 + 3x + 2x - x + 3 + 1 - 2 = -x^2 + 4x + 2$
    b) $x^2 + 3x + 3 - (3x^2 - 2x - 1 + x^2 - x - 2) =$
    $= x^2 + 3x + 3 - (4x^2 - 3x - 3) = x^2 + 3x + 3 - 4x^2 + 3x + 3 =$
    $= -3x^2 + 6x + 6$
14. Na multiplicação de potências de mesma base, conservamos a base e adicionamos os expoentes.
15. **a)** $6 \cdot (5x) = 30x$
    b) $(3a) \cdot (4a^2) = 12a^3$
    c) $(-2x^2) \cdot (2x) = -4x^3$
    d) $(x^3y) \cdot (5xy) = 5x^4y^2$
16. **a)** $2 \cdot (3x + 4) = 2 \cdot 3x + 2 \cdot 4 = 6x + 8$
    b) $3 \cdot (2x^2 - x - 3) = 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot (-x) + 3 \cdot (-3) =$
    $= 6x^2 - 3x - 9$
    c) $4x \cdot (2x + 5) = 4x \cdot 2x + 4x \cdot 5 = 8x^2 + 20x$
    d) $-2x^2 \cdot (x^2 - x + 4) = -2x^2 \cdot x^2 - 2x^2 \cdot (-x) - 2x^2 \cdot 4 =$
    $= -2x^4 + 2x^3 - 8x^2$
17. **a)** $x \cdot (2x + 1) = 2x^2 + x$
    b) $(x + 2) \cdot (4x + 3) = x \cdot 4x + x \cdot 3 + 2 \cdot 4x + 2 \cdot 3 =$
    $= 4x^2 + 3x + 8x + 6 = 4x^2 + 11x + 6$
18. **a)** $(2x + 3) \cdot (4x + 1) = 2x \cdot 4x + 2x \cdot 1 + 3 \cdot 4x + 3 \cdot 1 =$
    $= 8x^2 + 14x + 3$
    b) $\left(3x - \dfrac{1}{2}\right) \cdot (x^2 + 4) = 3x \cdot x^2 + 3x \cdot 4 - \dfrac{1}{2} \cdot x^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 4 =$
    $= 3x^3 + 12x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{4}{2} = 3x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 12x - 2$
    c) $(2a + 3b) \cdot (5a - b) = 2a \cdot 5a + 2a \cdot (2b) + 3b \cdot 5a + 3b \cdot (2b) =$
    $= 10a^2 - 2ab + 15ab - 3b^2 = 10a^2 + 13ab - 3b^2$
    d) $(2x - 3) \cdot (x^2 - 3x + 5) =$
    $= 2x \cdot x^2 + 2x \cdot (-3x) + 2x \cdot 5 - 3(x^2) - 3 \cdot (-3x) - 3 \cdot 5 =$
    $= 2x^3 - 6x^2 + 10x - 3x^2 + 9x - 15 = 2x^3 - 9x^2 + 19x - 15$
19. **a)**
$$\begin{array}{rrrr} & & 2x & -1 \\ \times & & 3x & +5 \\ \hline & 6x^2 & -3x & \\ & & 10x & -5 \\ \hline & 6x^2 & +7x & -5 \end{array}$$
    b)
$$\begin{array}{rrrrr} & & x^2 & +4x & +8 \\ \times & & & 3x & -1 \\ \hline & 3x^3 & +12x^2 & +24x & \\ & & -x^2 & -4x & -8 \\ \hline & 3x^3 & +11x^2 & +20x & -8 \end{array}$$
20. Exemplos de resposta:
    a) Polinômio de grau 3: $ax^3 + \ldots$, com $a \neq 0$; polinômio de grau 5: $bx^5 + \ldots$, com $b \neq 0$.
    - Soma: $(ax^3 + \ldots) + (bx^5 + \ldots) = bx^5 + \ldots$, com $b \neq 0$; a soma tem grau 5.
    - Produto: $(ax^3 + \ldots) \cdot (bx^5 + \ldots) = (abx^8 + \ldots)$, com $ab \neq 0$; o grau do produto é 8.

    b) Polinômios de grau 3: $(ax^3 + \ldots)$ e $(bx^3 + \ldots)$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$.
    - Soma: $(a + b) \cdot x^3 + \ldots$; pode ocorrer $a + b \neq 0$ ou $a + b = 0$. Então o grau pode ser 3 ou menor que 3, ou pode não ter grau. Exemplos:
      $(x^3 + x^2 + x + 1) + (x^3 + 1) = 2x^3 + x^2 + x + 2$; grau 3.
      $(x^3 + x^2 + x + 1) + (-x^3 + 1) = x^2 + x + 2$; grau 2.
      $(x^3 + x^2 + x + 1) + (-x^3 - x^2 + 1) = x + 2$; grau 1.
      $(x^3 + x^2 + x + 1) + (-x^3 - x^2 - x + 1) = 2$; grau 0.
      $(x^3 + 1) + (-x^3 - 1) = 0$; não tem grau.
    - Produto: $abx^6 + \ldots$, com $ab \neq 0$, tem grau 6.

21. $(x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x^2 + 9) = (x^2 + 3x - 3x - 9) \cdot (x^2 + 9) =$
$= (x^2 - 9) \cdot (x^2 + 9) = x^4 - 81$

22. a) $3A + 2B = 3 \cdot (2x + 3) + 2 \cdot (3x - 1) = 6x + 9 + 6x - 2 =$
$= 12x + 7$

b) $AB + C = (2x + 3) \cdot (3x - 1) + x^2 + 4 =$
$= 6x^2 - 2x + 9x - 3 + x^2 + 4 = 7x^2 + 7x + 1$

c) $5C - 2AB = 5 \cdot (x^2 + 4) - 2 \cdot (2x + 3) \cdot (3x - 1) =$
$= 5 \cdot (x^2 + 4) - 2 \cdot (6x^2 - 2x + 9x - 3) =$
$= 5x + 20 - 12x^2 + 4x - 18x + 6 = -7x^2 - 14x + 26$

23. a) A medida de área total corresponde à soma das medidas de área de dois retângulos de lados medindo $2x + 1$ por $3x + 2$, dois retângulos de lados medindo x por $3x + 2$ e dois retângulos de lados medindo x por $2x + 1$. Então:
$2 \cdot (2x + 1) \cdot (3x + 2) + 2x \cdot (3x + 2) + 2x \cdot (2x + 1) =$
$= 22x^2 + 20x + 4.$

b) A medida de volume é calculada multiplicando as medidas do comprimento, da largura e da altura:
$(3x + 2) \cdot (2x + 1) \cdot (x) = 6x^3 + 7x^2 + 2x.$

24. Medida de área total: $(4x + 1) \cdot (2x + 3) = 8x^2 + 12x + 2x + 3 =$
$= 8x^2 + 14x + 3.$
Medida de área da região branca: $x \cdot (2x + 1) = 2x^2 + x.$
A medida de área da região colorida corresponde à medida de área total menos a medida de área da região branca:
$8x^2 + 14x + 3 - (2x^2 + x) = 8x^2 + 14x + 3 - 2x^2 - x =$
$= 6x^2 + 13x + 3.$

25. $a^3 - (a + b + c) \cdot a^2 + (ab + ac + bc) \cdot a - abc =$
$= a^3 - a^3 - a^2b - a^2c + a^2b + a^2c + abc - abc = 0$

26. a) $(3x + 1) \cdot (3x + 1) = 9x^2 + 3x + 3x + 1 = 9x^2 + 6x + 1$

b) $(2a - 3b) \cdot (2a - 3b) = 4a^2 - 6ab - 6ab + 9b^2 =$
$= 4a^2 - 12ab + 9b^2$

c) $(2a + b - 5) \cdot (2a + b - 5) =$
$= 4a^2 + 2ab - 10a + 2ab + b^2 - 5b - 10a - 5b + 25 =$
$= 4a^2 + 4ab - 20a + b^2 - 10b + 25$

d) $(2x + 1) \cdot (2x + 1) \cdot (2x + 1) = (4x^2 + 4x + 1) \cdot (2x + 1) =$
$= 8x^3 + 4x^2 + 8x^2 + 4x + 2x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

27. Na divisão de potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

28. $4xy^2 \cdot M = 20x^4y^4$
$M = \dfrac{20x^4y^4}{4xy^2} = 5x^3y^2$

29. a) $\dfrac{81 \cdot x^3}{27x} = \dfrac{81}{27} \cdot \dfrac{x^3}{x} = 3x^2$

b) $\dfrac{-63a^2b^3}{9ab^3} = \dfrac{-63}{9} \cdot \dfrac{a^2}{a} \cdot \dfrac{b^3}{b^3} = -7a$

c) $\dfrac{-49xy^2}{-7y} = +\dfrac{49}{7} \cdot x \cdot \dfrac{y^2}{y} = 7xy$

d) $\dfrac{32}{8} \cdot \dfrac{a^2}{a} \cdot \dfrac{b^5}{b^3} = 4ab^2$

30. a) $\dfrac{4a^4}{2a} - \dfrac{2a^3}{2a} + \dfrac{8a}{2a} = 2a^3 - a^2 + 4$

b) $\dfrac{9x^6}{3x^2} - \dfrac{12x^5}{3x^2} + \dfrac{18x^3}{3x^2} - \dfrac{x^2}{3x^2} = 3x^4 - 4x^3 + 6x - \dfrac{1}{3}$

Na olimpíada (p. 109)

Quem corre mais?

Até o primeiro encontro, João correu 1 200 m e Maria, 3 000 m − 1 200 m = = 1 800 m.

Como correram a medidas de velocidade constante, as medidas de distância percorridas por Maria e por João, em uma mesma medida de tempo, são proporcionais.

	Medida de distância de João (em m)	Medida de distância de Maria (em m)
Até o 1º encontro:	1 200	1 800
Até a 1ª volta de João:	3 000	x

$\dfrac{x}{3000} = \dfrac{1800}{1200}$

$x = 3000 \cdot \dfrac{1800}{1200}$

$x = 4500$

Logo, alternativa **d**.

Na História

1. Indiquemos por x o número de anos que Diofanto viveu. Então:
$\dfrac{x}{6} + \dfrac{x}{12} + \dfrac{x}{7} + 5 + \dfrac{x}{2} + 4 = x$

$\dfrac{14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336}{84} = x$

$\dfrac{75x + 756}{84} = \dfrac{84x}{84}$

$9x = 756$

$x = \dfrac{756}{9}$

$x = 84$

Diofanto viveu 84 anos.

2. a) $\left(\dfrac{x}{6} + \dfrac{x}{12} + \dfrac{x}{7}\right)$ anos.

b) $\left(\dfrac{x}{2} + 9\right)$ anos.

3. Exemplo de resposta: Descartes se destacou em estudos da Biologia e da Física.

Na Unidade

1. Pela sequência, podemos perceber que o número que representa a posição do termo está sendo elevado ao quadrado; logo, para o n-ésimo termo, a expressão será n^2. Logo, alternativa **b**.

2. $a_n = 4n + 5$; $a_1 = 4 \cdot 1 + 5 = 9$; $a_2 = 4 \cdot 2 + 5 = 13$; $a_3 =$
$= 4 \cdot 3 + 5 = 17.$
Utilizando a sequência a seguir, temos:
$a_n = a_{n-1} + 4$
$a_2 = a_{2-1} + 4 = a_1 + 4 = 9 + 4 = 13$
$a_3 = a_{3-1} + 4 = a_2 + 4 = 13 + 4 = 17$
De fato, as duas sequências são equivalentes. Logo, alternativa **c**.

3. $-10 \cdot 100^2 + 2800 \cdot 100 = 180000$. Logo, R$ 180.000,00; alternativa **c**.

4. Para $a = 2$, temos: $\dfrac{2^4 - 5 \cdot 2^2 + 4}{2^2 - 1} = \dfrac{16 - 20 + 4}{4 - 1} = \dfrac{0}{3} = 0$
Logo, alternativa **d**.

5. Medida de perímetro do triângulo ABC: $r + y + (y + x) = r + 2y + x$.
Medida de perímetro do triângulo PBC: $x + y + y = x + 2y$.
Diferença entre as medidas de perímetro: $(r + 2y + x) - (x + 2y) =$
$= r$. Logo, alternativa **b**.

6. $2 \cdot (2x + 5) + 2 \cdot (x + 3) = 4x + 10 + 2x + 6 = 6x + 16$. Logo, alternativa **a**.

7. $(2x + 5) \cdot (x + 3) = 2x^2 + 6x + 5x + 15 = 2x^2 + 11x + 15$. Logo, alternativa **c**.

8. $(5 - x) \cdot (3 - y) = 15 - 5y - 3x + xy$
Medida de área perdida: $15 - (15 - 5y - 3x + xy) = 5y + 3x - xy$.
Logo, alternativa **e**.

9. $\dfrac{2a + 4ba}{2a} = \dfrac{2a}{2a} + \dfrac{4ba}{2a} = 1 + 2b$. Logo, alternativa **c**.

Unidade 5

Abertura (p. 113)

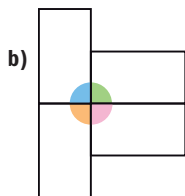
Resposta pessoal. Exemplo de resposta: As vantagens do contato com as telas podem ser relacionadas ao acesso rápido e fácil às informações. As desvantagens podem ser relacionadas à saúde física e emocional.

Capítulo 9

Participe (p. 117)

a)

b)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c) Sim, porque é um retângulo: tem 4 lados e 4 vértices.

d) São 4 ângulos de $90°$, logo $4 \cdot 90° = 360°$.

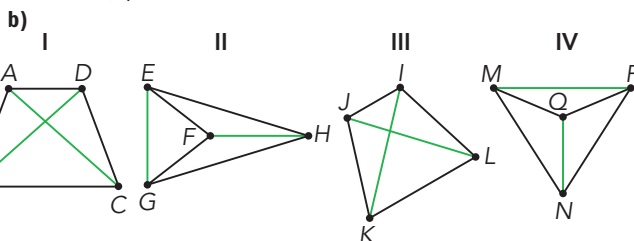
Atividades

1. a) $5 + 7 + 9 + x = 29 \Rightarrow x = 29 - 21 \Rightarrow x = 8$; ou seja, $x = 8$ cm.

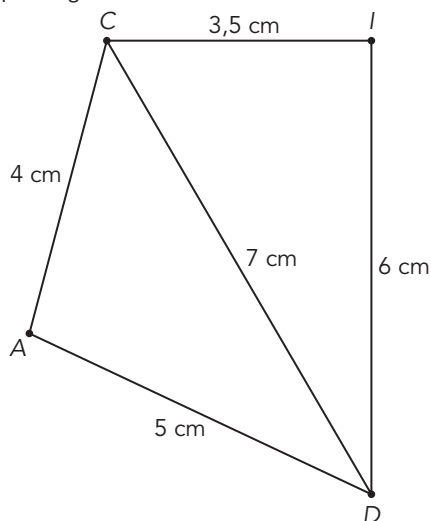
b) 5 cm + 9 cm = 14 cm; 7 cm + 8 cm = 15 cm.

2. a) Quadrilátero **I**: convexo; quadrilátero **II**: côncavo; quadrilátero **III**: convexo; quadrilátero **IV**: côncavo.

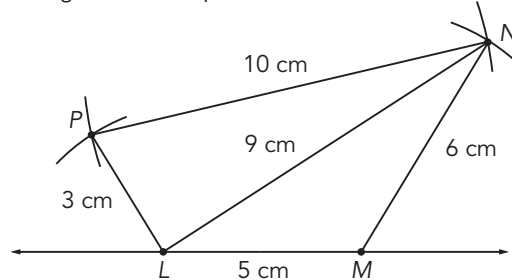
b)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c) Uma das diagonais ficou "fora" do quadrilátero.

3. a) Resposta esperada: Traçar o quadrilátero *CIDA* incluindo a diagonal $\overline{CD}$. Exemplo de figura:

Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Sim; os triângulos *CID* e *CDA*.

4. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

5. a) $110° + 80° + 60° + x = 360° \Rightarrow 250° + x = 360° \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 360° - 250° \Rightarrow x = 110°$

b) $x + 2x + 4x + 5x = 360° \Rightarrow 12x = 360° \Rightarrow x = 30°$

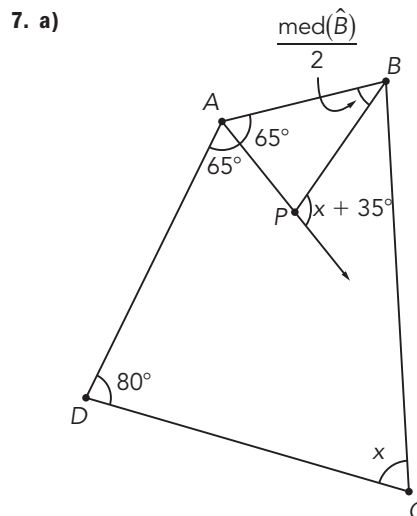
c) $90° + 80° + 120° + x = 360° \Rightarrow 290° + x = 360° \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 360° - 290° \Rightarrow x = 70°$

d) $x + x + 5x + 5x = 360° \Rightarrow 12x = 360° \Rightarrow x = 30°$

6. a) Como $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, temos $med(\hat{B}) = x$. Assim, no quadrilátero *ABCD*:
$100° + 120° + x + 3x = 360° \Rightarrow 4x = 360° - 220° \Rightarrow x = 35°$

b) Como $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ e $\overline{CD} \cong \overline{CB}$, temos $med(A\hat{B}C) = med(A\hat{D}C) =$
$= 180° - x$. Logo:
$2 \cdot (180° - x) = 360° - 140° \Rightarrow 360° - 2x = 360° - 140° \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 140° \Rightarrow x = 70°$

7. a)

Banco de imagens/Arquivo da editora

No triângulo *ABP*, temos que $x + 35°$ é a medida do ângulo externo; então:

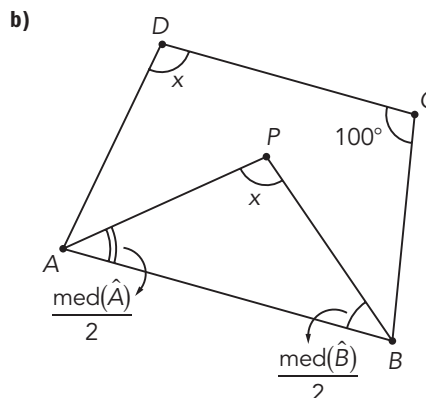
$x + 35° = 65° + \dfrac{med(\hat{B})}{2} \Rightarrow med(\hat{B}) = 2x - 60°$

No quadrilátero *ABCD*, temos:

$med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) + med(\hat{D}) = 360° \Rightarrow$

$\Rightarrow 130° + (2x - 60°) + x + 80° = 360° \Rightarrow x = 70°$

b)

Banco de imagens/Arquivo da editora

No triângulo *ABP*, temos:

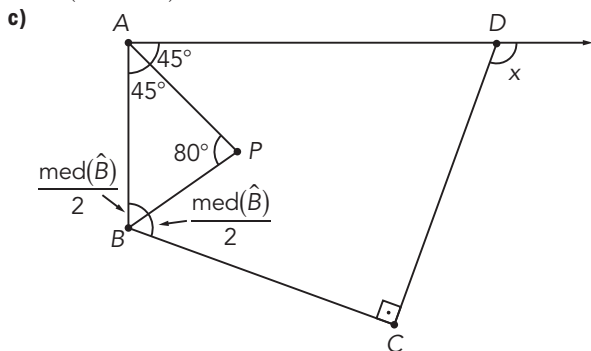
$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) = 360° - 2x$

No quadrilátero *ABCD*, temos:

$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{D}) = 360° \Rightarrow$

$\Rightarrow (360° - 2x) + 100° + x = 360° \Rightarrow x = 100°$

c)

Banco de imagens/Arquivo da editora

No triângulo *ABP*, temos:

$\dfrac{\text{med}(\hat{B})}{2} + 80° + 45° = 180° \Rightarrow \text{med}(\hat{B}) = 110°$

No quadrilátero *ABCD*, temos:

$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{D}) = 360° \Rightarrow$

$\Rightarrow 90° + 110° + 90° + 180° - x = 360° \Rightarrow x = 110°$

8. a) $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{D}) = 180° \Rightarrow 80° + x = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 180° - 80° \Rightarrow x = 100°$

$\text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 180° \Rightarrow 50° + y = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 180° - 50° \Rightarrow y = 130°$

b) $\text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{B}) = 180° \Rightarrow 120° + y = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 180° - 120° \Rightarrow y = 60°$

$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{D}) = 180° \Rightarrow 60° + x = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 180° - 60° \Rightarrow x = 120°$

c) $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{D}) = 180° \Rightarrow 135° + x = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 180° - 135° \Rightarrow x = 45°$

$\text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 180° \Rightarrow 90° + y = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 180° - 90° \Rightarrow y = 90°$

9. Sendo x a medida do ângulo $\hat{T}$, temos:

$2x + x = 180° \Rightarrow 3x = 180° \Rightarrow x = 60°$

Sendo y a medida do ângulo $\hat{I}$, temos:

$3y + y = 180° \Rightarrow 4y = 180° \Rightarrow y = 45°$

$\text{med}(\hat{O}) = 2 \cdot 60° = 120°$

$\text{med}(\hat{T}) = 60°$

$\text{med}(\hat{C}) = 3 \cdot 45° = 135°$

$\text{med}(\hat{I}) = 45°$

10. a) $x + 60° = 180° \Rightarrow x = 120°$

$x + y = 180° \Rightarrow y + 120° = 180° \Rightarrow y = 60°$

b) $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{C}) \Rightarrow x + 130° = 180° \Rightarrow x = 50°$

$x + y = 180° \Rightarrow 50° + y = 180° \Rightarrow y = 130°$

c) $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{D}) = 120°$

No $\triangle ABC$:

$x + 120° + 20° = 180° \Rightarrow x = 40°$

$40° + 120° + y = 180° \Rightarrow 160° + y = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 180° - 160° \Rightarrow y = 20°$

11. Sendo x a medida de cada ângulo agudo:

a) $3x + 3x + x + x = 360° \Rightarrow 8x = 360° \Rightarrow x = 45°$

Os ângulos agudos medem 45°.

Os ângulos obtusos medem $3 \cdot 45° = 135°$.

Então, os ângulos medem 45°, 135°, 45°, 135°.

b) Sendo x a medida do ângulo agudo:

$90° + 90° + \dfrac{4x}{5} + x = 360° \Rightarrow \dfrac{4x + 5x}{5} = 360° - 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x = 180° \cdot 5 \Rightarrow x = \dfrac{900°}{9} \Rightarrow x = 100°$

$\dfrac{4x}{5} = \dfrac{400}{5} = 80°$

Os ângulos medem 90°, 90°, 100°, 80°.

12. $2x - 9 + 3x + 20 + \dfrac{x}{2} - 7 + \dfrac{5x - 7}{3} = 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{12x - 54 + 18x + 120 + 3x - 42 + 10x - 14}{6} = \dfrac{2\,160}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12x + 18x + 3x + 10x = -160 + 54 - 120 + 42 + 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow 43x = 2\,150 \Rightarrow x = 50$

$\text{med}(\hat{A}) = 2 \cdot 50° - 9° = 100° - 9° = 91°$

$\text{med}(\hat{B}) = 3 \cdot 50° + 20° = 150° + 20° = 170°$

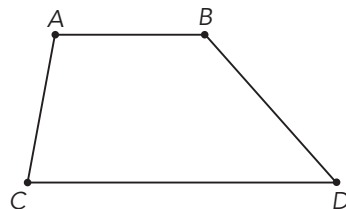
$\text{med}(\hat{C}) = \dfrac{50°}{2} - 7° = 25° - 7° = 18°$

$\text{med}(\hat{D}) = \dfrac{5 \cdot 50° - 7°}{3} = \dfrac{250° - 7°}{3} = \dfrac{243°}{3} = 81°$

Portanto, $\text{med}(\hat{A}) = 91°$, $\text{med}(\hat{B}) = 170°$, $\text{med}(\hat{C}) = 18°$ e $\text{med}(\hat{D}) = 81°$.

13. a) Sim, pois um quadrado é um quadrilátero com 4 ângulos retos.

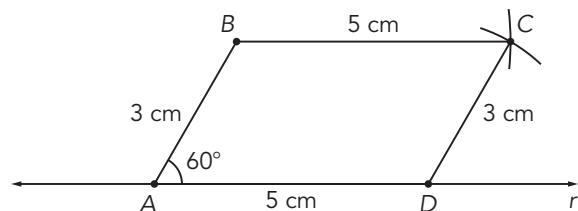
b) Não, pois um losango nem sempre tem os ângulos medindo 90°.

14. Trapézio escaleno é um trapézio com os 4 lados de medidas diferentes. A figura a seguir é um trapézio escaleno, pois tem dois lados paralelos $(\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD})$ e as quatro medidas dos lados diferentes.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Capítulo 10

Atividades

1. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Sobre uma reta r, marcamos $AD = 5$ cm. Com vértice em A, construímos um ângulo medindo 60° e marcamos $AB = 3$ cm. Obtemos o vértice C fazendo $BC = 5$ cm e $CD = 3$ cm.

2. $80° - 135° = 45°$. Os outros ângulos medem 45°, 135° e 45°.

3. a) $15 + 15 + x + x = 80 \Rightarrow 30 + 2x = 80 \Rightarrow 2x = 80 - 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 50 \Rightarrow x = 25$; ou seja, $x = 25$ cm.

b) $3x + x + 3x + x = 80 \Rightarrow 8x = 80 \Rightarrow x = 10$; ou seja, $x = 10$ cm.

4. Sendo x a medida de um dos lados do paralelogramo:

a) $x + x + 2x + 2x = 48 \Rightarrow 6x = 48 \Rightarrow x = 8$

Os lados medem 8 cm, 16 cm, 8 cm e 16 cm.

b) $x + 3x + x + 3x = 32 \Rightarrow 8x = 32 \Rightarrow x = 4$

Os lados medem 4 cm, 12 cm, 4 cm e 12 cm.

c) $\frac{1}{3}x + x + \frac{1}{3}x + x = 56 \Rightarrow \frac{x + 3x + x + 3x}{3} = 56 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x = 56 \cdot 3 \Rightarrow 8x = 168 \Rightarrow x = \frac{168}{8} \Rightarrow x = 21$

Os lados medem 21 cm, 7 cm, 21 cm e 7 cm.

d) $x + x + x + 2 + x + 2 = 24 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$

Os lados medem 5 cm, 7 cm, 5 cm e 7 cm.

e) $x + x + x + 1 + x + 1 = 42 \Rightarrow 4x = 40 \Rightarrow x = 10$

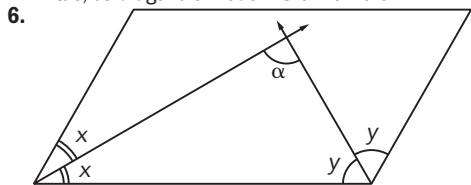
Os lados medem 10 cm, 11 cm, 10 cm e 11 cm.

5. Sendo $CM = 5$ cm e $EM = 4$ cm e sabendo que as diagonais do paralelogramo se intersectam no ponto médio, temos:

$CR = 2 \cdot CM = 2 \cdot 5 = 10$

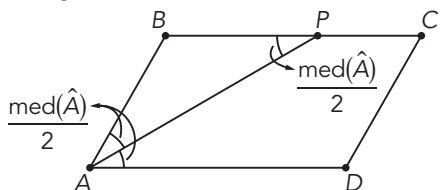
$AE = 2 \cdot EM = 2 \cdot 4 = 8$

Então, as diagonais medem 8 cm e 10 cm.

6.

Temos: $2x + 2y = 180° \Rightarrow x + y = 90°$.

Então: $\alpha + x + y = 180° \Rightarrow \alpha + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 90°$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

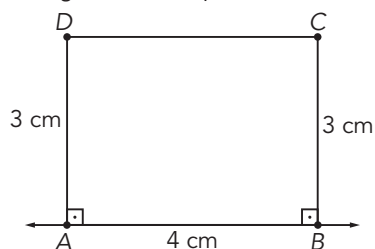
7. A imagem não está representada com medidas reais.

$med(B\hat{P}A) = med(P\hat{A}D)$ (por serem ângulos alternos internos), então, $med(B\hat{P}A) = \frac{med(\hat{A})}{2}$.

O $\triangle BAP$ é isósceles de base $\overline{AP}$ (porque tem dois ângulos congruentes), então, $\overline{AB} \cong \overline{PB}$ e, portanto, $BP = 7$ cm.

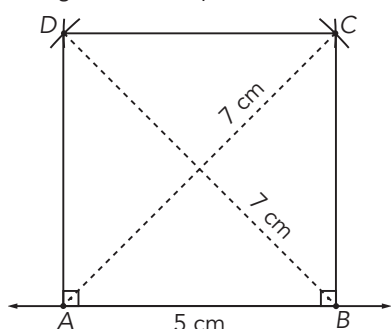
$BC = BP + PC = 7 + 3 = 10$

Medida de perímetro: $2 \cdot (7 \text{ cm} + 10 \text{ cm}) = 34$ cm.

8. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Sobre uma reta, marcamos $AB = 4$ cm. Pelos pontos A e B, traçamos perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e marcamos nessas perpendiculares os pontos C e D tais que $BC = AD = 3$ cm, obtendo o retângulo $ABCD$.

9. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Sobre uma reta, marcamos $AB = 5$ cm. Pelos pontos A e B, traçamos perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e obtemos nessas perpendiculares os pontos C e D, tais que $AC = BD = 7$ cm.

10. a) $x = 180° - (90° + 35°) = 55°$

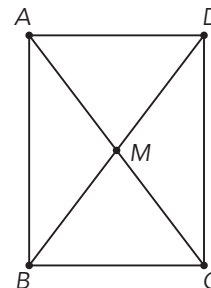
$y = 90° - 35° = 55°$

b) $x = \frac{180° - 130°}{2} = \frac{50°}{2} = 25°$

$y = 90° - 25° = 65°$

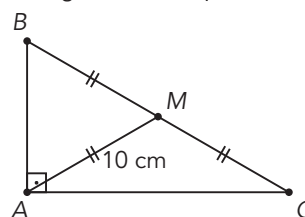
11. No retângulo $ABCD$, as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes e se intersectam no ponto M, que é médio de ambas.

Então:

Banco de imagens/Arquivo da editora

$\overline{BM} \cong \overline{AM} \cong \overline{MC}$.

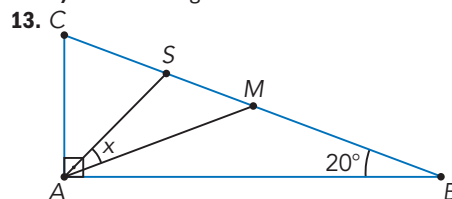
Isso prova que, no triângulo retângulo ABC, a medida da mediana $\overline{BM}$ é igual à metade da metade da hipotenusa $\overline{AC}$, logo $med(M\hat{A}B) = 20°$

12. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) No $\triangle ABC$, temos: $BC = 2 \cdot AM = 2 \cdot 10 \text{ cm} = 20$ cm.

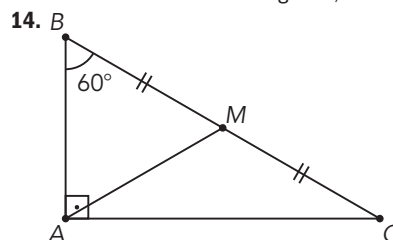
b) Os dois triângulos são isósceles.

13.

Banco de imagens/Arquivo da editora

De acordo com a atividade **11**, temos $\overline{BM} \cong \overline{AM} \cong \overline{MC}$, então, o $\triangle ABM$ é isósceles de base $\overline{AB}$, logo, $med(M\hat{A}B) = 20°$.

Como $\overline{AS}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$, temos: $x = 45° - 20° = 25°$.

14.

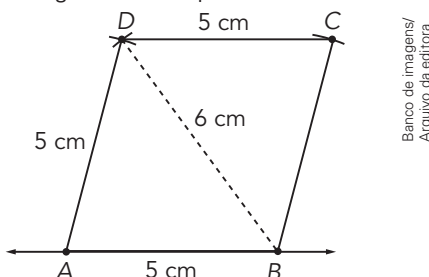
Banco de imagens/Arquivo da editora

Temos: $med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow 90° + 60° + med(\hat{C}) \Rightarrow 180° \Rightarrow med(\hat{C}) = 30°$

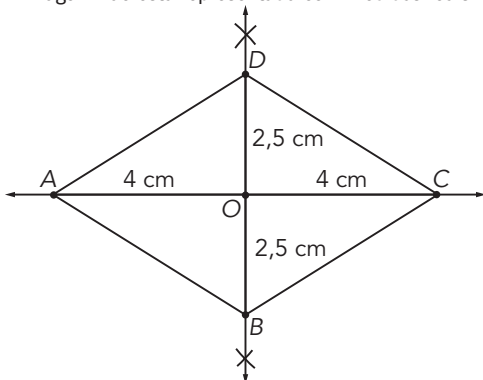
Como $\overline{AM} \cong \overline{CM}$, o $\triangle AMC$ é isósceles de base $\overline{AC}$ e, então, $med(M\hat{A}C) = med(\hat{C}) = 30°$. Logo:

$med(M\hat{A}B) = 90° - med(M\hat{A}C) = 90° - 30° = 60°$

Assim, $\overline{AM}$ forma com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ ângulos que medem 60° e 30°, respectivamente.

15. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

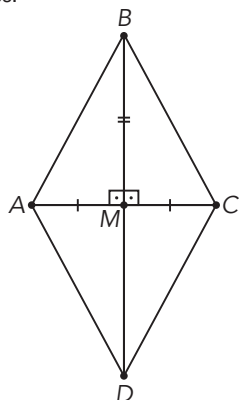
Sobre uma reta, marcamos $AB = 5$ cm. Obtemos o ponto D de modo que $AD = 5$ cm e $DB = 6$ cm. Em seguida, obtemos o ponto C de modo que $DC = BC = 5$ cm, determinando, assim, o losango $ABCD$.

16. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Traçamos duas retas perpendiculares cuja intersecção é o ponto O. Marcamos $AO = OC = 4$ cm e $OB = OD = 2{,}5$ cm, determinando, assim, o losango $ABCD$.

17. a) Como $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{C})$, temos $x = 150°$.
No $\triangle BCD$, temos $\text{med}(C\hat{B}D) = \text{med}(C\hat{D}B) = y$. Então:
$y + y + x = 180° \Rightarrow 2y + 150° = 180° \Rightarrow y = 15°$.

b) Como $\overline{BD}$ é bissetriz do ângulo $\hat{D}$, temos $x = 32°$.
No $\triangle ABD$: $x + x + y = 180° \Rightarrow 32° + 32° + y = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 116°$.

18. No losango $ABCD$, as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares entre si e se intersectam no ponto M, que as divide em duas partes congruentes. Vamos provar que a diagonal $\overline{BD}$ divide o ângulo $\hat{B}$ em dois ângulos congruentes.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Comparemos os triângulos MAB e MCB:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AM} \cong \overline{MC} \\ \text{med}(A\hat{M}B) = \text{med}(C\hat{M}B) = 90° \\ MB \text{ é o lado comum}\end{array}\right\} \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} \triangle MAB \cong \triangle MCB \Rightarrow$$

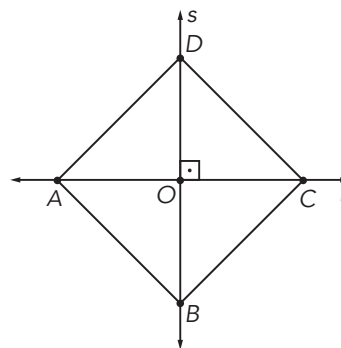
$\Rightarrow \text{med}(A\hat{B}M) = \text{med}(C\hat{B}M)$

Analogamente, podemos provar que $\overline{BD}$ divide $\hat{D}$ em dois ângulos congruentes e que $\overline{AC}$ divide $\hat{A}$ e $\hat{C}$ em dois ângulos congruentes.

19. Um dos ângulos internos do losango medirá $2 \cdot 52° = 104°$, e o ângulo interno consecutivo a esse medirá $180° - 104° = 76°$. Assim, os ângulos medem 104°, 76°, 104° e 76°.

20. A diagonal menor do losango é a bissetriz do ângulo que mede 120°. Assim, os dois triângulos formados são equiláteros, cujos ângulos medem 60°.

21. O losango será formado por dois triângulos equiláteros e seus ângulos medirão 60°, 120°, 60° e 120°.

22. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Traçamos duas retas perpendiculares cuja intersecção é o ponto O. Marcamos $AO = OB = OC = OD = 2$ cm, obtendo o quadrado $ABCD$.

23. a) Como $x + y = 90°$ e $x = y$, temos $x = y = 45°$.

b) Como as diagonais do quadrado são perpendiculares, temos $x = 90°$. Como as diagonais do quadrado são bissetrizes dos ângulos internos, temos: $y = \frac{90°}{2} = 45°$.

24. a) Certa, pois um quadrado é também um paralelogramo.

b) Errada, pois existem paralelogramos que não possuem os 4 ângulos iguais.

c) Errada, pois existem retângulos cujas diagonais não são perpendiculares.

d) Certa, pois um quadrado é também um retângulo.

e) Errada, pois existem retângulos que não possuem todos os lados congruentes.

f) Errada, pois existem losangos que não possuem ângulos retos.

g) Certa, pois um quadrado é também um losango.

h) Certa, pois todo quadrado é paralelogramo, retângulo e losango.

25. A medida do lado do triângulo equilátero é $\frac{1}{3} \cdot 24$ cm $= 8$ cm, enquanto a do lado do quadrado é $\frac{1}{4} \cdot 24$ cm $= 6$ cm. Assim, a razão entre as medidas do lado do triângulo e do lado do quadrado é $\frac{8 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{4}{3}$.

26. $3x + x = 180° \Rightarrow 4x = 180° \Rightarrow x = 45°$
$4y + y = 180° \Rightarrow y = 36°$
$\text{med}(\hat{A}) = 45°$
$\text{med}(\hat{D}) = 3 \cdot 45° = 135°$
$\text{med}(\hat{B}) = 36°$
$\text{med}(\hat{C}) = 4 \cdot 36° = 144°$
Portanto, $\text{med}(\hat{A}) = 45°$, $\text{med}(\hat{B}) = 36°$, $\text{med}(\hat{C}) = 144°$ e $\text{med}(\hat{D}) = 135°$.

27. a) $8x + 8x + x + x = 360° \Rightarrow 18x = 360° \Rightarrow x = 20°$
$\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{B}) = 20°$
$\text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{D}) = 8 \cdot 20° = 160°$
Portanto, $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{B}) = 20°$ e $\text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{D}) = 160°$.

b) $3x - 5° = 2x + 15° \Rightarrow 3x - 2x = 15° + 5° \Rightarrow x = 20°$

$\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{B}) = 3 \cdot 20° - 5° = 60° - 5° = 55°$

$\text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{D}) = 180° - 55° = 125°$

Portanto, $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{B}) = 55°$ e $\text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{D}) = 125°$.

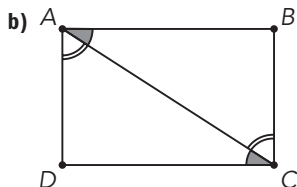
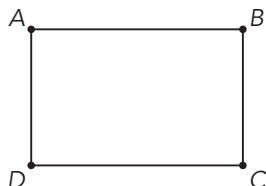
28. a) $180° - 50° = 130°$

b) $180° - 80° = 100°$

c) $\frac{250°}{2} = 125°$

29. a) Considere os seguintes pares de retas paralelas: $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ e $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$.

b)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c) A diagonal $\overline{AC}$ é uma transversal das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$. Os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ são alternos internos, logo, são congruentes.

Essa diagonal $\overline{AC}$ também é transversal das retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, então, os ângulos $D\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$ são alternos internos e, por isso, são congruentes.

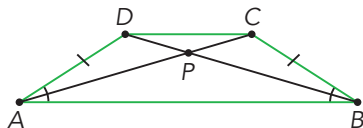
Traçando essa diagonal, também observamos que o paralelogramo é dividido em dois triângulos: $\triangle ABC$ e $\triangle CDA$. Esses triângulos possuem um dos lados em comum: lado $\overline{AC}$ (que é a diagonal do paralelogramo).

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$ pelo caso ALA (ângulo, lado, ângulo), pois: $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ (ângulo); $\overline{AC}$ é comum aos dois triângulos (lado); $D\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$ (ângulo).

Como esses dois triângulos são congruentes, todos os lados correspondentes são congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$; $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ e os outros ângulos correspondentes são também congruentes: $A\hat{B}C \cong C\hat{D}A$.

Logo, provamos por congruência de triângulos que no quadrilátero $ABCD$ os lados opostos são congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$; $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

30. Dado um trapézio isósceles $ABCD$, vamos chamar de P a intersecção de $\overline{AC}$ com $\overline{BD}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Pelo caso LLL (lado, lado, lado), $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ e temos $D\hat{B}A \cong C\hat{A}B$, portanto, o $\triangle PAB$ é isósceles.

Por serem alternos internos, temos $C\hat{D}B \cong D\hat{B}A$.

Analogamente, $D\hat{C}A \cong C\hat{A}B$.

Portanto, o $\triangle PCD$ também é isósceles.

Logo, as diagonais e as bases de um trapézio isósceles determinam dois triângulos isósceles, como queríamos demonstrar.

31.

Banco de imagens/Arquivo da editora

As medidas dos ângulos são 50°, 50°, 130° e 130°.

32. Temos:

$x + x + 1 + 3x + 2 + 2x - 4 = 41 \Rightarrow 7x = 41 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x = 42 \Rightarrow x = 6$

Os lados medem, em cm:

$AP = 3 \cdot 6 + 2 = 18 + 2 = 20$

$PO = 6 + 1 = 7$

$OT = 6$

$AT = 2 \cdot 6 - 4 = 12 - 4 = 8$

Portanto, $AP = 20$ cm; $PO = 7$ cm; $OT = 6$ cm; $AT = 8$ cm.

33. Sendo x a medida de cada lado não paralelo, em cm, temos:

$x + x + 15 + 9 = 44 \Rightarrow 2x + 24 = 44 \Rightarrow x = 10$

Portanto, cada um dos outros lados mede 10 cm.

Participe (p. 130)

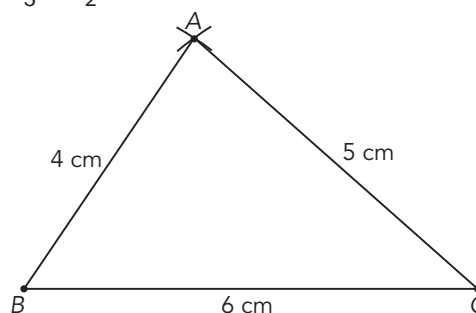
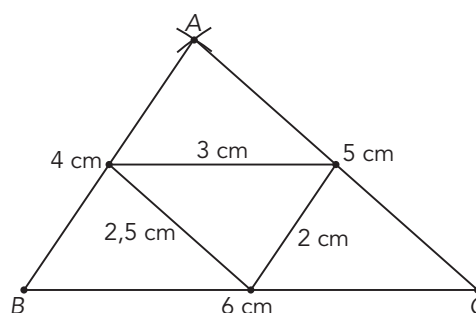
a) 3 cm

b) 1,5 cm

c) $\frac{1,5}{3} = \frac{1}{2}$

d)

e)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

As bases médias devem medir 2 cm, 2,5 cm e 3 cm.

f) Metade da medida do lado.

34. $MN = \frac{BC}{2}$

a) $x = \frac{8}{2} \Rightarrow x = 4$

O perímetro mede $2 + 4 + 2 + 4 + 8 = 20$.

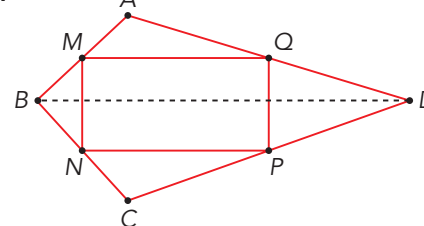
b) $x = \frac{3x - 5}{2} \Rightarrow 2x = 3x - 5 \Rightarrow 3x - 2x = 5 \Rightarrow x = 5$

O perímetro mede $2 + 3 + 2 + 3 + (3 \cdot 5 - 5) = 10 + 10 = 20$.

35. a) $x = 60°$

b) $x = \frac{6 - x}{2} \Rightarrow 2x = 6 - x \Rightarrow 2x + x = 6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

36.

Banco de imagens/Arquivo da editora

No $\triangle ABD$, temos $MQ = \dfrac{BD}{2}$ e $\overline{MQ} \parallel \overline{BD}$.

No $\triangle BCD$, temos $NP = \dfrac{BD}{2}$ e $\overline{NP} \parallel \overline{BD}$.

Então: $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$.

Analogamente considerando os triângulos BMN e DPQ, provamos que $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$.

Assim, está provado que $MNPQ$ é um paralelogramo.

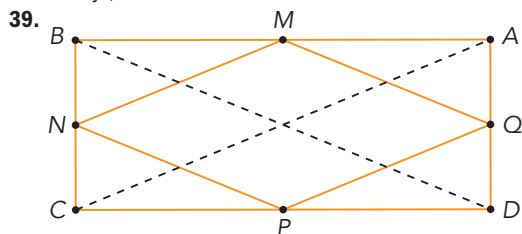
37. Temos $DE = \dfrac{IA}{2} = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$; $DF = \dfrac{TA}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$ e

$EF = \dfrac{IT}{2} = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$.

Assim, o perímetro do $\triangle DEF$ mede $5{,}5 + 7 + 4{,}5 = 17$, ou seja, 17 cm.

38. Temos $BC = 2MN = 2 \cdot 7 = 14$; $AB = 2NR = 2 \cdot 4 = 8$ e $AC = 2MR = 2 \cdot 8 = 16$. Assim, o perímetro do $\triangle ABC$ mede $14 + 8 + 16 = 38$; ou seja, 38 cm.

39.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Conforme a atividade **36**, $MNPQ$ é um paralelogramo.

$MN = PQ = \dfrac{AC}{2}$ $\qquad MQ = NP = \dfrac{BD}{2}$

Como $ABCD$ é retângulo, temos $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ e, portanto:

$\overline{MN} \cong \overline{PQ} \cong \overline{MQ} \cong \overline{NP}$.

Está provado que $MNPQ$ é um losango.

Participe (p. 132)

a) 4 cm e 3 cm.

b) 3,5 cm

c) $AB + CD = 4 + 3 = 7$ cm

$\dfrac{MN}{AB + CD} = \dfrac{3{,}5}{7} = \dfrac{1}{2}$

40. Como $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, temos $x = 70°$ e $y = 80°$.

Como $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$, temos:

$z = \dfrac{18 + 30}{2} = \dfrac{48}{2} = 24$; ou seja, 24 cm.

41. Sendo x a medida da base menor:

$30 = \dfrac{\frac{3x}{2} + x}{2} \Rightarrow 60 = \dfrac{3x}{2} + x \Rightarrow 3x + 2x = 120 \Rightarrow 5x = 120 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 24$

Então: $\dfrac{3}{2} \cdot x = \dfrac{3}{2} \cdot 24 = \dfrac{72}{2} = 36$.

As bases medem 24 cm e 36 cm.

42. a) $2x + 2 = \dfrac{x + 3 + 4x - 3}{2} \Rightarrow 2 \cdot (2x + 2) = 5x \Rightarrow 4x + 4 = 5x \Rightarrow x = 4$

b) $x = \dfrac{x + 3}{2} \Rightarrow 2x = x + 3 \Rightarrow 2x - x = 3 \Rightarrow x = 3$

$y = \dfrac{5y - 2x}{2} \Rightarrow y = \dfrac{5y - 2 \cdot 3}{2} \Rightarrow 2y = 5y - 6 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$

43. Como $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$, temos $y = 110°$ e $z = 120°$.

Como $PQ = \dfrac{AB + CD}{2}$, temos:

$x = \dfrac{10 + 26}{2} = \dfrac{36}{2} = 18$; ou seja, 18 cm.

O perímetro de $ABCD$ mede $26 + 10 + 10 + 13 + 13 = 82$; ou seja, 82 cm.

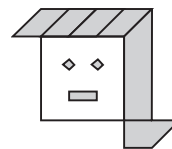
44. Sendo x a medida da base menor, a maior mede $(x + 4)$ e, assim:

$14 = \dfrac{x + 4 + x}{2} \Rightarrow 28 = 2x + 4 \Rightarrow 28 - 4 = 2x \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow$

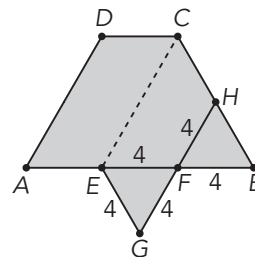
$\Rightarrow x = 12$

As bases medem 12 cm e 16 cm.

45. $A_{trapézio} = \dfrac{B + b}{2} \cdot h = (\text{medida da base média}) \cdot h = 9\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm} = 90\ \text{cm}^2$

46. Exemplo de resposta:

Banco de imagens/Arquivo da editora

Na olimpíada (p. 134)

Determinando a medida de perímetro

Banco de imagens/Arquivo da editora

Em centímetros:

$AE = EG = 4$ (após a dobra, A coincide com G).

$CD = AE = 4$ (porque $AECD$ é paralelogramo).

$CH = CD = 4$ (após a dobra, D coincide com H).

$AD = GH = 8$ (após a dobra, $\overline{AD}$ coincide com $\overline{GH}$).

Medida de perímetro: $AB + BC + CD + DA = 12 + 8 + 4 + 8 = 32$.

Logo, alternativa **e**.

Na mídia

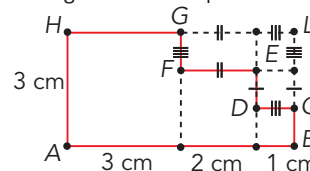
1. a) O retângulo.

b) Sim, pois um paralelogramo é um quadrilátero que tem dois pares de lados opostos paralelos e congruentes.

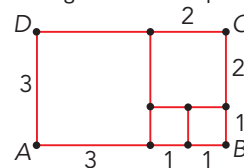
c) Sim.

2. Resposta pessoal.

Na Unidade

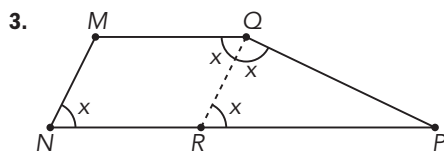
1. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de perímetro do polígono $ABCDEFGH$ é igual à do retângulo $ABLH$, de lados medindo 3 cm e 6 cm. Logo, alternativa **a**.

2. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{5\ell}{3\ell} = \dfrac{5}{3}$

Logo, alternativa **a**.

3.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Sendo $\overline{QR}$ a bissetriz do ângulo $M\hat{Q}P$, temos:

$\text{med}(M\hat{N}R) = \text{med}(M\hat{Q}R) = x$.

Além disso, $\text{med}(M\hat{N}R) = \text{med}(P\hat{Q}R)$ (pois são alternos internos), então, $PR = PQ$, pois o PQR é isósceles de base $\overline{QR}$.

Como $MNRQ$ é um paralelogramo, temos $NR = MQ = 42$.

Então, $PR = 112$ cm $- 42$ cm $= 70$ cm. Logo, alternativa **e**.

4. Analisando as alternativas temos que: a alternativa **a** está errada, pois, além do quadrado, o retângulo também possui ângulos retos; a alternativa **b** está errada, pois o losango também possui os lados com medidas iguais; a alternativa **d** está errada, pois no retângulo e no losango as diagonais se intersectam no ponto médio; a alternativa **e** está errada, pois no retângulo e no losango todos os lados opostos são paralelos e no trapézio há um par de lados opostos paralelos. A única alternativa que apresenta propriedade apenas do quadrado é a alternativa **c**, pois só o quadrado apresenta diagonais iguais e perpendiculares. Logo, alternativa **c**.

5. Sendo x a medida de maior ângulo:

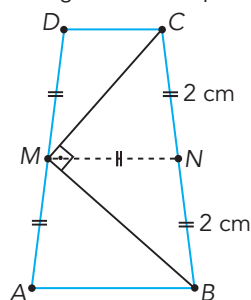
$90° + 90° + 35° + x = 360°$

$215° + x = 360° \Rightarrow x = 145°$

Logo, alternativa **c**.

6. As alternativas **a**, **b**, **c** e **d** são falsas, logo, a alternativa **e** é a correta, pois afirma que as outras são incorretas.

7. Todo losango é paralelogramo. Logo, alternativa **e**.

8. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

N é o ponto médio de $\overline{BC}$. Então, $\overline{MN}$ é a mediana do $\triangle BMC$ e $MN = NB = NC = 2$ cm. Como $\overline{MN}$ é a base média do trapézio:

$\dfrac{AB + CD}{2} = MN = 2$ cm

$AB + CD = 4$ cm

O perímetro do trapézio mede $AB + BC + CD + DA = (AB + CD) + 4$ cm $+ 4$ cm $= 4$ cm $+ 8$ cm $= 12$ cm.

Logo, alternativa **c**.

9. O triângulo BCE é equilátero, então, $\text{med}(C\hat{B}E) = 60°$. O polígono $ABCD$ é um quadrado, então, $\text{med}(A\hat{B}E) = 90° - 60° = 30°$. Como $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{BE}$, o triângulo ABE é isósceles e sendo $\text{med}(A\hat{E}B) = x$, temos: $\text{med}(A\hat{B}E) + 2x = 180° \Rightarrow 30° + 2x = 180° \Rightarrow x = 75°$

Logo, alternativa **d**.

10. Como $\text{med}(\hat{a}) + \text{med}(\hat{b}) + \text{med}(\hat{c}) + \text{med}(\hat{d}) = 360°$, temos:

$\dfrac{x}{2} + 2x + \dfrac{3x}{2} + x = 360° \Rightarrow \dfrac{10x}{2} = 360° \Rightarrow x = 72° \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{med}(\hat{d}) = 72°$

$\text{med}(\hat{d}) + \text{med}(\hat{e}) + \text{med}(\hat{f}) = 180° \Rightarrow 72° + 90° + \text{med}(\hat{f}) = 180° \Rightarrow \text{med}(\hat{f}) = 18°$

Logo, alternativa **b**.

Unidade 6

Abertura (p. 139)

Respostas pessoais. Exemplo de resposta: Os impostos são cobrados para que o governo tenha recursos financeiros para despesas administrativas e para oferecer à população serviços e benefícios em segurança, educação, saúde, etc.

Capítulo 11

Atividades

1. *aha* $= x$

$x + \dfrac{x}{7} = 19 \Rightarrow 7x + x = 7 \cdot 19 \Rightarrow 8x = 133 \Rightarrow x = \dfrac{133}{8}$

2. $x + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{7} = 33 \Rightarrow 42x + 28x + 21x + 6x = 42 \cdot 33 \Rightarrow$

$\Rightarrow 97x = 1\,386 \Rightarrow x = \dfrac{1\,386}{97}$

3. Sendo x o número de candidatos:

$\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{4}x + 15 = x \Rightarrow \dfrac{8x + 3x + 180}{12} = \dfrac{12x}{12} \Rightarrow 11x - 12x = -180 \Rightarrow x = 180$

Eram 180 candidatos.

4. Sendo x a extensão da rodovia:

$\dfrac{2}{5}x + 84 = x \Rightarrow \dfrac{2x + 420}{5} = \dfrac{5x}{5} \Rightarrow 2x - 5x = -420 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x = -420 \Rightarrow x = \dfrac{420}{3} \Rightarrow x = 140$

A rodovia tem 140 km de extensão.

5. a) Leandro gastou $\dfrac{7}{8}$, logo, ficou com $\dfrac{1}{8}$ do salário.

Leonardo gastou $\dfrac{9}{10}$, logo ficou com $\dfrac{1}{10}$ do salário.

Como $\dfrac{1}{8} > \dfrac{1}{10}$, Leandro terminou o mês com mais dinheiro.

b) Sendo x o salário de cada um deles:

$\dfrac{x}{8} - \dfrac{x}{10} = 40 \Rightarrow 5x - 4x = 40 \cdot 40 \Rightarrow x = 1\,600$

O salário de cada um deles é de R$ 1.600,00.

6. a) $(4{,}81 + 2{,}42x)$ reais.

b) $4{,}81 + 2{,}42x = 24{,}17 \Rightarrow 2{,}42x = 24{,}17 - 4{,}81 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}42x = 19{,}36 \Rightarrow x = \dfrac{19{,}36}{2{,}42} \Rightarrow x = 8$

A corrida tem 8 km.

7. a) $(2\,500 + 2{,}50x)$ reais.

b) $2\,500 + 2{,}50x = 10\,000 \Rightarrow 2{,}50x = 10\,000 - 2\,500 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}50x = 7\,500 \Rightarrow x = \dfrac{7\,500}{2{,}50} \Rightarrow x = 3\,000$

São produzidas 3 000 unidades.

8. Sendo x o salário:

$x - \dfrac{9}{100}x = 1\,137{,}50 \Rightarrow \dfrac{100x - 9x}{100} = \dfrac{113\,750}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow 91x = 113\,750 \Rightarrow x = \dfrac{113\,750}{91} \Rightarrow x = 1\,250$

O salário de José Ricardo é R$ 1.250,00.

9. Seja x o salário antigo:

$\dfrac{10}{100}x + 150 = \dfrac{20}{100}x \Rightarrow \dfrac{10x + 15\,000}{100} = \dfrac{20x}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x = 15\,000 \Rightarrow x = 1\,500$

Salário novo:

$1\,500 + \frac{20}{100} \cdot 1\,500 = 1500 + 300 = 1\,800$

O novo salário de Luís Carlos é R$ 1.800,00.

10. Seja x a medida de capacidade, em litros, do tanque:

$\frac{75x}{100} = 42 \Rightarrow 75x = 4\,200 \Rightarrow x = \frac{4\,200}{75} \Rightarrow x = 56$

$56 - 42 = 14$

Cabem ainda 14 litros.

11. Seja x o valor do aluguel:

$x + \frac{10x}{100} = 594 \Rightarrow \frac{100x + 10x}{100} = \frac{59\,400}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow 110x = 59\,400 \Rightarrow x = \frac{59\,400}{110} \Rightarrow x = 540$

O valor do aluguel é R$ 540,00.

12. Seja x o total de vendas:

$1300 + \frac{1{,}5x}{100} = 1600 \Rightarrow \frac{130\,000 + 1{,}5x}{100} = \frac{160\,000}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}5x = 160\,000 - 130\,000 \Rightarrow 1{,}5x = 160\,000 - 130\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}5x = 30000 \Rightarrow x = \frac{30\,000}{1{,}5x} \Rightarrow x = 20000$

Ele precisa vender R$ 20.000,00.

13.

Número de funcionários	Salário médio (em reais)	Soma dos salários (em reais)
Antes: n	1 800	$1\,800 \cdot n$
Depois: $n + 1$	1 760	$1\,760 \cdot (n + 1)$

$1\,800n + 1\,440 = 1\,760 \cdot (n + 1) \Rightarrow 1\,800n + 1\,440 =$

$= 1\,760n + 1\,760 \Rightarrow 40n = 320 \Rightarrow n = \frac{320}{40} \Rightarrow n = 8$

Havia 8 funcionários.

14. Seja x o número de funcionários contratados, temos:

soma dos salários: $35 \cdot 1\,600 + x \cdot 1\,240$;

nova média: 1 520.

Então:

$35 \cdot 1\,600 + 1\,240x = 35 \cdot 1\,520 + 1\,520x \Rightarrow$

$\Rightarrow 35 \cdot (1\,600 - 1\,520) = x \cdot (1\,520 - 1\,240) \Rightarrow$

$\Rightarrow 35 \cdot 80 = 280x \Rightarrow x = \frac{35 \cdot 80}{280} \Rightarrow x = \frac{35 \cdot 2}{7} \Rightarrow x = 10$

A empresa contratou 10 funcionários.

15. Daqui a x anos, Wellington terá $(42 + x)$ anos; e Mariana, $(12 + x)$ anos.

$42 + x = 2 \cdot (12 + x) \Rightarrow 42 + x = 24 + 2x \Rightarrow x - 2x = 24 - 42 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x = -18 \Rightarrow x = 18$

Portanto, a idade do pai será o dobro da idade da filha daqui a 18 anos.

16. Seja x o número de páginas:

$\frac{x}{20} = \frac{x}{28} + 5 \Rightarrow \frac{7x}{140} = \frac{5x + 700}{140} \Rightarrow 7x - 5x = 700 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 700 \Rightarrow x = \frac{700}{2} \Rightarrow x = 350$

O livro tem 350 páginas.

17. t: medida de tempo em minutos para encher a 2ª piscina.

$t + 240$: medida de tempo em minutos para encher a 1ª piscina.

$12 \cdot (t + 240) = 15t \Rightarrow 12t + 2\,880 = 15t \Rightarrow$

$\Rightarrow -15t + 12t = -2\,880 \Rightarrow t = 960$

Medida de volume, em litros: $15t = 15 \cdot 960 = 14\,400$.

18. Sendo A o número de votos de Aline, C o de Clarice e M o de Mônica:

$$\begin{cases} A = 2 \cdot C \\ C = 18 + M \\ A + C + M = 214 - 20 \Rightarrow A + C + M = 194 \end{cases}$$

Substituindo A por $2 \cdot C$ e C por $(18 + M)$ na 3ª equação:

$A + C + M = 194 \Rightarrow 2 \cdot C + C + M = 194 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot (18 + M) + 18 + M + M = 194 \Rightarrow$

$\Rightarrow 36 + 2M + 18 + M + M = 194 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4M = 194 - 54 \Rightarrow 4M = 140 \Rightarrow M = 35$

Logo, Mônica tem 35 votos; Clarice, $18 + M = 18 + 35 = 53$; 53 votos; Aline, $2 \cdot C = 2 \cdot 53 = 106$; 106 votos.

19. Sendo x a medida da base:

$x + 1{,}5x + x + 1{,}5x = 20 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{5} \Rightarrow x = 4$

Portanto, para que um desses retângulos tenha medida de perímetro 20 cm, a base deve medir 4 cm.

20. Seja x a medida do comprimento da cartolina, em cm.

Medida de volume da caixa: $(x - 20) \cdot (40 - 20) \cdot 10 =$

$= (x - 20) \cdot 20 \cdot 10 = 200 \cdot (x - 20)$.

Assim:

$200 \cdot (x - 20) = 8\,000 \Rightarrow 200x - 4\,000 = 8\,000 \Rightarrow 200x =$

$= 8\,000 + 4\,000 \Rightarrow 200x = 12\,000 \Rightarrow x = \frac{12\,000}{200} \Rightarrow x = 60;$

ou seja, 60 cm.

21. Temos:

A: $3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

B: $2x = 0 \Rightarrow x = 0$

C: $0x = 2$ (impossível, pois não há valor de x que, multiplicado por zero, resulte em 2)

D: $0x = 0$ (indeterminada, pois qualquer valor de x multiplicado por zero resulta em zero)

E: $\frac{x}{2} = \frac{x}{3} \Rightarrow 3x = 2x \Rightarrow x = 0$

F: $x + 1 = 1 + x \Rightarrow 0x = 0$ (indeterminada)

a) C

b) D e F

22. **a)** $x - x = 2 - 1 \Rightarrow 0x = 1$ (impossível)

b) $2x - x = 1 - 1 \Rightarrow x = 0$

c) $x + x = 1 + 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

d) $\frac{2x + 1 - 4x}{4} = \frac{3 - 2 \cdot (x + 1)}{4} \Rightarrow 2x + 1 - 4x = 3 - 2x - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x + 2x + 2x = 3 - 2 - 1 \Rightarrow 0x = 0$ (indeterminada, pois x pode ser qualquer número)

e) $3x + 6 = 2x + 8 + x - 4$

$3x - 2x - x = 8 - 4 - 6 \Rightarrow 0x = -2$ (impossível)

f) $\frac{3 \cdot (x + 1) + 2 \cdot (2x + 1)}{6} = \frac{6 - (1 - x)}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 3 + 4x + 2 = 6 - 1 + x \Rightarrow 3x + 4x - x =$

$= 5 - 3 - 2 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

23. Sendo x o número:

$2 \cdot (x + 1) = 2x + 1 \Rightarrow 2x + 2 = 2x + 1 \Rightarrow 2x - 2x = -2 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0x = -1$

Para nenhum número inteiro.

24. Sendo x o número:

$x + \frac{3x}{4} = 2x - \frac{1x}{4} \Rightarrow \frac{4x + 3x}{4} = \frac{8x - x}{4} \Rightarrow 4x + 3x =$

$= 8x - x \Rightarrow 7x - 7x = 0 \Rightarrow 0x = 0$

Qualquer número.

25. **a)** $4x - 32 = 0 \Rightarrow 4x = 0 + 32 \Rightarrow 4x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{4} \Rightarrow x = 8$

$S = \{8\}$

b) $10x + 1 = 3 + 5x \Rightarrow 10x - 5x = 3 - 1 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

$S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

c) $2 \cdot (x + 7) - (1 - x) = 12 + 3x \Rightarrow 2x + 14 - 1 + x =$

$= 12 + 3x \Rightarrow 2x + x - 3x = 12 - 14 + 1 \Rightarrow 0x = -1$

$S = \varnothing$

d) $5x - 2 \cdot (2x - 1) = x + 2 \Rightarrow 5x - 4x + 2 = x + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x - 4x - x = 2 - 2 \Rightarrow 0x = 0$
Qualquer número racional x é solução da equação.

26. Depois de x anos, a idade de cada pessoa será x anos a mais. Então:
a) $54 + x = 39 + 4x \Rightarrow x - 4x = 39 - 54 \Rightarrow -3x = -15 \Rightarrow 3x = 15$
b) $3x = 15 \Rightarrow x = 5$
$S = \{5\}$
Daqui a 5 anos.

Na olimpíada (p. 146)

Eliminando os números iguais que aparecem em ambas as linhas, restam na 1ª linha os números 1 e 2 013 e, na 2ª linha, o número 19 e o número escondido. Como $1 + 2013 = 2014$, o número escondido adicionado a 19 resulta em 2 014:

$n + 19 = 2014 \Rightarrow n = 2014 - 19 = 1995$

Então, o número escondido é 1 995. Logo, alternativa **a**.

Educação financeira

I. Carnê e cartão de crédito. Dependendo do bem, podem ser feitos financiamento e *leasing*.
II. O valor das compras pagas com cartão de débito é descontado imediatamente da conta corrente.
III. RG, CPF, comprovante de residência e comprovante de renda.
IV. Não. É preciso pesquisar e negociar com a operadora.
V. O valor máximo que ela pode financiar usando o cartão.
VI. Se o valor da compra exceder o limite autorizado, o pagamento não poderá ser feito dessa maneira ou o pagamento é efetuado utilizando o valor disponível no cheque especial.
VII. Saldo a pagar é o valor que vence nessa data.
Pagamento mínimo é o menor valor que a pessoa pode pagar nessa data.
VIII. Paga encargos sobre saldo restante, acrescido do IOF (Imposto sobre Operações Financeiras).
IX. Deve avisar imediatamente a operadora do cartão e seguir as instruções quanto às demais providências.
1. À vista.
2. Nenhuma.
3. A resposta depende de valores a serem pesquisados na ocasião e pode variar de instituição para instituição.

Capítulo 12

Atividades

1. Sendo x e y os números:
$\begin{cases} x + y = 111 \\ x - y = 33 \end{cases}$
Adicionando as duas equações: $2x = 144 \Rightarrow x = 72$.
Substituindo na 1ª equação: $72 + y = 111 \Rightarrow y = 39$.
Os números são 72 e 39.

2. Sendo x o número de meninos e y o número de meninas:
$\begin{cases} x + y = 32 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$
Adicionando as duas equações: $3x = 39 \Rightarrow x = 13$.
Substituindo na 1ª equação: $13 + y = 32 \Rightarrow y = 19$.
São 13 meninos e 19 meninas.

3. a) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - 2y = -11 \end{cases}$
Adicionando as equações: $4x = -4 \Rightarrow x = -1$.
Substituindo na 1ª equação: $-1 + 2y = 7 \Rightarrow 2y = 8 \Rightarrow y = 4$.

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 30 \\ 4x - 5y = 5 \end{cases}$
Adicionando as equações: $7x = 35 \Rightarrow x = 5$.
Substituindo na 1ª equação: $3 \cdot 5 + 5y = 30 \Rightarrow 15 + 5y = 30 \Rightarrow y = 3$.

c) $\begin{cases} -2a + 3b = 0 \\ 2a + 5b = 16 \end{cases}$
Adicionando as equações: $8b = 16 \Rightarrow b = 2$.
Substituindo na 1ª equação: $-2a + 3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow -2a = -6 \Rightarrow a = 3$.

4. Sendo x o número de garçons e y o número de garçonetes:
$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ x = \frac{y}{2} - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 2 \\ 2x = y - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + y = -2 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$
Adicionando as duas equações: $-x = -6 \Rightarrow x = 6$.
Substituindo na 1ª equação: $-3 \cdot 6 + y = -2 \Rightarrow y = 16$.
São 6 garçons e 16 garçonetes.

5. a) Um sistema de duas equações com duas incógnitas é resolvido pelo método da adição quando o coeficiente de uma das incógnitas, na primeira equação, é o oposto (simétrico) do coeficiente da mesma incógnita na segunda equação; depois, adicionando as equações, eliminamos uma incógnita. A seguir, substituímos o valor encontrado dessa incógnita em uma das equações iniciais, resolvemos a equação e obtemos o valor da outra incógnita.

b) $\begin{cases} 4x + y = 0 \quad \cdot (3) \\ 6x - 3y = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 3y = 0 \\ 6x - 3y = 36 \end{cases}$
Adicionando as equações: $18x = 36 \Rightarrow x = 2$.
Substituindo na 1ª equação: $4 \cdot 2 + y = 0 \Rightarrow 8 + y = 0 \Rightarrow y = -8$.

6. a) $\begin{cases} 3a + 2b = 6 \\ 5a - b = 10 \quad \cdot (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 6 \\ 10a - 2b = 20 \end{cases}$
Adicionando as equações: $13a = 26 \Rightarrow a = 2$.
Substituindo na 1ª equação: $3 \cdot 2 + 2b = 6 \Rightarrow 6 + 2b = 6 \Rightarrow b = 0$.

b) $\begin{cases} 7x + 6y = 24 \\ 5x + 2y = 8 \quad \cdot (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 6y = 24 \\ -15x - 6y = -24 \end{cases}$
Adicionando as equações: $-8x = 0 \Rightarrow x = 0$.
Substituindo na 1ª equação: $7 \cdot 0 + 6y = 24 \Rightarrow 6y = 24 \Rightarrow y = 4$.

7. Sendo x o número de mesas com 3 pessoas e y o número de mesas com 4 pessoas:
$\begin{cases} x + y = 20 \quad \cdot (-3) \\ 3x + 4y = 73 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -60 \\ 3x + 4y = 73 \end{cases}$
Adicionando as equações: $y = 13$.
Substituindo na 1ª equação: $x + 13 = 20 \Rightarrow x = 7$.
Resposta: 7 mesas ficaram com 3 pessoas e 13 mesas com 4 pessoas.

8. a) Sendo x o número de torcedores na arquibancada e y o número de torcedores na cadeira numerada:
$\begin{cases} 10x + 30y = 26\,950 \\ x + y = 1\,575 \quad \cdot (-10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 30y = 26\,950 \\ -10x - 10y = -15\,750 \end{cases}$
Adicionando as equações: $20y = 11\,200 \Rightarrow y = \frac{11\,200}{20} \Rightarrow y = 560$.
Substituindo na 2ª equação: $x + 560 = 1\,575 \Rightarrow x = 1\,015$.
Portanto, 1 015 pessoas assistiram à partida da arquibancada.

b) Resposta pessoal. Em geral, as temáticas retratam a realidade social dos jovens negros e pobres da periferia das médias e grandes cidades.

c) Resposta pessoal.

9. Sendo $\frac{x}{y}$ a fração, temos o sistema
$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{6}{11} \\ x + y = 102 \quad \cdot (6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x = 6y \\ 6x + 6y = 612 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x - 6y = 0 \\ 6x + 6y = 612 \end{cases}$

Adicionando as equações, obtemos $17x = 612 \Rightarrow x = \frac{612}{17} = 36$ e, consequentemente, $y = 66$, pois $102 - 36 = 66$.

Portanto, a fração é $\frac{36}{66}$.

10. a) $\begin{cases} 2x + 5y = 20 & \cdot (4) \\ 3x + 4y = 23 & \cdot (-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 20y = 80 \\ -15x - 20y = -115 \end{cases}$

Adicionando as equações: $-7x = -35 \Rightarrow x = \frac{35}{7} \Rightarrow x = 5$.

Substituindo na 1ª equação: $2 \cdot 5 + 5y = 20 \Rightarrow 5y =$
$= 20 - 10 \Rightarrow y = \frac{10}{5} \Rightarrow y = 2$.

b) $\begin{cases} 7x - 3y = -16 & \cdot (4) \\ 5x + 4y = 7 & \cdot (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 28x - 12y = -64 \\ 15x + 12y = 21 \end{cases}$

Adicionando as equações: $43x = -43 \Rightarrow x = -1$.
Substituindo na 1ª equação: $7 \cdot (-1) - 3y = -16 \Rightarrow -7 - 3y =$
$= -16 \Rightarrow -3y = -16 + 7 \Rightarrow -3y = -9 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$.

11. Sendo x o número de meninas e y o número de meninos:

$\begin{cases} 2x + 3y = 73 & \cdot (-3) \\ 3x + 2y = 77 & \cdot (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 9y = -219 \\ +6x + 4y = 154 \end{cases}$

Adicionando as equações: $-5y = -65 \Rightarrow y = 13$.
Substituindo na 1ª equação: $2x + 3 \cdot 13 = 73 \Rightarrow 2x = 73 - 39 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{34}{2} \Rightarrow x = 17$.

Há 17 meninas e 13 meninos.

12. Sendo x a quantidade de cédulas de R$ 10,00 e y a quantidade de cédulas de R$ 50,00:

$\begin{cases} 10x + 50y = 3\,570 \\ 3x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 50y = 3\,570 \\ 3x - 2y = 0 & \cdot (25) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 10x + 50y = 3\,570 \\ 75x - 50y = 0 \end{cases}$

Adicionando as equações: $85x = 3\,570 \Rightarrow x = 42$.
Substituindo na 2ª equação: $3 \cdot 42 = 2y \Rightarrow y = 63$.
Havia 42 cédulas de R$ 10,00 e 63 cédulas de R$ 50,00.

13. Sendo m o número de melancias e a o número de abacaxis:

$\begin{cases} 2m + 5a = 60 & \cdot (-4) \\ 3m + 4a = 69 & \cdot (5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8m - 20a = -240 \\ 15m + 20a = 345 \end{cases}$

Adicionando as equações: $7m = 105 \Rightarrow m = 15$.
Substituindo na 1ª equação: $2 \cdot 15 + 5a = 60 \Rightarrow 30 + 5a =$
$= 60 \Rightarrow 5a = 60 - 30 \Rightarrow a = \frac{30}{5} \Rightarrow a = 6$.

A melancia custa R$ 15,00 e o abacaxi custa R$ 6,00.

14. a) $\begin{cases} x + y = 11 \\ 2x - 4y = 10 \end{cases}$

Temos $x = 11 - y$, então:
$2 \cdot (11 - y) - 4y = 10 \Rightarrow -6y = 10 - 22 \Rightarrow -6y =$
$= -12 \Rightarrow 6y = 12 \Rightarrow y = 2$
Assim:
$x = 11 - 2 = 9$

b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 7x + 11y = 50 \end{cases}$

Temos $x = 2y$, então:
$7 \cdot 2y + 11y = 50 \Rightarrow 14y + 11y = 50 \Rightarrow 25y = 50 \Rightarrow y = 2$
Assim:
$x = 2 \cdot 2 = 4$

c) $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ 3x + 6y = -15 \end{cases}$

Temos $y = -4 - 2x$, então:
$3x + 6 \cdot (-4 - 2x) = -15 \Rightarrow 3x - 24 - 12x =$
$= -15 \Rightarrow -9x = -15 + 24 \Rightarrow$
$\Rightarrow -9x = 9 \Rightarrow x = -1$
Assim:
$y = -4 - 2 \cdot (-1) \Rightarrow y = -4 + 2 \Rightarrow y = -2$

d) $\begin{cases} \frac{a}{3} = \frac{b}{4} \\ 3a + 4b = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = 4a \\ 3a + 4b = 20 \end{cases}$

Temos $b = \frac{4a}{3}$, então:

$3a + 4 \cdot \left(\frac{4a}{3}\right) = 20 \Rightarrow 3a + \frac{16a}{3} = 20 \Rightarrow 9a + 16a =$
$= 60 \Rightarrow 25a = 60 \Rightarrow a = \frac{12}{5}$

Assim:

$b = 4 \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{5}$

15. a) Sendo x o salário de Márcio e y o salário de Marcelo:

$\begin{cases} x + y = 2\,920 \\ x - 280 = y \end{cases}$

Temos $y = x - 280$, então:
$x + x - 280 = 2\,920 \Rightarrow 2x = 2\,920 + 280 \Rightarrow 2x = 3\,200 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{3\,200}{2} \Rightarrow x = 1\,600$

Assim:
$y = 1\,600 - 280 \Rightarrow y = 1\,320$
O salário de Márcio é R$ 1.600,00 e o salário de Marcelo é R$ 1.320,00.

b) Sendo x a colaboração de Márcio e y a colaboração de Marcelo, ambas em reais:

$\begin{cases} x - 160 = y \\ 2x = 3y \end{cases}$

Temos $x = y + 160$, então:
$2 \cdot (y + 160) = 3y \Rightarrow 2y + 320 = 3y \Rightarrow 2y - 3y =$
$= -320 \Rightarrow -y = -320 \Rightarrow y = 320$
Assim:
$x = 320 + 160 \Rightarrow x = 480$
Márcio colabora com R$ 480,00 e Marcelo colabora com R$ 320,00.

16. a) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -3x + 29 \end{cases}$

$2x - 1 = -3x + 29 \Rightarrow 2x + 3x = 29 + 1 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{30}{5} \Rightarrow x = 6$

$y = 2 \cdot 6 - 1 \Rightarrow y = 12 - 1 \Rightarrow y = 11$

b) $\begin{cases} y = -x - 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ y = \frac{-2x}{3} \end{cases}$

$-x - 1 = \frac{-2x}{3}$

$-3x - 3 = -2x \Rightarrow -3x + 2x = 3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$

$y = \frac{-2 \cdot (-3)}{3} = \frac{6}{3} = 2$

c) $\begin{cases} 2x = 5y \\ 7x - 6y = 46 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5y}{2} \\ x = \dfrac{46 + 6y}{7} \end{cases}$

$\dfrac{5y}{2} = \dfrac{46 + 6y}{7} \Rightarrow 2 \cdot (46 + 6y) = 35y \Rightarrow 92 + 12y =$
$= 35y \Rightarrow 12y - 35y = -92 \Rightarrow -23y = -92 \Rightarrow y = \dfrac{92}{23} = 4$

$x = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$

d) $\begin{cases} 3x + 6y = 8 \\ 4x + \ \ y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{8 - 3x}{6} \\ y = 13 - 4x \end{cases}$

$\dfrac{8 - 3x}{6} = 13 - 4x \Rightarrow 8 - 3x = 78 - 24x \Rightarrow 21x =$
$= 70 \Rightarrow x = \dfrac{10}{3}$

$y = 13 - 4 \cdot \dfrac{10}{3} = \dfrac{39 - 40}{3} = -\dfrac{1}{3}$

17. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{17}{11} \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17y}{11} \\ x = \dfrac{6 + 3y}{2} \end{cases}$

$\dfrac{17y}{11} = \dfrac{6 + 3y}{2} \Rightarrow 2 \cdot 17y = 11 \cdot (6 + 3y) \Rightarrow 34y =$
$= 66 + 33y \Rightarrow 34y - 33y = 66 \Rightarrow y = 66$

$x = \dfrac{6 + 3 \cdot 66}{2} = \dfrac{6 + 198}{2} = \dfrac{204}{2} = 102$

18. a) $\begin{cases} 2x + y = \dfrac{1}{3} \\ 3x - y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Adicionando as equações:

$5x = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \Rightarrow 5x = \dfrac{2}{6} + \dfrac{3}{6} \Rightarrow 5x = \dfrac{5}{6} \Rightarrow x = \dfrac{1}{6}.$

Substituindo na 1ª equação: $2 \cdot \dfrac{1}{6} + y = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{3} + y = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 0.$

b) $\begin{cases} x + \ y = -2 \quad \cdot (-1) \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = 2 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

Adicionando as equações: $x = 10$.
Substituindo na 1ª equação: $10 + y = -2 \Rightarrow y = -12$.

19. Sendo x o número de carros do modelo esporte e y o do modelo clássico:
$\begin{cases} x + \ y \ = 787 \\ x - 51 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 787 \\ x - y = \ 51 \end{cases}$

Adicionando as equações: $2x = 838 \Rightarrow x = 419$.
Substituindo na 1ª equação: $419 + y = 787 \Rightarrow y = 368$.
Portanto, foram produzidos: 419 do modelo esporte e 368 do modelo clássico.

20. Sendo x o número de caixas da marca Lava Azul e y o da Lava Verde:
$\begin{cases} x + y = 228 \\ x = 3y \end{cases}$

$3y + y = 228$
$4y = 228 \Rightarrow y = 57$
$x = 3 \cdot 57 \Rightarrow x = 171$
Portanto, foram vendidas: 171 caixas de Lava Azul e 57 caixas de Lava Verde.

21. a) Sendo x e y os números:
$\begin{cases} x + y = 110 \\ x - y = 30 \end{cases}$

Adicionando as equações: $2x = 140 \Rightarrow x = 70$.
Substituindo na 1ª equação: $70 + y = 110 \Rightarrow y = 40$.

b) Sendo $\dfrac{x}{y}$ a fração:

$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{11}{7} \\ x - y = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11y}{7} \\ x = 36 + y \end{cases}$

$\dfrac{11y}{7} = 36 + y \Rightarrow 11y = 7 \cdot (36 + y) \Rightarrow 11y =$
$= 252 + 7y \Rightarrow 11y - 7y = 252 \Rightarrow 4y = 252 \Rightarrow y = 63$
$x = 36 + 63 \Rightarrow x = 99$
A fração é $\dfrac{99}{63}$.

c) Sendo $\dfrac{x}{y}$ a fração:

$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{5} \\ x + y = 152 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3y}{5} \\ x = 152 - y \end{cases}$

$\dfrac{3y}{5} = 152 - y \Rightarrow 3y = 5 \cdot (152 - y) \Rightarrow 3y =$
$= 760 - 5y \Rightarrow 3y + 5y = 760 \Rightarrow 8y = 760 \Rightarrow y = 95$
$x = 152 - 95 \Rightarrow x = 57$
A fração é $\dfrac{57}{95}$.

22. Sendo x o número de cavalos e y o número de galinhas:
$\begin{cases} x + \ \ y = \ 97 \quad \cdot (-2) \\ 4x + 2y = 264 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - \ 2y = -194 \\ \ \ 4x + \ 2y = \ \ 264 \end{cases}$

Adicionando as equações: $2x = 70 \Rightarrow x = 35$.
Substituindo na 1ª equação: $35 + y = 97 \Rightarrow y = 97 - 35 \Rightarrow y = 62$.
São 35 cavalos e 62 galinhas.

23. Sendo x idade atual de Válter e y idade atual de Raul, temos:
$\begin{cases} x + 10 = 4 \cdot (y + 10) \\ x + 16 = 3 \cdot (y + 16) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 10 = 4y + 40 \\ x + 16 = 3y + 48 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x = 4y + 30 \\ x = 3y + 32 \end{cases}$

$4y + 30 = 3y + 32 \Rightarrow 4y - 3y = 32 - 30 \Rightarrow y = 2$
$x = 4 \cdot 2 + 30 \Rightarrow x = 8 + 30 = 38$
Válter tem 38 anos e Raul tem 2 anos.

24. Exemplo de resposta: Em um estacionamento há carros e motos, em um total de 18 veículos de 60 rodas. Quantos carros e quantas motos há no local? Resposta: 12 carros e 6 motos.

25. Exemplo de resposta: Um número supera outro em 200 unidades. Sabe-se que o quádruplo do maior adicionado ao quíntuplo do menor resulta em 3 500. Quais são esses números? Resposta: O maior número é 500 e o menor, 300.

26. **A** corresponde ao desconto do INSS:
$0{,}09 \cdot (\text{R\$ } 2.200{,}00 - \text{R\$ } 1.212{,}01) + 0{,}075 \cdot \text{R\$ } 1.212{,}00 =$
$= 0{,}09 \cdot \text{R\$ } 987{,}99 + \text{R\$ } 90{,}90 = \text{R\$ } 88{,}92 + \text{R\$ } 90{,}90 = \text{R\$ } 179{,}82$
Salário com desconto do INSS: R\$ 2.200,00 − R\$ 179,82 = R\$ 2.020,18.
Salário-base para dedução do IR considerando os dois dependentes:
R\$ 2.020,18 − 2 · R\$ 189,59 = R\$ 1.641,00.

A parcela a deduzir do IRPF é: R$ 0,00. Logo, **B** = R$ 0,00.
C = **A** + **B** + R$ 180,00 + R$ 250,00 =
= R$ 179,82 + R$ 0,00 + R$ 180,00 + R$ 250,00 =
= R$ 609,82
(salário líquido) = (total de vencimentos) − (total de descontos) =
= R$ 2.200,00 − R$ 609,82 = R$ 1.590,18

27. $3x - 2y = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 3 - 2 = 1$ (verdadeiro)
$3x - 2y = 1 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow \frac{3}{3} - 0 = 1$ (verdadeiro)
$3x - 2y = 1 \Rightarrow 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = 1 \Rightarrow -3 + 2 = 1$ (falso)
$3x - 2y = 1 \Rightarrow 3 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 0 - 1 = 1$ (falso)
Os pares $(1, 1)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ são soluções da equação.

28. Há várias possibilidades: $(12, 0)$; $\left(1, \frac{11}{2}\right)$; $(2, 5)$ e $\left(3, \frac{9}{2}\right)$ são exemplos.

29. Exemplo de resposta: $3x + 2y = 16$; pares ordenados que são soluções: $(0, 8)$; $(2, 5)$ e $(6, -1)$; pares ordenados que não são soluções: $(0, 0)$; $(5, 2)$ e $(8, -1)$.

30. Chamando de A o segundo membro da equação:
$3 \cdot 17 - 4 \cdot (-14) = A \Rightarrow A = 51 + 56 \Rightarrow A = 107$

31. a) $-2 \cdot 0 + 7y = 42 \Rightarrow 7y = 42 \Rightarrow y = 6$
b) $-2x + 7 \cdot 0 = 42 \Rightarrow -2x = 42 \Rightarrow x = \frac{-42}{2} \Rightarrow x = -21$
c) Exemplo de resposta: $\left(2, \frac{46}{7}\right)$; $(-14; 2)$; $\left(3, \frac{48}{7}\right)$.

32. Para o par ordenado ser solução de uma equação, ele deve satisfazê-la. Assim, temos:
A-II, pois $11 + (-2) = 11 - 2 = 9$.
B-III, pois $\frac{11}{2} - \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5$.
C-IV, pois $2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) = 10 - 9 = 1$.
D-I, pois $4 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$.

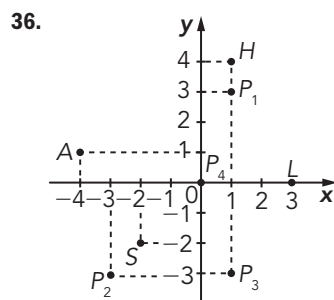
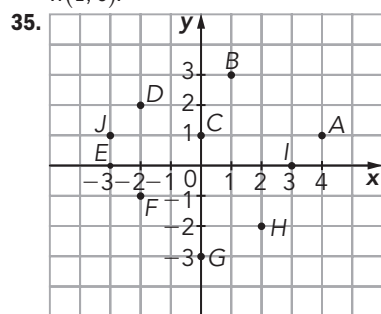
33. $3x + 4 \cdot 3 = 11 \Rightarrow 3x = 11 - 12 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

34. $P(2, 3)$; $Q(3, 1)$; $R(1, -3)$; $S(-3, -2)$; $T(-2, 1)$; $U(-1, 3)$; $V(0, 2)$; $W(1, 0)$.

35.

Banco de imagens/Arquivo da editora

36.

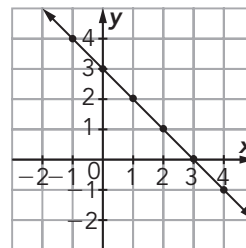
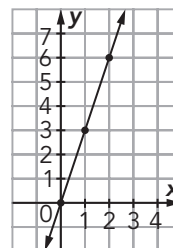
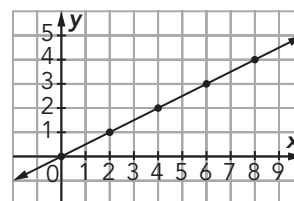
Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Helena.
b) Sérgio.

37. a) Exemplo de resposta: $(0, 3)$; $(1, 2)$; $(2, 1)$; $(3, 0)$; $(4, -1)$; $(-1, 4)$.
b) Resposta esperada: Formariam uma reta.

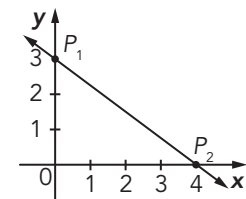
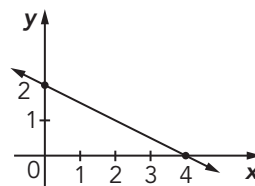
Banco de imagens/Arquivo da editora

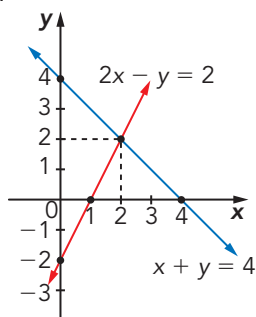
38. a) $y = 3x$

b) $y = \frac{1}{2}x$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

39. a) Em 3 h, o carro percorreu 240 km.
b) Em 1 h, o carro percorreu 80 km, então, a medida de velocidade é 80 km/h.
Como a medida de distância é diretamente proporcional à medida de tempo, temos $d = k \cdot t$.
Para $t = 1$, temos $d = 80$. Então: $80 = k \cdot 1 \Rightarrow k = 80$.
Para $t = 45$ min $= \frac{45}{60}$ h, temos: $d = 80 \cdot \frac{45}{60} = 80 \cdot \frac{3}{4} = 60$.
Em 45 minutos, o carro percorre 60 km.

40. a) Dois pontos.
b) $3 \cdot 0 + 4y = 12 \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3$
$P_1(0, 3)$
$3x + 4 \cdot 0 = 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$
$P_2(4, 0)$

Banco de imagens/Arquivo da editora

41. A reta cuja equação é $x + 2y = 4$ passa pelos pontos $(0, 2)$ e $(4, 0)$. O gráfico dessa equação é:

Banco de imagens/Arquivo da editora

42. a) A reta cuja equação é $x + y = 4$ passa pelos pontos $(4, 0)$ e $(0, 4)$. A reta cuja equação é $2x - y = 2$ passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, -2)$. Os gráficos são:

Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Para obter o ponto comum aos dois gráficos, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Adicionando as equações: $3x = 6 \Rightarrow x = 2$.
Assim: $2 + y = 4 \Rightarrow y = 2$.
O ponto comum é $(2, 2)$.

43. Para $(1, -3)$, temos: $\begin{cases} 2 \cdot 1 + (-3) = 7 \\ 6 \cdot 1 + (-3) = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 3 = 7 \\ 6 + 4 = 9 \end{cases}$ (falso)

Para $(3, 1)$, temos: $\begin{cases} 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ 6 \cdot 3 - 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 1 = 7 \\ 18 - 1 = 9 \end{cases}$ (falso)

Para $(2, 3)$, temos: $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 1 = 7 \\ 6 \cdot 2 - 3 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 3 = 7 \\ 12 - 3 = 9 \end{cases}$ (verdadeiro)

A solução do sistema é o par $(2, 3)$.

44. a) $\begin{cases} 7x + 5y = 24 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 \cdot 7 + 5 \cdot (-5) = 24 \\ 7 - (-5) = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 49 - 25 = 24 \\ 7 + 5 = 2 \end{cases}$ (falso)

b) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-5) = -1 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot (-5) = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 14 - 15 = -1 \\ 21 - 20 = 1 \end{cases}$ (verdadeiro)

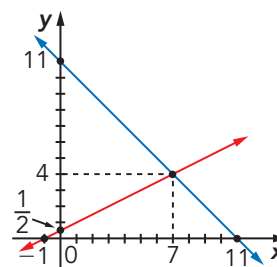
c) $\begin{cases} x - y = 12 \\ 2x + y = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 - (-5) = 12 \\ 2 \cdot 7 + (-5) = 19 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 7 + 5 = 12 \\ 14 - 5 = 19 \end{cases}$ (falso)

O par $(7, -5)$ é a solução do segundo sistema. Logo, alternativa **b**.

45. a)

$x - y = 11$	
x	**y**
0	11
11	0

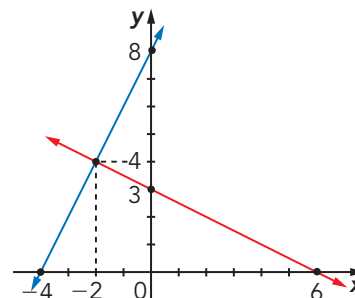
$x - 2y = -1$	
x	**y**
0	$\frac{1}{2}$
−1	0

Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\begin{cases} x - y = 11 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 22 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

Adicionando as equações: $3x = 21 \Rightarrow x = 7$.
Assim: $7 - 2y = -1 \Rightarrow y = 4$.
Resposta: $(7, 4)$.

b)

$2x - y = -8$	
x	**y**
0	8
−4	0

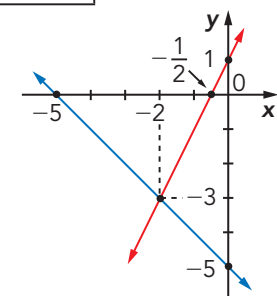
$x + 2y = 6$	
x	**y**
0	3
6	0

Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\begin{cases} 2x - y = -8 \quad \cdot (2) \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -16 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

Adicionando as equações: $5x = -10 \Rightarrow x = -2$.
Então: $-2 + 2y = 6 \Rightarrow y = 4$.
Resposta: $(-2, 4)$.

c)

$y = 2x + 1$	
x	**y**
0	1
$-\frac{1}{2}$	0

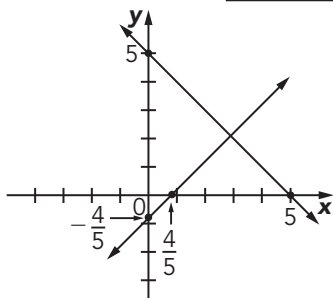
$y = -x - 5$	
x	**y**
0	−5
−5	0

Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x - 5 \end{cases}$$

Então, $2x + 1 = -x - 5 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$.
Assim: $y = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$
Resposta: $(-2, -3)$.

46. a)

$x + y = 5$	
x	y
0	5
5	0

$5x - 5y = 4$	
x	y
0	$-\frac{4}{5}$
$\frac{4}{5}$	0

Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Não.

c) $\begin{cases} x + y = 5 & \cdot (5) \\ 5x - 5y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 25 \\ 5x - 5y = 4 \end{cases}$

Adicionando as equações: $10x = 29 \Rightarrow x = 2{,}9$.

Substituindo na 1ª equação: $2{,}9 + y = 5 \Rightarrow y = 2{,}1$.

47. $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 2x - y = 4 & \cdot (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 8x - 4y = 16 \end{cases}$

Adicionando as equações: $11x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{11}$.

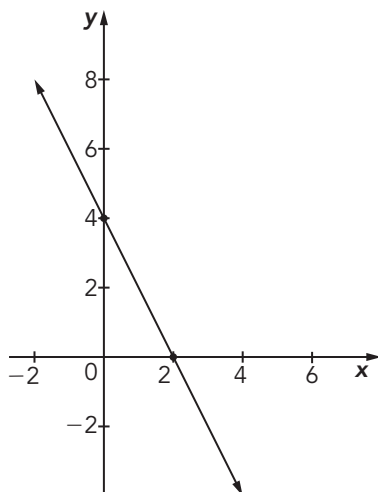
Substituindo na 2ª equação: $2 \cdot \frac{28}{11} - y = 4 \Rightarrow \frac{56}{11} - y =$

$= 4 \Rightarrow \frac{56}{11} - 4 = y \Rightarrow y = \frac{56 - 44}{11} \Rightarrow y = \frac{12}{11}$

As coordenadas são $x = \frac{28}{11}$ e $y = \frac{12}{11}$.

Participe (p. 163)

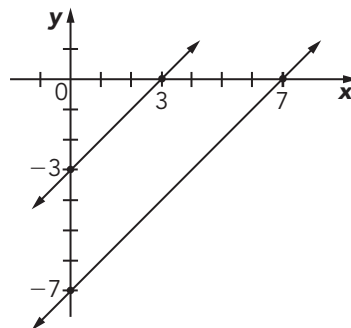
$2x + y = 4$	
x	y
0	4
2	0

$10x + 5y = 20$	
x	y
0	4
2	0

Banco de imagens/Arquivo da editora

As retas são coincidentes, logo é um sistema indeterminado.

48. a)

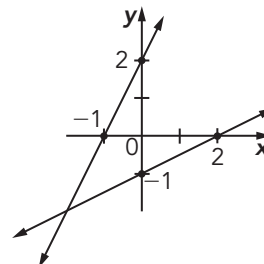
$y = x - 7$	
x	y
0	-7
7	0

$x = y + 3$	
x	y
0	-3
3	0

Banco de imagens/Arquivo da editora

Como as retas são paralelas, o sistema é impossível.

b)

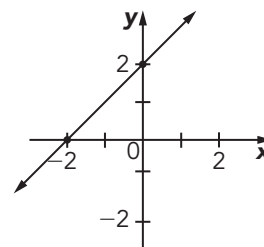
$y = 2x + 2$	
x	y
0	2
-1	0

$x = 2y + 2$	
x	y
0	-1
2	0

Banco de imagens/Arquivo da editora

Como as retas são concorrentes, o sistema é determinado.

c)

$y = x + 2$	
x	y
0	2
-2	0

$x = y - 2$	
x	y
0	2
-2	0

Banco de imagens/Arquivo da editora

Como as retas são coincidentes, o sistema é indeterminado.

49. $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ \frac{3x + 4y}{12} = \frac{6}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$

Essas duas equações representam retas paralelas. Portanto, o sistema é impossível.

50. a) Para que o sistema fique indeterminado, devemos fazer a 2ª equação ser múltipla da 1ª; neste caso, o dobro. Logo, a 2ª equação deve ser $2x + 4y = 16$.

b) Devemos apresentar 4 pontos de reta da equação $x + 2y = 8$. Por exemplo: $(0, 4)$; $(8, 0)$; $(2, 3)$ e $(4, 2)$.

c) $\begin{cases} x + 2y = 8 & \cdot(-2) \\ 2x + 4y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 4y = -16 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$

Adicionando as equações, obtemos $0x + 0y = -6$, portanto, o sistema é impossível e sua representação é um par de retas paralelas.

51. a) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 & \cdot(-2) \\ 4x + 5y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 6y = -12 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases}$

Adicionando as equações: $-y = -2 \Rightarrow y = 2$.
Substituindo na 1ª equação: $2x + 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$.
Há apenas uma solução.

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 & \cdot(-2) \\ 4x + 6y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 6y = -12 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$

Adicionando as equações: $0x + 0y = -2$; logo, não há solução.

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 & \cdot(-2) \\ 4x + 6y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 6y = -12 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$

Adicionando as equações: $0x + 0y = 0$ (indeterminado).
Há infinitas soluções.

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 & \cdot(-2) \\ 2y + 3x = 5 & \cdot(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6y - 4x = -10 \\ 6y + 9x = 15 \end{cases}$

Adicionando as equações: $5x = 5 \Rightarrow x = 1$.
Então: $2 \cdot 1 + 3y = 5 \Rightarrow y = 1$.
Há apenas uma solução.

52. a) $\begin{cases} 2x + 3y = x + y + 7 \\ 1 + 2y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - x + 3y - y = 7 \\ 2y + x = 3 - 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 7 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

O sistema é impossível.

b) $\begin{cases} 5x = 1 - 3y \\ 2x + 4y = y - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases}$

O sistema é impossível.

c) $\begin{cases} 7x - y = y - x - 7 \\ 2y - 5x - 3 = 3x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 2y = -7 \\ -8x + 2y = 7 \end{cases}$

Adicionando as equações: $0x + 0y = 0$.
O sistema é indeterminado.

Na olimpíada (p. 164)

Os preços dos adesivos

A partir da 3ª cartela, sabemos que 1 adesivo verde e 1 adesivo rosa custam metade de seu valor, portanto, 5 reais. Dessa maneira, subtraindo esses adesivos da 1ª cartela, descobrimos que 2 adesivos azuis custam 11 reais. Dessa maneira, como a cartela de 6 adesivos é exatamente igual a 2ª cartela (12 reais) e mais 2 adesivos azuis (11 reais), concluímos que o preço da cartela é 23 reais.

Logo, alternativa **e**.

Outra solução: ★ $= x$, ✿ $= y$, ▬ $= z$.

$\begin{cases} 2x + y + z = 16 \\ x + 2y + z = 12 \\ 2y + 2z = 10 \end{cases}$

Dividimos a 3ª equação por 2: $y + z = 5$.

Substituindo na 1ª, temos: $2x + 5 = 16 \Rightarrow x = 5{,}50$.

E substituindo na 2ª, temos: $\underset{5,50}{\underset{\downarrow}{x}} + y + \underbrace{y + z}_{5} = 12$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Então:

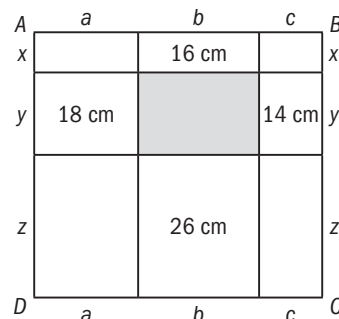
$z = 5 - y \Rightarrow z = 5 - 1{,}50 \Rightarrow z = 3{,}50$

Cartela com 6 adesivos:

$3x + 2y + z = 3 \cdot 5{,}50 + 2 \cdot 1{,}50 + 3{,}50 = 23{,}00$

Logo, alternativa **e**.

O retângulo dividido

Banco de imagens/Arquivo da editora

Medida de perímetro de $ABCD$: $2a + 2b + 2c + 2x + 2y + 2z = 54$ cm. ①

Medida de perímetro do retângulo cinza: $2b + 2y$.

A soma das medidas de perímetro das quatro partes dadas é:

$2a + 2y + 2b + 2x + 2c + 2y + 2b + 2z = 74$ cm ②

Fazendo ② − ①, temos: $2b + 2y = 74$ cm $- 54$ cm $= 20$ cm.

Logo, alternativa **c**.

Na História

1. É como a questão das patentes; se alguém inventou algo e não patenteou, e você, depois, inventou a mesma coisa independentemente, mas patenteou primeiro o invento, então, a primazia é sua. Logo, é justo que a primazia na introdução do método das coordenadas na Geometria seja de Descartes. Mas nem por isso Fermat foi apagado dessa história.
2. Poder representar genericamente expressões, equações algébricas e equações de curvas e retas. Por exemplo, $ax + b = c$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$, e x uma variável no conjunto dos números reais, representa indistintamente todas as equações de grau 1 sobre o conjunto dos números reais.
   E $ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$, e x uma variável no conjunto dos números reais, representa indistintamente um trinômio do segundo grau.
   E, como vimos, $ax + by + c = 0$, em que a, b e c representam números reais constantes, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e x e y são variáveis no conjunto dos números reais, é a equação geral de uma reta.
3. **a)** Porque era a língua que os cientistas e sábios da França, Inglaterra e Itália, por exemplo, conheciam, além da própria língua. Por isso, em latim, a divulgação de suas obras podia ultrapassar fronteiras.
   b) Resposta pessoal.

Na mídia

1. O número do sapato dessa pessoa será 37, pois:

$$S = \frac{5 \cdot 24 + 28}{4} = \frac{120 + 28}{4} = \frac{148}{4} = 37$$

2. $S = \dfrac{5 \cdot 23{,}2 + 28}{4} = \dfrac{116 + 28}{4} = \dfrac{144}{4} = 36$

A numeração brasileira do calçado dessa mulher é 36. Portanto, a numeração do calçado, nos Estados Unidos, dessa mesma mulher será 7 ou 7,5, já que pela tabela esses são os valores correspondentes a um calçado feminino de numeração 36 no Brasil.

3. $39 = \dfrac{5x + 28}{4} \Rightarrow 5x + 28 = 156 \Rightarrow 5x = 128 \Rightarrow x = 25{,}6$

O comprimento do pé de Mariana mede 25,6 centímetros.

4. Resposta pessoal.

Na Unidade

1. $2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$. Logo, alternativa **a**.

2. $\dfrac{x}{120} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{120} = \dfrac{6 \cdot 3 + 5 \cdot 5 - 15 \cdot 1}{30} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x}{120} = \dfrac{28}{30} \Rightarrow \dfrac{x}{4} = 28 \Rightarrow x = 112$ (múltiplo de 7).

Logo, alternativa **c**.

3. $6 + n = \dfrac{32 + n}{3} \Rightarrow 18 + 3n = 32 + n \Rightarrow 3n - n =$

$= 32 - 18 \Rightarrow 2n = 14 \Rightarrow n = 7$. Logo, alternativa **b**.

4. Sendo x a quantia que tenho, em reais:

$\dfrac{x}{2} - 2 = \dfrac{40x}{100} \Rightarrow 50x - 200 = 40x \Rightarrow x = 20$

Logo, alternativa **a**.

5. O comprimento da parte oculta mede $2x$ e o da parte visível, $35 - 2x$.

$2x = 25\% \cdot (35 - 2x) \Rightarrow 2x = \dfrac{1}{4} \cdot (35 - 2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x = 35 - 2x \Rightarrow x = 3{,}5$; ou seja, 3,5 cm.

Logo, alternativa **a**.

6. Sendo x o número de votos do vencedor e y o do perdedor:

$\begin{cases} x + y = 140\,135 \\ x - 4\,105 = y \end{cases}$

Então:

$x + x - 4\,105 = 140\,135 \Rightarrow 2x = 144\,240 \Rightarrow x = 72\,120$

Logo, alternativa **c**.

7. Sendo m o número de cédulas de R$ 10,00, temos:

$\begin{cases} n + m = 18 & \cdot(-10) \\ 5n + 10m = 140 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10n - 10m = -180 \\ 5n + 10m = 140 \end{cases}$

Adicionando as equações: $-5n = -40 \Rightarrow n = 8$.

Logo, alternativa **c**.

8. $\begin{cases} x + 0{,}5y + 12 \cdot 0{,}25 = 22 \\ x + 2y = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 0{,}5y = 19 & \cdot(-4) \\ x + 2y = 49 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -76 \\ x + 2y = 49 \end{cases}$

Adicionando as equações: $-3x = -27 \Rightarrow x = 9$.

Logo, alternativa **c**.

9. Luz amarela: 5 segundos; luz verde: X segundos; luz vermelha: Z segundos.

$X = \dfrac{2}{3}Z \Rightarrow Z = \dfrac{3}{2}X$

Ciclo completo: Y segundos.

$Y = 5 + X + \dfrac{3X}{2} \Rightarrow 2Y = 10 + 2X + 3X \Rightarrow 5X - 2Y + 10 = 0$

Logo, alternativa **b**.

10. Resolvendo o sistema $\begin{cases} y = 2 + x \\ y = 2 - x \end{cases}$, temos:

$2 + x = 2 - x \Rightarrow x = 0$

Então:

$y = 2 + 0 \Rightarrow y = 2$

Assim, os gráficos são concorrentes no ponto $(0, 2)$. Logo, alternativa **b**.

Unidade 7

Abertura (p. 169)

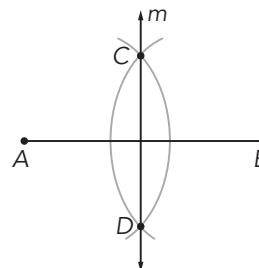
Resposta pessoal.

Capítulo 13

Participe (p. 170)

a) Verificando visualmente é possível perceber que o menor percurso para que Carlos chegue à casa de João é o representado pela letra D.

b) A grandeza que indica a medida desse percurso é a distância.

Atividades

1. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

1º) Marcamos o ponto A e, com auxílio da régua, marcamos o ponto B de modo que $AB = 60$ mm.

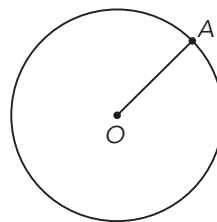
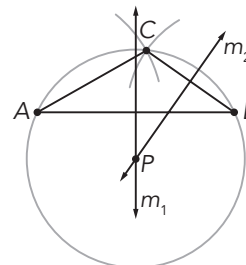
2º) Com a ponta-seca do compasso em A e abertura R, com $\dfrac{AB}{2} < R < 60$ mm, traçamos um arco.

3º) Com a ponta-seca do compasso em B e mesma abertura R, traçamos outro arco.

4º) A reta m que passa por C e D, interseções dos arcos traçados, é o conjunto pedido.

A reta m é a mediatriz de $\overline{AB}$.

2. A imagem não está representada com medidas reais.

Marcamos o ponto O, com centro O, e raio medindo 45 mm. Então, traçamos a circunferência, que é o conjunto pedido.

Banco de imagens/Arquivo da editora

3. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

1º) Marcamos o ponto A e, com auxílio da régua, marcamos o ponto B de modo que $AB = 11$ cm.

2º) Com a ponta-seca do compasso em A e abertura $R_1 = 7$ cm, traçamos um arco.

3º) Com a ponta-seca do compasso em B e abertura $R_2 = 6$ cm, traçamos outro arco.

4º) O vértice C do triângulo ABC é a interseção dos arcos traçados.

5º) Traçamos a reta m_1, mediatriz de $\overline{AB}$, e a reta m_2, mediatriz de $\overline{BC}$ (assim como foi construído anteriormente).

6º) O centro da circunferência é o ponto P, interseção de m_1 e m_2.

7º) Com a ponta-seca do compasso em P e abertura AP (ou BP ou CP), traçamos a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

4. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

1º) Marcamos o ponto A e, com auxílio da régua, marcamos o ponto B de modo que $AB = 6$ cm.

2º) Com a ponta-seca do compasso em A e abertura $R_1 = 5$ cm, traçamos um arco.

3º) Com a ponta-seca do compasso em B e abertura $R_2 = 4$ cm, traçamos outro arco.

4º) O vértice C do triângulo ABC é a interseção desses arcos.

5º) Traçamos a reta m_1, mediatriz de $\overline{AB}$, e a reta m_2, mediatriz de $\overline{BC}$ (assim como foi construído anteriormente).

6º) O ponto P é a interseção de m_1 e m_2.

5. a) 1,5 cm **c)** 1,5 cm

b) 1,5 cm **d)** Sim.

e) O centro da circunferência é o ponto O; o raio mede 1,5 cm.

6. Pontos internos à circunferência.

7. a) $d = 15$ mm $< r$; então, X é interno à circunferência.

b) $d = 30$ mm $> r$; então, Y é externo à circunferência.

c) $d = 25$ mm $= r$; então, Z é pertencente à circunferência.

8. a) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$. **b)** $\overline{CD}$ e $\overline{AC}$. **c)** $\overline{AC}$

9. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

1º) Traçamos a reta r.

2º) Construímos a reta t perpendicular a r.

3º) Marcamos os pontos A e B sobre t, tais que $OA = 3$ cm e $OB = 3$ cm.

4º) Traçamos, por A, a reta p_1 paralela à reta r e, por B, a reta p_2 paralela à reta r. Essas duas retas formam o conjunto pedido.

10.

Banco de imagens/Arquivo da editora

1º) Traçamos uma reta r contendo um ponto A qualquer.

2º) Com a ponta-seca do compasso em A e abertura R qualquer, traçamos um arco demarcando o ponto B sobre a reta r.

3º) Com a ponta-seca do compasso em B e mesma abertura R, traçamos outro arco intersectando o arco traçado.

4º) O ponto C é a intersecção desses arcos.

5º) Traçamos a reta s, que contém A e C.

6º) Com a ponta-seca do compasso em B e abertura r qualquer, traçamos um arco.

7º) Com a ponta-seca do compasso em C e mesma abertura r, traçamos outro arco intersectando o arco anterior.

8º) O ponto D é a intersecção entre esses arcos.

9º) A reta $\overleftrightarrow{AD}$ é a reta suporte da bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, que mede 60°. Processo semelhante pode ser feito para determinar a reta suporte da bissetriz do ângulo que mede 120°. As duas retas formam o conjunto pedido.

11.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Considere o polígono $ABCD$ como a base retangular do tanque e, sobre as retas perpendiculares r e s, duas paredes adjacentes do tanque. Supondo que o vértice de partida da salamandra é o ponto A, o conjunto dos pontos que distam igualmente de r e s está representado pelo segmento de reta $\overline{AC}$, que é a bissetriz do ângulo $D\hat{A}B$.

12. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

1º) Construímos o triângulo ABC.

2º) Traçamos a bissetriz de $B\hat{C}A$. Traçamos, também, a bissetriz de $B\hat{A}C$.

3º) O ponto P é a interseção dessas bissetrizes.

13. $3x - 5 = x + 7 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$

14. a) $d > r$; a reta é externa à circunferência.

b) $d < r$; a reta é secante à circunferência.

c) $d > r$; a reta é externa à circunferência.

d) $d = r$; a reta é tangente à circunferência.

e) $d > r$; a reta é externa à circunferência.

f) $d < r$; a reta é secante à circunferência.

15. a) 4 ângulos retos (medem 90°).

b) $OA = OB$ e $OM < AO$.

16. $5x = 90° \Rightarrow x = 18°$

17.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabemos que: “Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes”.

Considerando os triângulos AEO e CFO, temos:

$$\begin{cases} \overline{OE} \cong \overline{OF} \\ \text{med}(\hat{E}) = \text{med}(\hat{F}) = 90° \\ AO = CO = \text{medida do raio} \end{cases}$$

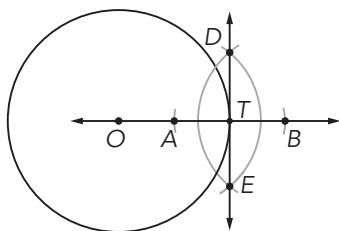
Portanto, $\triangle AEO \cong \triangle CFO$.

Da mesma maneira, provamos que $\triangle BEO \cong \triangle DFO$.

Portanto, $\triangle ABO \cong \triangle CDO$, o que resulta em $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

18. $5 + \frac{9x}{2} = 7 \Rightarrow \frac{9x}{2} = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$; ou seja, $\frac{4}{9}$ cm.

19. $4x + 10° = 90° \Rightarrow 4x = 80° \Rightarrow x = 20°$

20. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$OT = 4$ cm

1º) Representamos o segmento de reta $\overline{OT}$ medindo 4 cm e traçamos a circunferência com centro em O e contendo T.

2º) Traçamos a reta $\overleftrightarrow{OT}$. Com a ponta-seca do compasso em T e abertura qualquer, traçamos os arcos que intersectam $\overleftrightarrow{OT}$ em A e B.

3º) Com a ponta-seca do compasso em A e abertura R qualquer, traçamos um arco. Com a ponta-seca do compasso em B e mesma abertura R, traçamos outro arco.

4º) A reta que passa por D e E, interseções desses arcos, é a reta tangente à circunferência no ponto T.

21. a) Secantes.
b) Tangentes.
c) Concêntricas.

22. Sendo R e r as medidas do raio das circunferências, com $R > r$, temos:

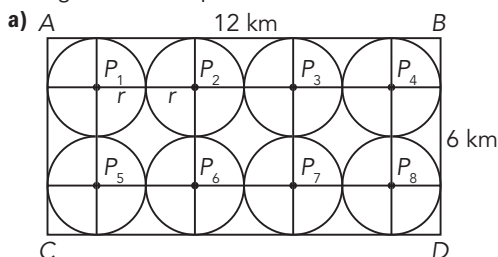
$$\begin{cases} R + r = 28 \\ R - r = 8 \end{cases}$$

Adicionando as equações, obtemos: $2R = 36 \Rightarrow R = 18$.

Então: $18 + r = 28 \Rightarrow r = 10$

Logo, os raios medem 18 cm e 10 cm.

23. A imagem não está representada com medidas reais.

a)

Banco de imagens/Arquivo da editora

A região a ser irrigada corresponde à região interna do retângulo $ABCD$. Sendo $AB = 12$ km; $BD = 6$ km e os pontos $P_1, P_2, \ldots, P_8$ a localização de cada um dos oito pivôs centrais que farão a irrigação, temos:

$12 : 4 = 3$

Então, o diâmetro de cada círculo mede 3 km e o raio mede $r = 1{,}5$ km. Logo, a distância entre dois pivôs centrais mede $r + r = 1{,}5 \text{ km} + 1{,}5 \text{ km} = 3$ km.

b) A medida do raio de cada um dos círculos de irrigação é 1,5 km.

24. Sendo R a medida do raio da circunferência maior, temos:

$$\begin{cases} R - 11 < 20 \\ R + 11 > 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R < 31 \\ R > 9 \end{cases} \Rightarrow 9 < R < 31$$

Como R é múltiplo de 6, temos as seguintes possibilidades: 12 cm, 18 cm, 24 cm, ou 30 cm.

25. Sendo R e r a medida do raio das circunferências, com $R > r$, temos:

$$\begin{cases} R + r = 30 \\ R - r = 6 \end{cases}$$

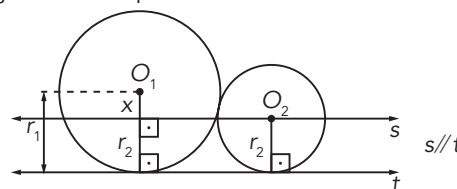
Resolvendo esse sistema, obtemos $R = 18$ e $r = 12$.

Logo, os raios dessas circunferências medem 18 cm e 12 cm.

26. É tangente a ambas as circunferências, pois a reta que passa pelos dois centros contém o diâmetro de ambas.

27. a) Externas ($d > r_1 + r_2$).
b) C_1 tangente interna de C_2 ($d = r_2 - r_1$).
c) Secantes ($r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$).
d) Tangentes externas ($d = r_1 + r_2$).
e) C_1 interna a C_2 ($d < r_2 - r_1$).
f) Secantes ($r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$).

28. a) Circunferência interna à outra; 0 ponto.
b) Circunferência tangente interna à outra; 1 ponto.
c) Circunferência secante à outra; 2 pontos.
d) Circunferência tangente externa à outra; 1 ponto.

29. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Da figura, podemos concluir que:

$x + r_2 = r_1 \Rightarrow x = r_1 - r_2 = 20 - 8 \Rightarrow x = 12$

Portanto, a distância entre O_1 e a reta s, paralela a t por O_2, mede 12 cm.

30. a) 0 ponto.
b) 4 pontos.
c) 2 pontos.
d) 3 pontos.
e) 1 ponto.

31. a) $d = 6 + 4 = 10$
b) $d = 8 + 10 + (10 - 7) = 21$

32. Sendo R e r a medida do raio das circunferências, com $R > r$, temos:

$$\begin{cases} R + r = 11 \\ R - r = 5 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $R = 8$ e $r = 3$.

Logo, os raios dessas circunferências medem 8 cm e 3 cm.

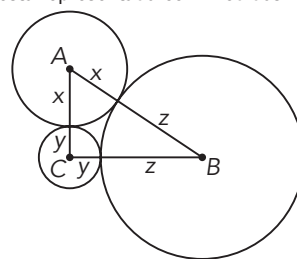
33. Sendo R e r a medida do raio das circunferências, com $R > r$, temos:

$$\begin{cases} R + r = 33 \\ \frac{r}{R} = \frac{4}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R + r = 33 \quad (1) \\ r = \frac{4}{7}R \quad (2) \end{cases}$$

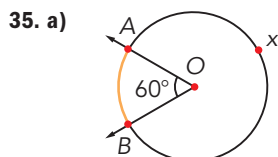
Substituindo (2) em (1): $R + \frac{4}{7}R = 33 \Rightarrow R = 21$.

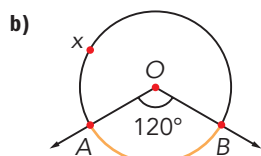
Em (2): $r = \frac{4}{7} \cdot 21 \Rightarrow r = 12$.

Logo, os diâmetros dessas circunferências medem 42 cm e 24 cm.

34. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Temos:
$AB = 7 \Rightarrow x + z = 7$ ①
$AC = 5 \Rightarrow x + y = 5$ ②
$BC = 6 \Rightarrow y + z = 6$ ③
Adicionando as três equações, obtemos:
$2x + 2y + 2z = 18 \Rightarrow x + y + z = 9$ ④
① em ④: $y + 7 = 9 \Rightarrow y = 2$
② em ④: $z + 5 = 9 \Rightarrow z = 4$
③ em ④: $x + 6 = 9 \Rightarrow x = 3$
Logo, os raios das circunferências medem 2 cm, 3 cm e 4 cm.

35. a)

med$(A\hat{O}B) = 60°$; med$(\overset{\frown}{AB}) = 60°$;
med$(\overset{\frown}{AXB}) = 360° - 60° = 300°$.

b)

med$(A\hat{O}B) = 120°$; med$(\overset{\frown}{AB}) = 120°$;
med$(\overset{\frown}{AXB}) = 360° - 120° = 240°$.

36. a)

$x = 100°$

b)

$x = 80°$

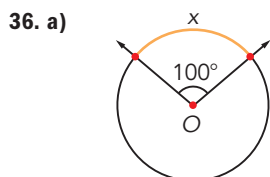
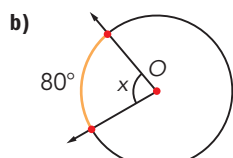
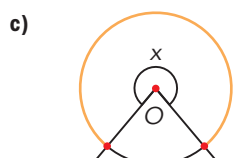
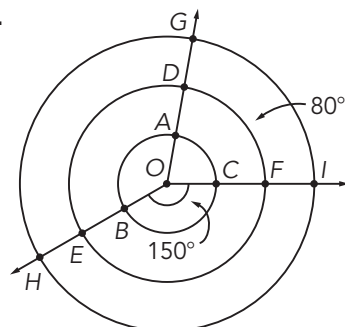
c)

$x = 360° - 80° = 280°$

37. $360° : 4 = 45°$

38.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) med$(A\hat{O}C) = 80°$; med$(A\hat{O}B) = 360° - 150° + 80° = 130°$.

b) med$(\overset{\frown}{AB}) = 130°$; med$(\overset{\frown}{EF}) = 150°$; med$(\overset{\frown}{DE}) = 130°$; med$(\overset{\frown}{HI}) =$
$= 150°$.

Participe (p. 187)

1. Para construir um hexágono, devemos seguir os seguintes passos:

1º) Usando uma régua, traçamos um segmento de reta $\overline{OA}$, sendo $AO = 5$ cm.

2º) Em seguida, usando o transferidor com centro em *O*, marcamos 60° no sentido anti-horário e traçamos um novo segmento de reta com medida de 5 cm, com extremidade em *O*.

3º) Ligamos as extremidades, diferentes de *O*, dos dois últimos segmentos de retas traçados.

4º) Repetimos os passos *B* e *C* até formar um hexágono.

2.

INÍCIO
Com a régua, traçar um segmento de reta $\overline{OA}$ com medida de comprimento qualquer.
Usando um transferidor, com centro em *O* e no sentido anti-horário, marcar um novo segmento de reta de medida *AO* com extremidade em *O*.
Ligar as extremidades, diferentes de *O*, dos dois últimos segmentos de reta traçados.
Formou-se um hexágono?
Não
Sim
FIM

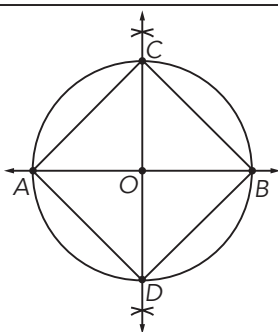
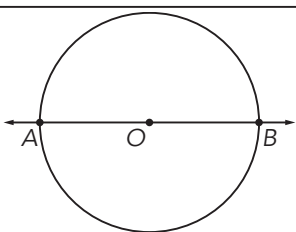
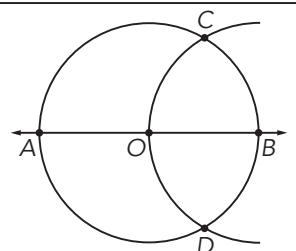
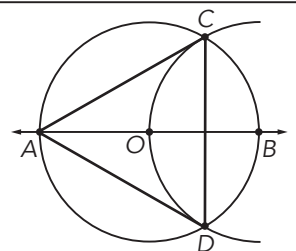
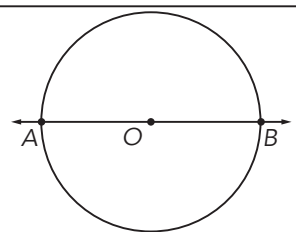
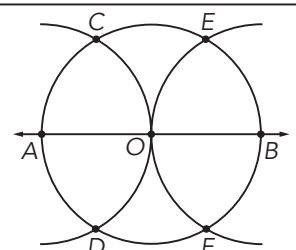
Banco de imagens/Arquivo da editora

39. As imagens não estão representadas com medidas reais.
Construção de um quadrado inscrito em uma circunferência de 4 cm de medida do raio:

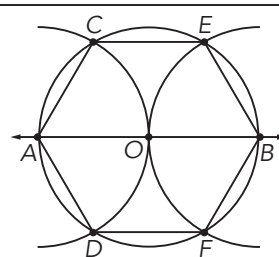
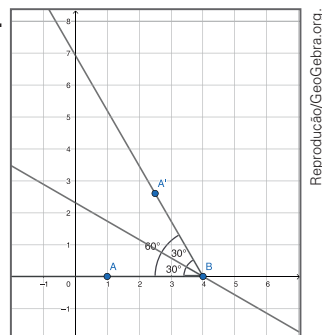
1º) Construímos uma circunferência de centro *O*, com 4 cm de medida raio. Traçamos o diâmetro $\overline{AB}$.	
2º) Construímos a mediatriz de $\overline{AB}$ a qual intersecta a circunferência nos pontos *C* e *D*.	

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

3º) Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são os vértices do quadrado.	

Banco de imagens/Arquivo da editora

40. As imagens não estão representadas com medidas reais.
Construção de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência com 6 cm de medida de diâmetro:

1º) Construímos uma circunferência de centro *O*, com 3 cm de medida do raio. Traçamos o diâmetro $\overline{AB}$.	
2º) Com a ponta-seca do compasso em *B* e abertura *OB*, traçamos um arco que intersecta a circunferência nos pontos *C* e *D*.	
3º) Os pontos *A*, *C* e *D* são os vértices do triângulo equilátero.	

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

41. As imagens não estão representadas com medidas reais.
A situação exige a construção de um hexágono regular inscrito em uma circunferência com 3 cm de medida do raio. O ponto *O* é o centro do lago, e *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* são os pontos em que se fixarão os chafarizes.

1º) Construímos uma circunferência de centro *O*, com 3 cm de medida do raio. Traçamos o diâmetro $\overline{AB}$.	
2º) Com a ponta-seca do compasso em *A* e abertura *OA*, traçamos um arco que intersecta a circunferência nos pontos *C* e *D*. Procedemos do mesmo modo para o ponto *B* e encontramos os pontos *E* e *F*.	
3º) Os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* são os vértices do hexágono regular.	

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Matemática e tecnologias

1.

Reprodução/GeoGebra.org.

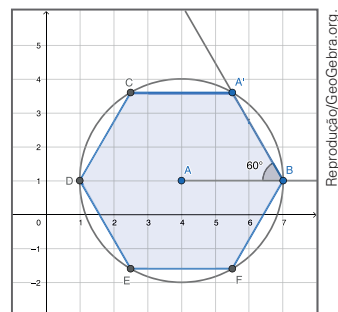
Os ângulos formados pela bissetriz do ângulo que mede 60° têm medida de 30°.

2. Para construir um hexágono regular, usando o GeoGebra, siga os passos a seguir:

1º) Na aba “Ferramentas”, selecione o ícone “Ângulo com amplitude fixa”; depois, clique em dois pontos diferentes na tela de construção do GeoGebra. Na janela que abrir, digite 60°, selecione “Sentido horário” e clique em “OK”, obtendo um ângulo que mede 60°.

2º) Selecione o ícone “Semirreta”, clique no ponto *A* e, depois, no ponto *B*, obtendo a semirreta $\overrightarrow{AB}$. Depois, clique no ponto *A* e no ponto *A*', obtendo a semirreta $\overrightarrow{AA'}$.

3º) Agora, selecione o ícone “Círculo dados centro e um ponto”, clique no ponto *A* e, depois, no ponto *B*, obtendo uma circunferência de centro *A* e com os pontos *B* e *A*' pertencentes a ela.

4º) Agora, selecione o ícone “Polígono regular” e clique nos pontos *B* e *A*'. Na janela que abrir, digite 6 e, depois, clique em “OK”, para indicar que o polígono hexágono tem 6 vértices. Está construído o hexágono regular de vértices: *B*, *A*', *C*, *D*, *E*, *F*.

Reprodução/GeoGebra.org.

Na mídia

1. O período Cretáceo Superior compreende o intervalo entre 100 milhões e 65 milhões de anos atrás.

2. O diâmetro mediria aproximadamente $\frac{1}{3} \cdot 26$ m.
Portanto, o raio mediria $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 26 \text{ m} \simeq 4{,}3$ m.

3. Aproximadamente 6 000 kg ou 6 toneladas. O dinossauro pesava cerca de 60 toneladas, ou seja, aproximadamente 10 elefantes.

Capítulo 14

Participe (p. 191)

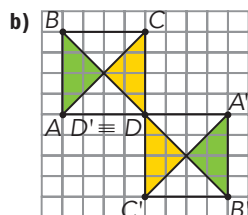
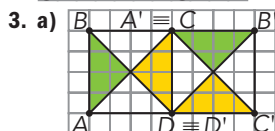
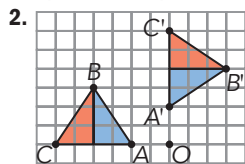
a) Exemplo de resposta: Reflexão em relação ao lado direito do azulejo.
b) Exemplo de resposta: Translação na direção inclinada para baixo e para a esquerda.
c) Exemplo de resposta: Rotação de 180° no sentido horário em relação ao canto inferior direito do azulejo.

Atividades

1. a) *T* **b)** *T* **c)** *R* **d)** *E* **e)** *E* **f)** *A*

2.

3. a)

b)

c) Exemplo de resposta: Reflexão em torno do lado $\overline{CD}$ e rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do centro do quadrado.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4. a)

b)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

5.

Banco de imagens/Arquivo da editora

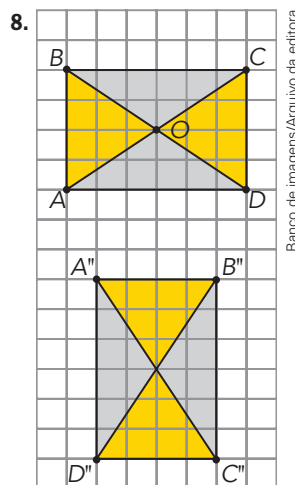
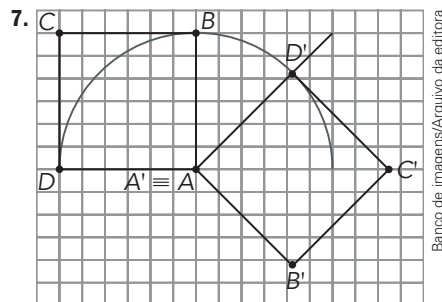
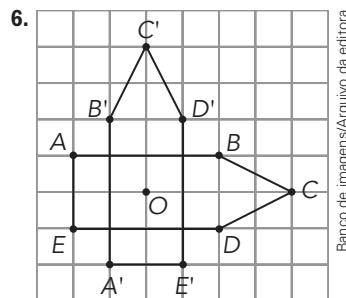
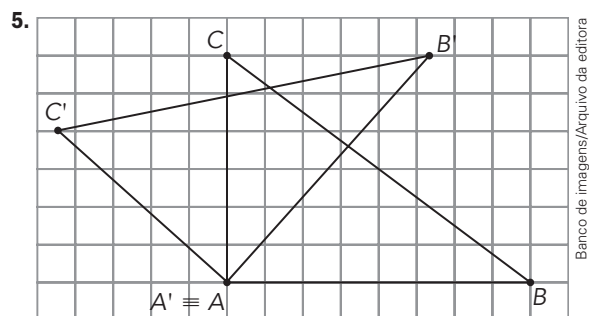
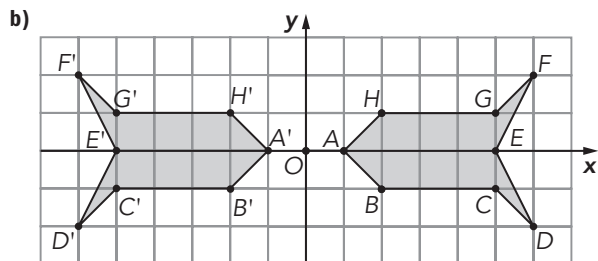
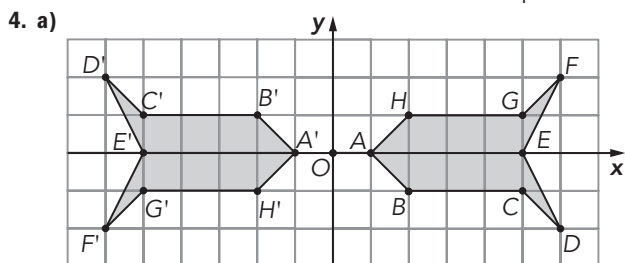
6.

Banco de imagens/Arquivo da editora

7.

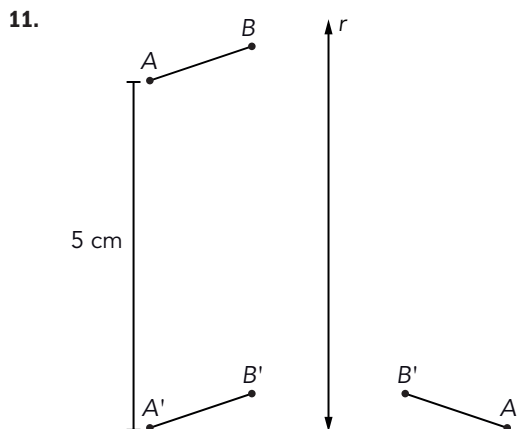
Banco de imagens/Arquivo da editora

8.

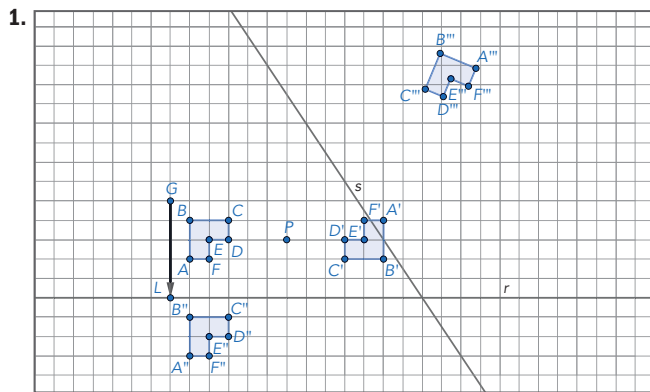
Banco de imagens/Arquivo da editora

9. Obtêm-se um retângulo de lados medindo 4 cm e 3 cm, em ambos os casos.

10. a) Não. **b)** Não. **c)** Não.

11.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

12. a) Exemplo de resposta: Rotação de 90° em torno do ponto *C* no sentido horário seguida de translação de 9 unidades para a direita.
b) Exemplo de resposta: Rotação de 180° em torno do ponto *D* no sentido horário seguida de translação de 2 unidades para baixo e 4 unidades para a direita.

Matemática e tecnologias

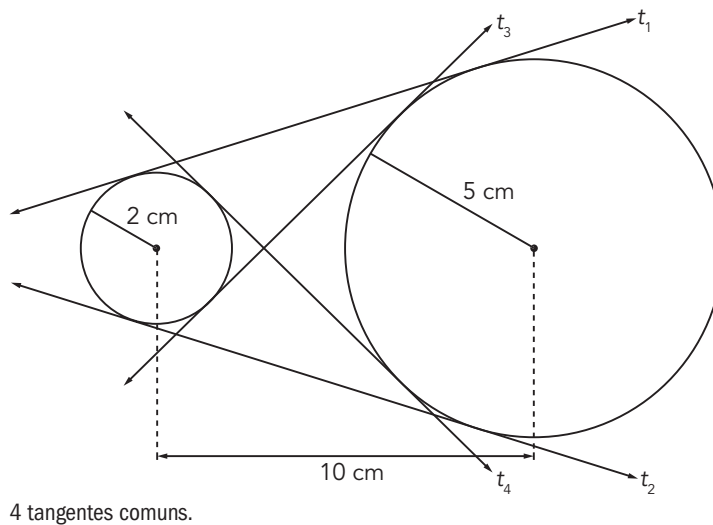
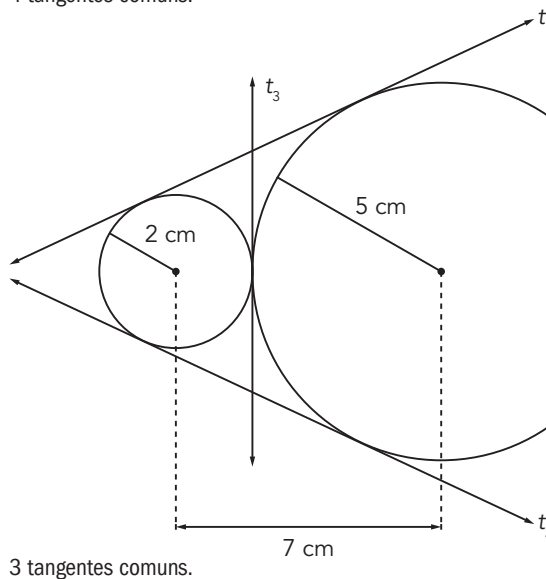
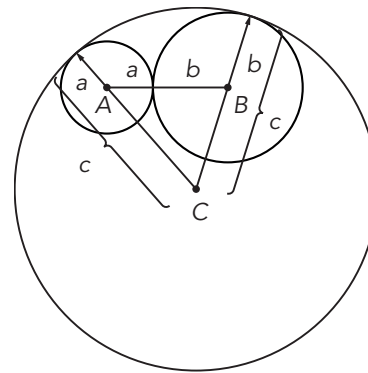
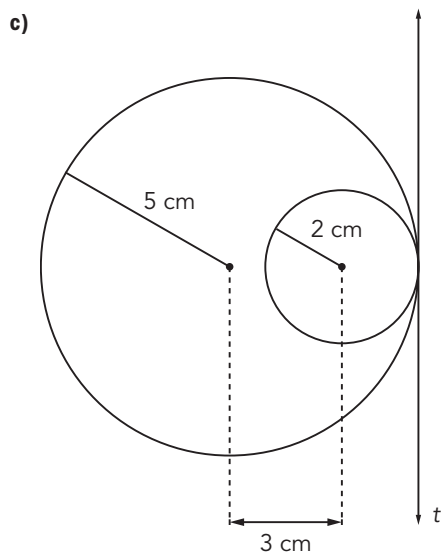
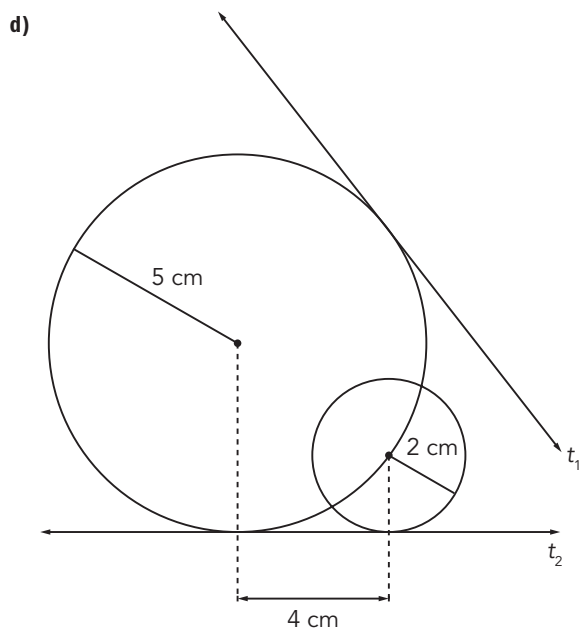
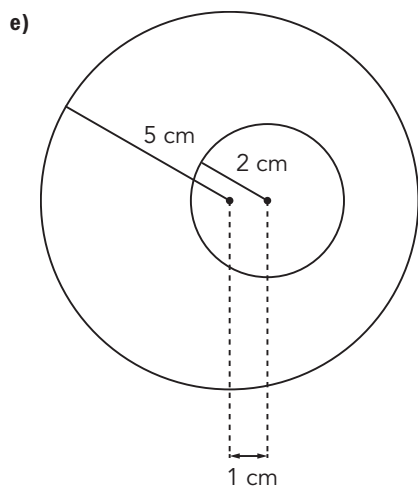
1. Reprodução/GeoGebra.org.

2. Resposta pessoal.

Na Unidade

1. $AB = 2 \cdot OA \Rightarrow 3x - 3 = 2 \cdot (x + 3) \Rightarrow x = 9$
   Logo, a medida do raio é: $OA = x + 3 = 9 + 3 = 12$.

2. $\frac{3x}{2} - 5 = \frac{20}{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} = 15 \Rightarrow x = 10$; ou seja, 10 cm.

3. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Temos:
$AB = 12 \Rightarrow a + b = 12$
$AC = 17 \Rightarrow c - a = 17$ ①
$BC = 13 \Rightarrow c - b = 13$ ②
Adicionando essas três equações, obtemos:
$2c = 42 \Rightarrow c = 21$ ③
③ em ①: $21 - a = 17 \Rightarrow a = 4$
③ em ②: $21 - b = 13 \Rightarrow b = 8$
Logo, os raios dessas circunferências medem 4 m, 8 m e 21 m.

4. As imagens não estão representadas com medidas reais.

a)

Banco de imagens/Arquivo da editora

4 tangentes comuns.

b)

Banco de imagens/Arquivo da editora

3 tangentes comuns.

c)

Banco de imagens/Arquivo da editora

1 tangente comum.

d)

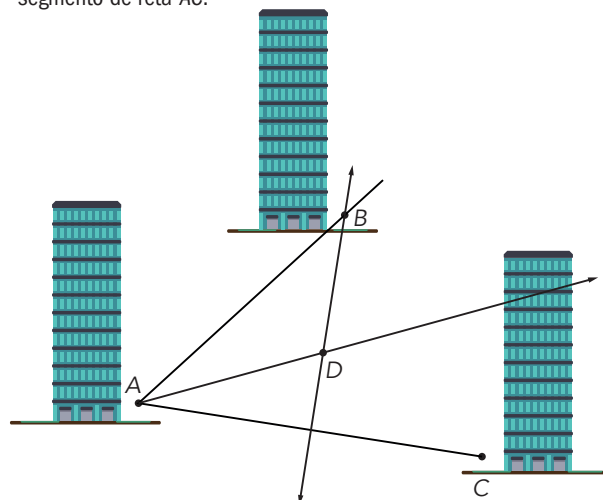
Banco de imagens/Arquivo da editora

2 tangentes comuns.

e)

Banco de imagens/Arquivo da editora

Nenhuma tangente comum.

5. 1ª etapa: ponteiro para no número 8; 2ª etapa: para no número 2; 3ª etapa: para no número 5. Logo, alternativa **d**.
6. 325 mil km = 325 000 km = $3{,}25 \cdot 10^5$ km. Logo, alternativa **d**.
7. Suponhamos que, na figura 1, cada circunferência tem raio medindo r. e, o losango tem lado medindo $2r$, portanto, o perímetro mede $8r$. Na figura 2, o losango tem lado medindo $3r$ e o perímetro, então, mede $12r$, que representa um aumento de $4r$ em relação à anterior, correspondente a 50% de $8r$. Logo, alternativa **e**.
8. Mediatriz, pois a mediatriz do segmento de reta formado pelos pontos A e B é uma reta perpendicular que passa pelo ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$, dividindo-o em duas partes equidistantes do ponto médio, que será o local onde a via férrea deve ser construída.
9. O ponto D é o encontro da bissetriz do ângulo $C\hat{A}B$ e da mediatriz do segmento de reta $\overline{AC}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

10. A medida angular do arco $\overset{\frown}{AB}$ é igual à medida do ângulo $A\hat{O}B$, ou seja, é 44°.

Unidade 8

Capítulo 15

Abertura (p. 205)

Respostas pessoais. Sobre criptomoedas, consulte: CASTELLO, Melissa Guimarães. Bitcoin é moeda? Classificação das criptomoedas para o direito tributário. *Revista Direito GV*, São Paulo, 28 out. 2019. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rdgv/a/vz4x6BdS7znmfYFVmFrCY3C/. Acesso em: 8 mar. 2022.

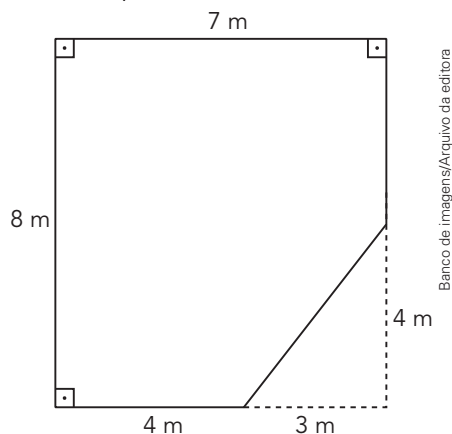
Atividades

1. **a)** $A = (4{,}2)^2 = 4{,}2 \cdot 4{,}2 = 17{,}64$. Portanto, a área do quadrado mede 17,64 m².

   b) $A = 5{,}1 \cdot 3 = 15{,}3$. Portanto, a área do retângulo mede 15,3 m².
2. Medida de área de $IJKL$: $65 \cdot 80 = 5\,200$
   Medida de área dos cantos: $4 \cdot \ell^2 = 4 \cdot 102 = 400$
   Medida de área da região colorida: $5\,200 - 400 = 4\,800$
   Portanto, a medida de área da região colorida é 4 800 cm².
3. $A_{campo} = 105 \text{ m} \cdot 68 \text{ m} = 7\,140 \text{ m}^2$
   $A_{restaurada} = 110\,826 \cdot 7\,140 \text{ m}^2 = 791\,297\,640 \text{ m}^2$
   Como 1 hectare = 10 000 m², temos: $A_{restaurada} = 79\,129{,}764$ hectares $\simeq$
   $\simeq$ 79 130 hectares.
4. Se a medida da altura é x, temos que a medida da base é $2x$.
   $A = 2x \cdot x \Rightarrow 2x^2 = 72 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$
   As dimensões medem 12 cm e 6 cm.

5. Exemplo de resposta: A medida do comprimento de um retângulo é 20 cm, e a da largura dele é 12 cm. Calcule a medida de área desse retângulo. Resposta: 104 cm^2.
6. $A = b \cdot h = 6 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$. Portanto, a área do paralelogramo mede 18 cm^2.
7. $A = b \cdot h = 25 \text{ m} \cdot 14{,}5 \text{ m} = 362{,}5 \text{ m}^2$. Portanto, a área do paralelogramo mede 362,5 m^2.
8. $A = b \cdot h + b \cdot h = 8 \cdot 2{,}3 + 8 \cdot 4{,}8 = 18{,}4 + 38{,}4 = 56{,}8$. Portanto, a área do jardim mede 56,8 m^2.
9. **a)** $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$. Portanto, a área do triângulo mede 9 cm^2.

   b) $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{14 \cdot 8}{2} = 56$. Portanto, a área do triângulo mede 56 cm^2.
10. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Medida de área do retângulo: $7 \cdot 8 = 56$.

Medida de área do triângulo: $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

Medida de área do terreno: $56 - 6 = 50$.

Portanto, a área do terreno mede 50 m^2.

11. Terreno **1**: $A = 22{,}5 \cdot 6{,}2 = 139{,}5$.

    Terreno **2**: $A = \frac{14{,}25 \cdot 19{,}6}{2} = 139{,}65$.

    O terreno **2**, pois a área dele mede 139,65 m^2, enquanto a área do terreno **1** mede 139,5 m^2.
12. Exemplo de resposta: Calcule a medida de área de um triângulo cuja base mede 5 m e a altura, 3 m. Resposta: 7,5 m^2.
13. **a)** $A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$. Portanto, a área do losango mede 24 m^2.

    b) $A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40$. Portanto, a área do losango mede 40 m^2.
14. **a)** $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(10 + 6) \cdot 5}{2} = \frac{16 \cdot 5}{2} = 40$. Portanto, a área do trapézio mede 40 m^2.

    b) $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(8 + 4) \cdot 3}{2} = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18$. Portanto, a área do trapézio mede 18 m^2.
15. **a)** A figura é composta de:
    - 1 retângulo de dimensões medindo 5 por 1, cuja área mede $5 \cdot 1 = 5$;
    - 2 retângulos de dimensões medindo 4 por 1, cuja área mede $2 \cdot 4 \cdot 1 = 8$;
    - 2 retângulos de dimensões medindo 3 por 1, cuja área mede $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$;
    - 2 retângulos de dimensões medindo 2 por 1, cuja área mede $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$;
    - 1 retângulo de dimensões medindo 1 por 1, cuja área mede $1 \cdot 1 = 1$.

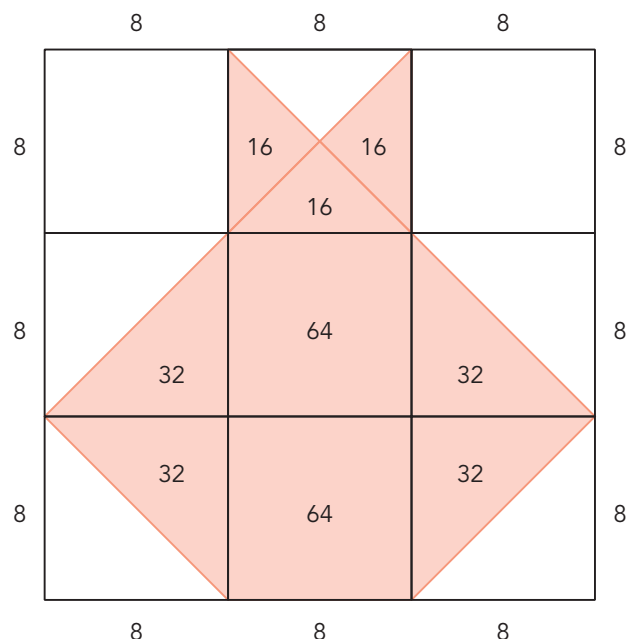
    Logo, a medida de área da parte colorida é $5 + 8 + 6 + 4 + 1 = 24$, ou seja, 24 u.a.

    b) A região é formada por:
    - um triângulo isósceles de catetos iguais a 2, cuja área mede $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$;
    - um retângulo de dimensões medindo 6 por 3, cuja área mede $6 \cdot 3 = 18$;
    - um triângulo de catetos 1 e 3, cuja área mede $\frac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5$.

    Logo, a área da região mede $2 + 18 + 1{,}5 = 21{,}5$, ou seja, 21,5 u.a.

    c) A imagem não está representada com medidas reais.

    A região pode ser decomposta como na figura a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Como cada quadrado menor tem área medindo $8^2 = 64$, a área da figura destacada mede $2 \cdot 64 + 4 \cdot \frac{64}{2} + \frac{3}{4} \cdot 64 = 304$, ou seja, 304 cm^2.

Outra solução:

Cada quadradinho tem área medindo $(4 \text{ cm})^2 = 16 \text{ cm}^2$. Contando os quadradinhos da figura, temos 14 quadradinhos inteiros ($14 \cdot 16 \text{ cm}^2 = 224 \text{ cm}^2$) e 10 metades de quadradinhos, que corresponde a 5 quadradinhos ($5 \cdot 16 \text{ cm}^2 = 80 \text{ cm}^2$). Logo, a medida de área é $224 \text{ cm}^2 + 80 \text{ cm}^2 = 304 \text{ cm}^2$.

16. Exemplo de resposta: Um losango tem diagonal maior medindo 8 cm e a menor, 5 cm. Qual é a medida de área desse losango? Resposta: 20 cm^2.
17. Exemplo de resposta: Um trapézio tem uma medida de área de 25 cm^2. Se a base menor mede 4 cm e a base maior, 6 cm, calcule a medida da altura desse trapézio. Resposta: 5 cm.
18. $C = 2\pi r \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \simeq 62{,}8$. Portanto, o comprimento da circunferência mede, aproximadamente, 62,8 cm.
19. $d = 12 \Rightarrow r = 6$

    $C = 2\pi r \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 = 37{,}68$

    Portanto, o comprimento da circunferência mede, aproximadamente, 37,68 cm.

20. $C = 2\pi r = d\pi = 10\pi \simeq 10 \cdot 3{,}14 \simeq 31{,}4$
O comprimento do fio deve medir, aproximadamente, 31,4 cm.

21. $2\pi r = C \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot r = 120 \Rightarrow r \simeq \dfrac{120}{2 \cdot 3{,}14} \Rightarrow r \simeq 19{,}11$

Portanto, o raio da circunferência mede, aproximadamente, 19,11 cm.

22. $2\pi r = C$
$2\pi R = C + 5$
Então:
$2\pi R = 2\pi r + 5 \Rightarrow R = r + \dfrac{5}{2\pi}$

Ou seja, quando a medida de comprimento da circunferência aumenta 5 m, a medida do raio aumentou $\dfrac{5}{2\pi} \simeq 0{,}8$, ou seja, aproximadamente 0,8 m.

23. Medida de comprimento inicial: $C_i = 2\pi r$
Medida de comprimento final: $C_f = 2\pi\,(1{,}5)r$
Então:

$C_f = 3\pi r = 2\pi r + \pi r = C_i + \dfrac{C_i}{2} = C_i + 50\% \cdot C_i$

Portanto, a medida de comprimento da circunferência aumenta 50%.

24. **a)** $A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \simeq 25 \cdot 3{,}14 \simeq 78{,}5$. Portanto, a área do círculo mede aproximadamente 78,5 cm^2.
b) $A = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \simeq 4 \cdot 3{,}14 \simeq 12{,}56$. Portanto, a área do círculo mede aproximadamente 12,56 cm^2.
c) $A = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \simeq 50{,}24$. Portanto, a área do círculo mede aproximadamente 50,24 m^2

25. $C = 2\pi r \Rightarrow 6\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 3$
$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \simeq 28{,}26$; ou seja, aproximadamente 28,26 cm^2.

26. Cálculo da medida de perímetro:
$C = \pi \cdot R + 2R = \pi \cdot 11 + 2 \cdot 11 = 11 \cdot (\pi + 2) \simeq 56{,}54$; ou seja, aproximadamente 56,54 m.
Cálculo da medida de área:

$A = \dfrac{\pi \cdot R^2}{2} = \dfrac{\pi \cdot 11^2}{2} = \dfrac{121\pi}{2} \simeq 189{,}97$; ou seja, aproximadamente 189,97 m^2.

27. $A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi \simeq 9{,}42$. Portanto, a área da superfície colorida mede aproximadamente 9,42 cm^2.

28. $A = \dfrac{\pi \cdot R^2}{2} - 2 \cdot \dfrac{\pi \cdot R^2}{2} = \dfrac{\pi \cdot 10^2}{2} - \pi \cdot 5^2 = 50\pi - 25\pi = 25\pi \simeq 78{,}5$; ou seja, aproximadamente 78,5 cm^2

29. Para escolher o cartão, devemos calcular a medida de área de cada um dos formatos oferecidos.
Medida de área do círculo:
$A_{circulo} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{10}{2}\right)^2 = 25\pi \simeq 78{,}5.$
Medida de área do hexágono regular:
$A_{hexágono} = n \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} = \dfrac{6 \cdot 6}{2} \cdot 5{,}2 = 93{,}6.$
Medida de área do retângulo: $A_{retângulo} = b \cdot h = 11 \cdot 8 = 88.$
Medida de área do quadrado: $A_{quadrado} = \ell^2 = 8^2 = 64.$

Medida de área do triângulo equilátero:
$A_{triângulo} = \dfrac{n \cdot \ell}{2} \cdot a = \dfrac{3 \cdot 12}{2} \cdot 3{,}46 = 62{,}28.$

O modelo apresenta formato de triângulo equilátero, pois tem a menor medida de área e, consequentemente, é o mais barato.

30. Exemplo de resposta: Vanessa desenhou um círculo cuja medida do raio é 2 cm. Aproximadamente, qual é a medida de área do círculo que Vanessa desenhou? Resposta: Aproximadamente 12,56 cm^2.

Participe (p. 219)

I. **a)** São iguais, pois não foi cortada ou alterada a folha nos dois casos.
b) São iguais, pois não foi retirada nem acrescentada nenhuma folha e a altura da pilha, apesar da inclinação, não se modificou.
c) São iguais, pois não foi retirada nem acrescentada nenhuma folha, a quantidade de folhas da pilha continua igual e não altera a medida de volume.

II. Sim, pois é possível identificar a medida da altura do bloco a partir do produto da quantidade de folhas pela medida da espessura de cada uma delas e calcular a medida de volume do bloco a partir do produto da medida da altura do bloco pela medida de área de cada folha. Assim, as medidas de volume desses blocos são iguais, pois as medidas de área de cada pedaço de folha são iguais e as medidas da altura dos blocos (produto da quantidade de folhas pela medida da espessura de cada uma delas) também são iguais.

31. a) $V = A_{base} \cdot h = 4\pi\ cm^2 \cdot 6\ cm = 24\pi\ cm^3 \simeq 75{,}36\ cm^3$

b) $V = \pi \cdot (5\ cm)^2 \cdot 10\ cm = 250\pi\ cm^3 \simeq 785\ cm^3$

c) $V = \pi \cdot (10\ cm)^2 \cdot 3\ cm = 300\pi\ cm^3 \simeq 942\ cm^3$

32. $V = \pi \cdot (1{,}5\ dm)^2 \cdot 4\ dm = 9\pi\ dm^3 = 9\pi\ L \simeq 28{,}26\ L$. Portanto, a capacidade de um garrafão de água que tem o formato cilíndrico mede aproximadamente 28,26 L.

33. 1 mL = 1 cm^3; 30 mm = 3 cm.

$\pi \cdot (1{,}5\ cm)^2 \cdot h = 20\ cm^3 \Rightarrow h = \dfrac{20}{2{,}25\pi}\ cm \Rightarrow h \simeq 2{,}8\ cm$

Portanto, a altura da parte ocupada pelo remédio no vidrinho mede aproximadamente 2,8 cm.

34. $V_{lata} = 23 \cdot 23 \cdot 34{,}1 \simeq 18\,000$; $18\,000\ cm^3 = 18\ dm^3$.

$V_{galão} = \pi \cdot 8^2 \cdot 18 = 3\,600$; $3\,600\ cm^3 = 3{,}6\ dm^3$.

$\dfrac{18\ dm}{3{,}6\ dm} = 5$

Cabem 5 galões de tinta em uma lata. Portanto, o volume da lata de tinta e do galão medem aproximadamente 18 dm^3 e 3,6 dm^3, respectivamente.

35. $V_{garrafa} = 5^2 \cdot 18 = 450$

$V_{copo} = \pi \cdot 3^2 \cdot 16 \simeq 452$

As medidas de capacidade são praticamente iguais, mas no copo cabe um pouco mais. A medida da capacidade do copo mede aproximadamente 452 mL.

36. 25 km = 25 000 m; 280 mm = 0,28 m

$V_{água} = \pi \cdot 25\,000^2 \cdot 0{,}28 = 175\,000\,000\pi \simeq 549\,500\,000$

$549\,500\,000\ m^3 = 549\,500\,000\,000\ L$

Portanto, o volume de água que caiu nessa região nesse período mede aproximadamente 549 500 000 m^3, ou seja, aproximadamente 549 500 000 000 L.

37. $A_{canteiro} = \pi \cdot 6^2 \simeq 108$; ou seja, aproximadamente 108 m^2.

$108\ m^2 : 0{,}6\ m^2 = 180$

Portanto, o número máximo de pés que podem ser colocados é 180.

38. $A_{base} = \pi \cdot 50^2 \simeq 7\,500$

$A_{lateral\ cilindro} = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 150 \simeq 45\,000$

$A_{cilindro} \simeq 2 \cdot 7\,500\ cm^2 + 45\,000\ cm^2 = 60\,000\ cm^2 = 6\ m^2$

$V_{cilindro} \simeq 7\,500\ cm^2 \cdot 150\ cm = 1\,125\,000\ cm^3 = 1\,125\ dm^3 = 1\,125\ L$

Logo, a medida de área total da superfície metálica é aproximadamente 6 m^2 e a medida de capacidade, aproximadamente 1 125 L.

39. Exemplo de resposta: Uma fábrica de suco comporta uma produção em um reservatório em formato de bloco retangular cujas dimensões medem: 0,8 m, 10 m e 5 m. A fábrica está envazando o suco produzido em embalagens com formato de bloco retangular com dimensões medindo 10 cm, 10 cm e 25 cm. Quantas embalagens essa fábrica conseguirá envazando todo o suco do reservatório de uma produção? Resposta: 16 000 embalagens.

40. Exemplo de resposta: Um cilindro tem altura medindo 1 m. Se o raio da base mede 2 m, qual é, aproximadamente, a medida de capacidade, em litros, desse cilindro? Resposta: Aproximadamente 12 000 L.

Na mídia

a) $\dfrac{1\,227}{5\,570} \simeq 22{,}0\%$

b) $\dfrac{35}{209{,}5} \simeq 16{,}7\%$

c) Aumento de municípios com coleta seletiva: $1\,227 - 443 = 784$.

Porcentagem de aumento de municípios com coleta seletiva:

$\dfrac{784}{443} \simeq 1{,}77 = \dfrac{177}{100} = 177\%$.

Aumento da população com coleta seletiva: $35 - 22 = 13$.

Porcentagem de aumento da população com coleta seletiva:

$\dfrac{13}{22} = 0{,}59 = \dfrac{59}{100} = 59\%$.

d) Sudeste e Sul.

e) 45% de $360° = \dfrac{45}{100} \cdot 360° = 162°$

f) Exemplos de resposta: Lata de suco: cilindro; caixa de leite: prisma.

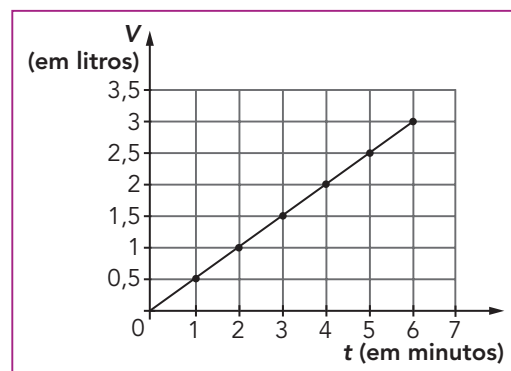
g) Resposta pessoal. **h)** Resposta pessoal.

Capítulo 16

Atividades

1. a)

t (em minutos)	0	1	2	3	4	5	6
V (em litros)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

b)

Banco de imagens/Arquivo da editora

c) $V = 0{,}5 \cdot t$

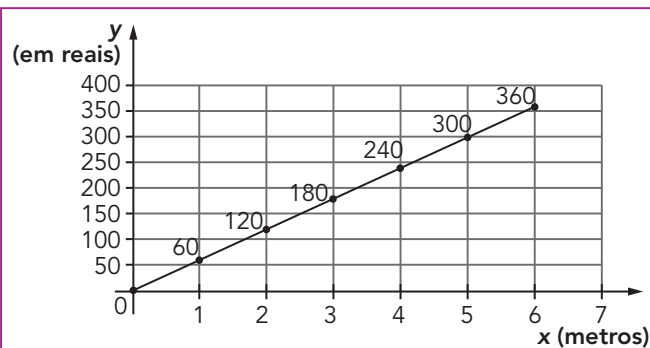
d) Sim, porque a razão $\dfrac{V}{t}$ é constante para cada t positivo.

e) 1 dia tem 24 horas, logo, $24 \cdot 60$ minutos.

Então, $V = 0{,}5 \cdot 24 \cdot 60$ litros $= 720$ litros.

2. a)

x (em metros)	0	1	2	3	4	5	6
y (em reais)	0	60	120	180	240	300	360

b)

Banco de imagens/Arquivo da editora

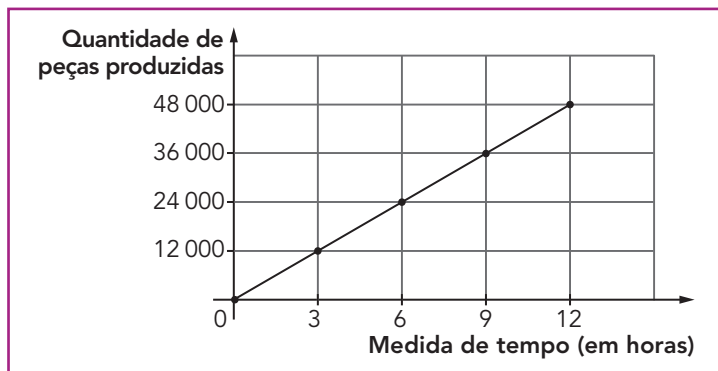
c) $y = 60x$

d) Sim, porque a razão $\frac{y}{x}$ é constante para cada x positivo.

e) Para $x = 2{,}2$ metros, temos $y = 60 \cdot 2{,}2 = 132$.
Portanto, R$ 132,00.

3. a)

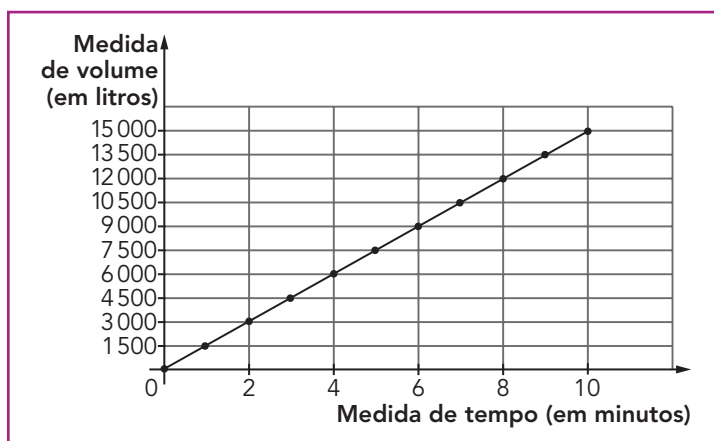
Medida de tempo (em horas)	3	6	9	12
Quantidade de peças produzidas	12 000	24 000	36 000	48 000

b)

Banco de imagens/Arquivo da editora

c) Número de peças produzidas por hora:
12 000 : 3 = 4 000
Em t horas, o número y de peças é:
$y = 4\,000t$

d) $4\,000t = 30\,000 \Rightarrow t = 7{,}5$; ou seja, 7,5 h (7 horas e meia).

4.

Medida de tempo (em minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Medida de volume (em litros)	0	1 500	3 000	4 500	6 000	7 500	9 000	10 500	12 000	13 500	15 000

Banco de imagens/Arquivo da editora

$V = 1\,500t$, com V em litros e t em minutos.

5. Calculando 30% do salário desse investidor, temos: $0{,}3 \cdot$ R$ 4.500,00 = R$ 1.350,00; calculando 10%, temos: $0{,}1 \cdot$ R$ 4.500,00 = R$ 450,00. Essa aplicação foi feita em um mês. Desse modo, em 1 ano, os dois investimentos rendem: $0{,}06 \cdot$ R$ 1.350,00 + $0{,}05 \cdot$ R$ 450,00 = R$ 81,00 + + R$ 22,50 = R$ 103,50, ou seja, um total de R$ 103,50 ao ano. Espera-se que o estudante associe os retornos aos riscos dos investimentos chegando à conclusão que é possível obter rendimentos maiores assumindo mais riscos.

6. Exemplo de resposta: Para alimentar um cachorrinho em uma semana, são necessários 560 gramas de ração. Quantos gramas de ração são necessários para alimentá-lo em um mês de 30 dias? Resposta: 2 400 g.

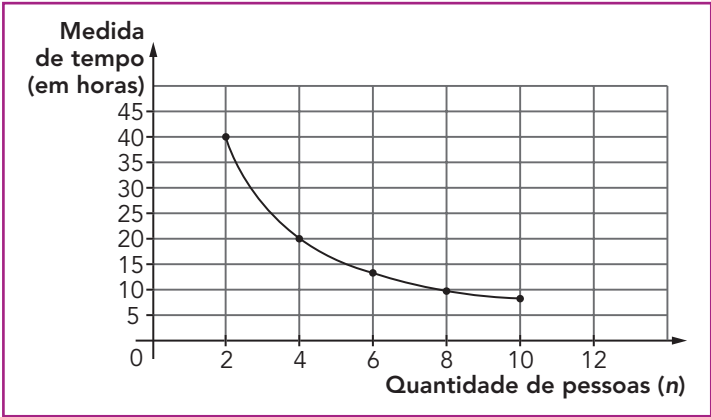
7. a) Inversamente proporcionais, porque, aumentando a quantidade de pessoas, a medida de tempo diminui proporcionalmente (por exemplo, dobrando a quantidade de pessoas, a medida de tempo diminui pela metade).

b)

Quantidade de pessoas (n)	Medida de tempo (em horas)
2	40
4	20
8	10
10	8

c) $n \cdot t = 80$

d)

Banco de imagens/Arquivo da editora

e) $n \cdot t = 80 \Rightarrow 16t = 80 \Rightarrow t = 5$; ou seja, 5 h.

f) $n \cdot t = 80 \Rightarrow n \cdot 4 = 80 \Rightarrow n = 20$; ou seja, 20 pessoas.

g) Exemplo de resposta: Se a administração do parque quiser finalizar o trabalho em 8 horas, quantos profissionais com o mesmo rendimento terão de contratar? Resposta: 10 profissionais.

8. Sendo t a medida de tempo, temos:

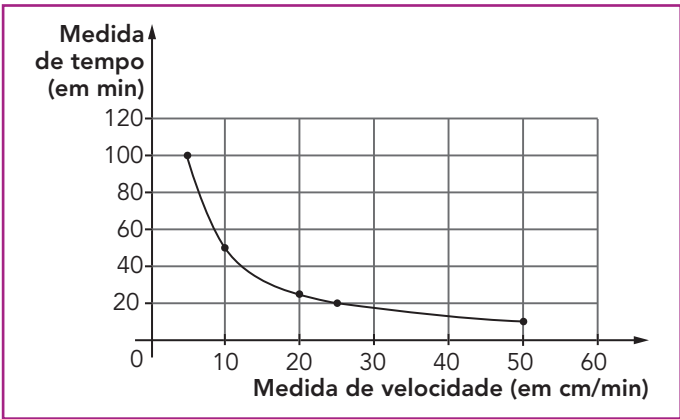
a) $t = \dfrac{300\,000}{\text{vazão}} = \dfrac{300\,000}{1\,000} = 300$; ou seja, 300 minutos = 5 horas.

b) $t = \dfrac{300\,000}{\text{vazão}} = \dfrac{300\,000}{2\,500} = 120$; ou seja, 120 minutos = 2 horas.

c) $t = \dfrac{300\,000}{\text{vazão}} = \dfrac{300\,000}{3\,500} \simeq 86$; ou seja, aproximadamente 86 minutos.

9. $v \cdot t = 500$

Medida de velocidade (em cm/min)	50	25	20	10	5
Medida de tempo (em min)	10	20	25	50	100

Banco de imagens/Arquivo da editora

10. Exemplo de resposta: Com um balde de leite, Toninho encheu 10 garrafinhas de 600 mililitros. Se fossem garrafinhas de 400 mililitros, quantas seriam necessárias para colocar todo o leite do balde? Resposta: 15 garrafinhas.

11. $A_{quintal} = 4\text{ m} \cdot 9\text{ m} = 36\text{ m}^2 = 360\,000\text{ cm}^2$

Medida de comprimento do lado do ladrilho (em cm)	30	40	50	60
Medida de área do ladrilho (em cm²)	900	1 600	2 500	3 600
Quantidade de ladrilhos	400	225	144	100

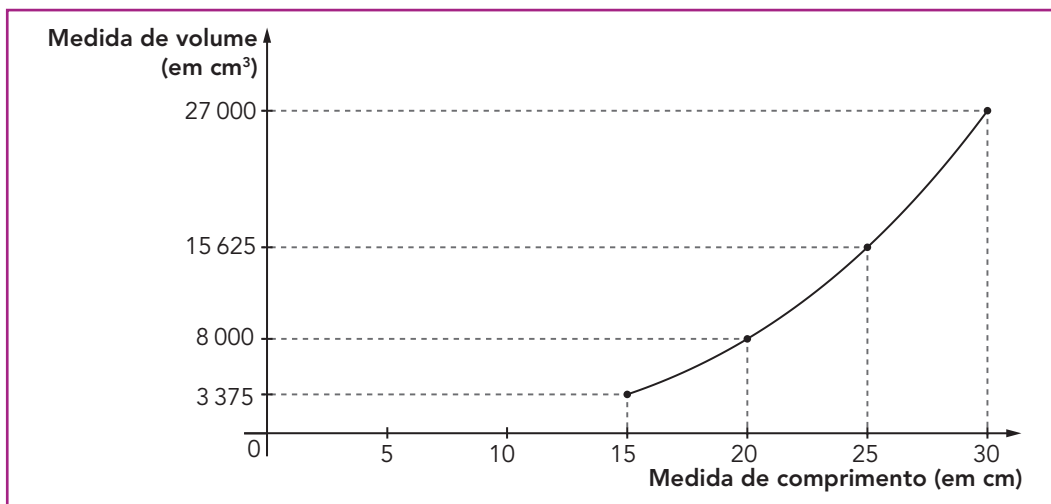
12.

Medida de comprimento do lado do ladrilho (em cm)	30	40	50	60
Quantidade de ladrilhos + 10%	440	248	159	110
Quantidades de caixas a comprar	44	25	16	11

13. Na atividade **11**, há relação de proporcionalidade entre as grandezas, pois a quantidade de ladrilhos é inversamente proporcional à medida de área do ladrilho. Na atividade **12**, não há relação de proporcionalidade entre as grandezas.

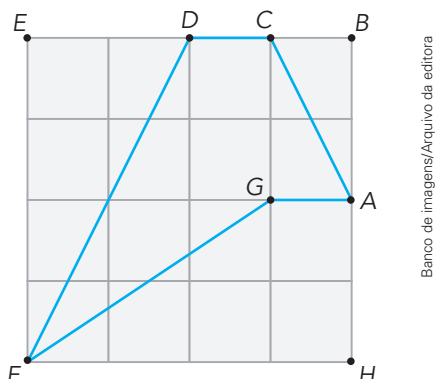
14. Resposta esperada: A opção mais barata, ou seja, o ladrilho cujo lado mede 50 cm, pois o preço de 16 caixas desse revestimento custa o menor valor total: R$ 1.936,00.

Medida do lado do ladrilho	30	40	50	60
Quantidades de caixas a comprar	44	25	16	11
Total (em reais)	$44 \cdot 50 = 2200$	$25 \cdot 130 = 3250$	$16 \cdot 121 = 1936$	$11 \cdot 215 = 2365$

15. $V = x^3$

a) As grandezas volume e comprimento da aresta da caixa não são diretamente proporcionais.

b) As grandezas volume e comprimento da aresta da caixa não são inversamente proporcionais.

Na Unidade

1.

A medida de área da figura recortada pode ser obtida calculando a diferença entre a medida de área da placa original e as medidas de área das partes retiradas, que foram o triângulo *ABC*, o triângulo *DEF* e o trapézio *FGAH*.

Medida de área de *ABC*: $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$; ou seja, 1 cm².

Medida de área de *DEF*: $\frac{2 \cdot 4}{2} = 4$; ou seja, 4 cm².

Medida de área de *FGAH*: $\frac{1 + 4}{2} \cdot 2 = 5$; ou seja, 5 cm².

Então: 16 cm² − 1 cm² − 4 cm² − 5 cm² = 6 cm². Logo, alternativa **c**.

2. $A_{\text{círculo}} = \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow \pi \cdot \frac{x^2}{4} = 49\pi \Rightarrow x = 2 \cdot 7 \Rightarrow x = 14$

Medida de perímetro da chapa: $2x + 2 \cdot 20 = 28 + 40 = 68$; ou seja, 69 cm. Logo, alternativa **a**.

3. $(8 \cdot 8 \cdot 5)$ cm³ $- \pi \cdot (1{,}5 \text{ cm})^2 \cdot 5$ cm $\simeq 320$ cm³ − 35 cm³ = 285 cm³. Logo, alternativa **d**.

4. $A_{base} = 8 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 16 + 6 + 4 = 26$; ou seja, 26 cm².
$V_{prisma} = 26 \cdot 5 = 130$; ou seja, 130 cm³.
Logo, alternativa **e**.

5.

Quantidade de gotas		Medida de massa (em kg)
5	—	2
30	—	x

A quantidade de gotas é diretamente proporcional à medida de massa.

$\frac{5}{2} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 2}{5} \Rightarrow x = 12$

A medida de massa corporal do cão é 12 kg.

6. Água utilizada:

Não ecológica		Ecológica
15 L	—	6 L
60 L	—	x

São grandezas diretamente proporcionais.

$\frac{15 \text{ L}}{6 \text{ L}} = \frac{60 \text{ L}}{x} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 6}{15} \Rightarrow x = 24$

A economia é de 60 L − 24 L = 36 L. Logo, alternativa **b**.

7. Aumentando a quantidade de animais, as porções durarão menos dias; essas grandezas são inversamente proporcionais.

Quantidade de animais		Quantidade de dias
76	—	30
96	—	x

$76 \cdot 30 = 96 \cdot x \Rightarrow x = \frac{76 \cdot 30}{96} \Rightarrow x = 23{,}75$; ou seja, aproximadamente 23 dias.

8. Exemplo de resposta: Algumas mangueiras serão usadas para encher uma piscina que está vazia. Todas foram abertas ao mesmo tempo e, após 1 minuto a piscina já tinha 120 litros de água. Quantos litros de água ela terá depois de 75 minutos que as torneiras foram abertas? Resposta: 9 000 L.

9. Exemplo de resposta: Uma pessoa foi da cidade A para a cidade B com uma medida de velocidade média de 80 km/h e levou 1 hora para fazer esse percurso. Em quantos minutos ela faria o mesmo percurso com a medida de velocidade média de 96 km/h? Resposta: 50 minutos.

Unidade 9

Abertura (p. 231)

Respostas pessoais.

Capítulo 17

Atividades

1. $\frac{20 + 30 + 40 + 40 + 60 + 50}{6} = \frac{240}{6} = 40$

A média aritmética das vendas mensais foi 40 unidades.

2. $\frac{55 \text{ min } 40 \text{ s} + 54 \text{ min } 25 \text{ s} + 55 \text{ min } 10 \text{ s}}{3} = \frac{165 \text{ min } 15 \text{ s}}{3} =$

$= 55 \text{ min } 5 \text{ s}$

3. Vamos supor que as notas de Bia sejam 6,0, ou seja, $\frac{6 + 6 + 6}{3} = 6{,}0$.

A nota mínima que Bia pode tirar é 0. Portanto, a sua média mínima será $\frac{6 + 6 + 6 + 0}{4} = 4{,}5$.

Bia ainda pode tirar a nota máxima: 10,0. Então, sua média máxima será $\frac{6 + 6 + 6 + 10}{4} = 7{,}0$.

4. $\frac{1}{20} \cdot [6 \cdot 40\,000 + 10 \cdot 44\,800 + 2 \cdot 64\,000 + 2 \cdot 96\,000] =$

$= \frac{1}{20} \cdot [240\,000 + 448\,000 + 128\,000 + 192\,000] = \frac{1}{20} \cdot 1\,008\,000 =$

$= 50\,400$

O valor médio por carro vendido foi de R$ 50.400,00.

5. Vamos representar por x a quantidade vendida em fevereiro.

O preço médio é:

$\frac{2{,}70 \cdot 2x + 3{,}60 \cdot x}{3x} = \frac{5{,}40x + 3{,}60x}{3x} = \frac{9{,}00x}{3x} = 3{,}00.$

Cada pé de alface foi vendido, em média, por R$ 3,00 nesse período.

6. **a)** $\frac{1405{,}969 \cdot 0{,}6 + 669{,}332 \cdot 0{,}3 + 971{,}651 \cdot 0{,}1}{1} =$

$= \frac{843{,}5814 + 200{,}7996 + 97{,}1651}{1} = 1\,141{,}5461$

b) $1\,141{,}546 - 1\,120{,}999 = 20{,}547$

aumento porcentual $= \frac{20{,}547 \cdot 100}{1\,120{,}999}\% = 1{,}8329\%$

Aproximadamente 1,83%.

7. Substituindo a nota da 1ª prova, o aumento na média será de:

$(7{,}6 - 4{,}0) \cdot \frac{2}{10} = 0{,}72.$

Substituindo a nota da 2ª prova, o aumento será de:

$(7{,}6 - 5{,}0) \cdot \frac{3}{10} = 0{,}78.$

Substituindo a nota da 3ª prova, o aumento será de:

$(7{,}6 - 6{,}0) \cdot \frac{5}{10} = 0{,}80$. Para ficar com a maior média, portanto, o estudante deve substituir a nota da 3ª prova.

8. A soma das medidas da altura das 14 jogadoras era: $14 \cdot 1{,}80 \text{ m} = 25{,}20 \text{ m}$.

$\frac{25{,}20 - 1{,}64 - 1{,}75}{12} = \frac{21{,}81}{12} = 1{,}8175 \simeq 1{,}82$

A média das medidas da altura dos 12 que ficaram é aproximadamente 1,82 cm.

9. $\frac{25 \cdot 2\,800 - 4 \cdot 3\,751 - 9 \cdot 2\,900}{25 - 4 - 9} = \frac{28\,896}{12} = 2\,408$

A média dos salários dos demais funcionários é R$ 2.408,00.

10. Qualquer variável que aumentar causará o mesmo efeito no IDH.

Na olimpíada (p. 235)

Para que a média aritmética das notas seja igual ou maior do que 6, basta que a soma das coordenadas dos pontos seja maior ou igual a 12. Isso só ocorre para os alunos **F** $(3 + 9 = 12)$, **E** $(7 + 6 = 13)$, **G** $(8 + 7 = 15)$, **H** $(10 + 5 = 15)$, **A** $(9 + 8 = 17)$ e **D** $(8 + 10 = 18)$. Portanto, 6 alunos. Logo, alternativa **a**.

11. **a)** $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$

b) $\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{400} = 20$

c) $\sqrt{15 \cdot 60} = \sqrt{900} = 30$

d) $\sqrt{1 \cdot 100} = \sqrt{100} = 10$

12. Calculando a média aritmética:

a) $\frac{9 + 16}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$

b) $\frac{16 + 25}{2} = \frac{41}{2} = 20{,}5$

c) $\frac{15 + 60}{2} = \frac{75}{2} = 37{,}5$

d) $\frac{1 + 100}{2} = \frac{101}{2} = 50{,}5$

Verifica-se, portanto, que a média geométrica é menor do que a média aritmética.

13. $x^2 = 2 \cdot 8 \Rightarrow x = \sqrt{16} \Rightarrow x = 4$

Em média, a população quadruplicou em cada década.

14. $\sqrt{2 \cdot 1{,}28} = \sqrt{2{,}56} = 1{,}6$

O faturamento de Ana Paula aumentou 1,6 por ano em média.

15. Instituição de Ensino Superior **I**:

$\frac{6{,}12500 \cdot 7 + 7{,}66667 \cdot 3}{10} = \frac{42{,}875 + 23{,}00001}{10} =$

$= \frac{65{,}87501}{10} = 6{,}58750$

Instituição de Ensino Superior **II**:

$\sqrt{6{,}12500 \cdot 7{,}66667} = \sqrt{46{,}9583538} = 6{,}85261657 \simeq 6{,}85262$

16. $\frac{400 \cdot 0 + 1\,024 \cdot 1 + 128 \cdot 2 + 48 \cdot 3}{1\,600} =$

$= \frac{0 + 1\,024 + 256 + 144}{1\,600} = \frac{1\,424}{1\,600} = 0{,}89$

A distribuição média de microcomputadores em casa, por candidato, é 0,89 microcomputador.

17. $\frac{10 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 5}{100} =$

$= \frac{10 + 60 + 90 + 80 + 50}{100} = \frac{290}{100} = 2{,}9$

A distribuição média de TVs em casa, por candidato, é 2,9 TVs.

18. $\frac{1 \cdot 640 + 2 \cdot 800 + 3 \cdot 180}{1\,600} = \frac{640 + 1600 + 480}{1\,600} =$

$= \frac{2\,720}{1\,600} = 1{,}7$

Em média, 1,7 pessoa contribui para a renda familiar, por candidato.

19. $\frac{3 \cdot 192 + 4 \cdot 640 + 5 \cdot 576 + 6 \cdot 128 + 7 \cdot 64}{1\,600} =$

$= \frac{576 + 2\,560 + 2\,880 + 768 + 448}{1\,600} = \frac{7\,232}{1\,600} = 4{,}52$

Em média, 4,52 pessoas são sustentadas com a renda familiar, por candidato.

20. $\frac{1 \cdot 16 + 2 \cdot 27 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 18 + 5 \cdot 9}{100} =$

$= \frac{16 + 54 + 90 + 72 + 45}{100} = \frac{277}{100} = 2{,}77$

Em média, 2,77 banheiros em casa.

21. Podemos usar regra de 3 para completar a tabela:

Frequência	**Frequência relativa (em %)**
1 600	100
800	x

$x = \frac{800}{1\,600} \cdot 100\% \Rightarrow x = 50\%$

Frequência relativa (em %)	**Medida do ângulo interno**
100	360°
50	y

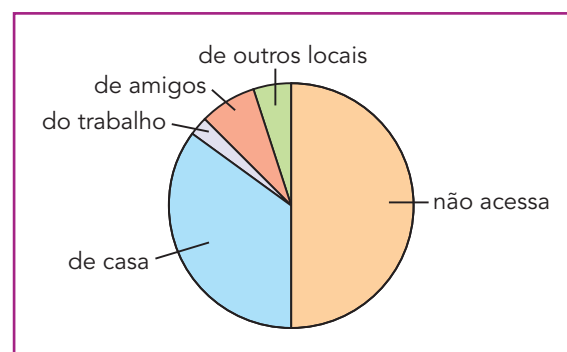
$y = \frac{50 \cdot 360°}{100} \Rightarrow y = 180°$

Fazendo o cálculo para todas as categorias, podemos montar a seguinte tabela.

Acesso à internet

Acesso	Frequência	Frequência relativa	Medida do ângulo interno
não acessa	800	50%	180°
de casa	560	35%	126°
do trabalho	40	2,5%	9°
de amigos	120	7,5%	27°
de outros locais	80	5%	18°
Total	**1 600**	**100%**	**360°**

Dados elaborados para fins didáticos.

Acesso à internet

Dados elaborados para fins didáticos.

22. a) Os gols sofridos pelo Atlético Mineiro no 1º turno de 2021 são representados na tabela.

O Atlético Mineiro no Brasileirão 2021

Quantidade de gols sofridos	Frequência
0	8
1	8
2	3
Total	**19**

Fonte dos dados: CAMPEONATO Brasileiro de Futebol – série A – 2021. CBF. Disponível em: https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-serie-a/2021. Acesso em: 18 abr. 2022.

b) A moda é 0 e 1, pois esses números representam as quantidades de gols sofridos que aconteceram com maior frequência (bimodal).

c) Ordenando os gols sofridos:

0 0 0 0 0 0 0 0 1 **1** 1 1 1 1 1 1 2 2 2

temos que a mediana ocupa a posição central, portanto, a mediana é 1.

d) Média: $\frac{0 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 3}{19} = \frac{0 + 8 + 6}{19} = \frac{14}{19} =$

$= 0{,}7368 \simeq 0{,}74$

O Atlético Mineiro sofreu, em média, aproximadamente 0,74 gol por jogo.

23. a) Média: $\dfrac{30 \cdot 1\,400 + 40 \cdot 1\,600 + 20 \cdot 2\,000 + 10 \cdot 20\,000}{100} =$

$= \dfrac{42\,000 + 64\,000 + 40\,000 + 200\,000}{100} = \dfrac{346\,000}{100} = 3\,460$

A média desses salários é R$ 3.460,00.

b) Mediana: $\dfrac{50^{\text{o}} \text{ termo} + 51^{\text{o}} \text{ termo}}{2} = \dfrac{1\,600 + 1\,600}{2} =$

$= \dfrac{3\,200}{2} = 1\,600$

A mediana é R$ 1.600,00.

c) A mediana. Há 90% dos salários na faixa de R$ 1.000,00 a R$ 2.000,00. Apenas 10% dos salários estão acima da média.

24. a) Como são 32 notas, a mediana é $\dfrac{16^{\text{a}} \text{ nota} + 17^{\text{a}} \text{ nota}}{2}$.

Adicionando as frequências das notas 3, 4 e 5, o total é $3 + 5 + 8 =$ $= 16$. Portanto, escrevendo as notas da menor para a maior, a 16ª é 5 e a 17ª é 6. A mediana é $\dfrac{5 + 6}{2} = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$.

b) Média: $\dfrac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 2}{32} =$

$= \dfrac{9 + 20 + 40 + 48 + 42 + 16}{32} = \dfrac{175}{32}$

Média: $5{,}46875 \simeq 5{,}47$.

25. a) A idade média é:

$\dfrac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 2}{32} =$

$= \dfrac{20 + 23 + 25 + 26 + 30 + 32}{6} = \dfrac{156}{6} = 26$; ou seja, 26 anos.

b) A idade mediana é: $\dfrac{25 + 26}{2} = \dfrac{51}{2} = 25{,}5$; ou seja, 25,5 anos.

c) Não existe moda.

26. A moda (que é o número de maior frequência).

27. Amplitude: $168 \text{ cm} - 144 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$.

28. a) Classe A: amplitude: $9{,}5 - 2 = 7{,}5$.
Classe B: amplitude: $8{,}0 - 3{,}5 = 4{,}5$.

b) A classe B teve as notas mais concentradas em torno da média.

c) $9{,}5 - 2{,}0 = 7{,}5$

29. a) Médias das idades:
Brasil: 27,9 anos;
França: 25,4 anos.
A média maior é a do Brasil, então a equipe mais experiente é a brasileira.

b) Amplitudes:
Brasil: 33 anos − 21 anos = 12 anos;
França: 33 anos − 19 anos = 14 anos.
A menor amplitude é a do Brasil, então o Brasil é a equipe mais homogênea.

c) Colocando as 23 idades em ordem monónota não decrescente, a mediana das idades é que ocupa a 12ª posição.
Brasil: 21, 24, 24, 25, 25, 25, 26, 26, 26, 26, 27, 28, ...; mediana: 28 anos. França: 19, 21, 22, 22, 22, 22, 23, 23, 24, 24, 25, 25, ...; mediana: 25 anos.
A menor mediana é a da França, então a equipe francesa é a mais vibrante.

30. a) Resposta pessoal.

b) Se não houver uma razão aparente que justifique esse consumo, é preciso examinar se há desperdício de água por algum vazamento e fazer os reparos necessários.

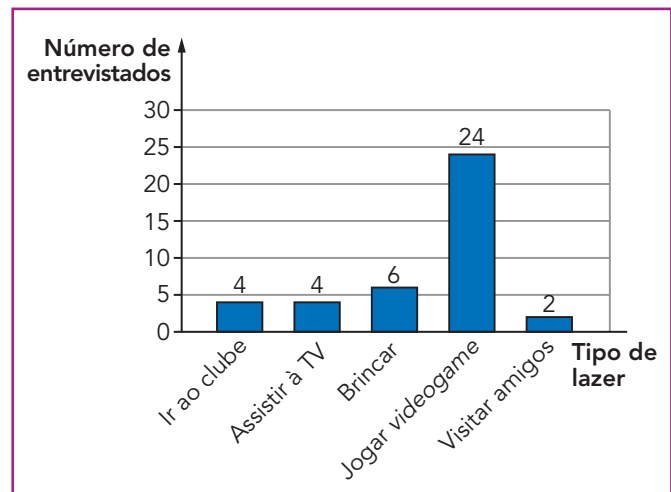
Capítulo 18

Atividades

1. A resposta depende do resultado da pesquisa realizada.
Exemplo de resposta: A escola tem 5 turmas de 8º ano com 30 estudantes cada uma, então a pesquisa será amostral e, para realizá-la, serão sorteados 8 estudantes de cada turma. Os dados foram coletados e organizados na tabela a seguir.

Lazer preferido dos estudantes

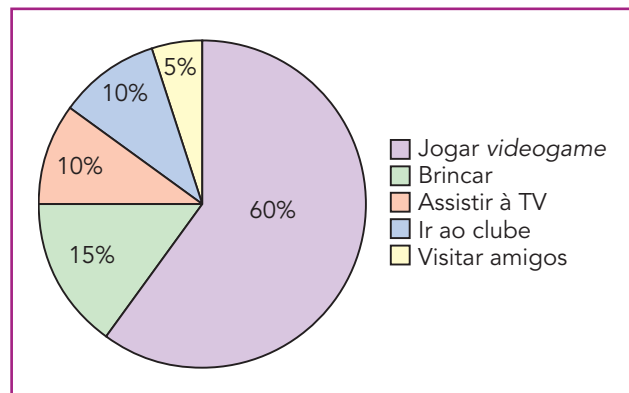
Tipo de lazer	Número de entrevistados (frequência)	Frequência relativa (em %)
Ir ao clube	4	10
Assistir à TV	4	10
Brincar	6	15
Jogar *videogame*	24	60
Visitar amigos	2	5

Dados elaborados para fins didáticos.

Lazer preferido dos estudantes

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Lazer preferido dos estudantes

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

A pesquisa realizada foi amostral, com tipo de amostra estratificada, para que todas as 5 turmas ficassem proporcionalmente representadas na amostra. Analisando os dados da pesquisa, concluímos que o lazer preferido pela maioria dos estudantes (60%) foi "jogar *videogame*" e o menos preferido foi "visitar amigos".

2. A resposta depende do resultado da pesquisa realizada.
Exemplo de resposta:

Idade de um dos responsáveis

Idade (em anos)	Número de responsáveis
30	2
31	3
32	10
35	8
36	8
38	3
42	1

Dados elaborados para fins didáticos.

Analisando os dados da pesquisa, temos:

Média: $\dfrac{30 \cdot 2 + 31 \cdot 3 + 32 \cdot 10 + 35 \cdot 8 + 36 \cdot 8 + 38 \cdot 3 + 42 \cdot 1}{35} = \dfrac{60 + 93 + 320 + 280 + 288 + 114 + 42}{35} = \dfrac{1197}{35} = 34{,}2$; ou seja, 34,2 anos.

A idade modal é 32 anos, pois é a idade que aparece com maior frequência.

A mediana é o termo central. Como são 35 responsáveis pesquisados, o termo central é o 18º, logo, a mediana é 35.

A amplitude é a diferença entre a maior e a menor idade, ou seja, 42 anos − 30 anos = 12 anos.

3. A resposta depende do resultado da pesquisa realizada.
Exemplo de resposta: Supondo que a pesquisa foi realizada com 100 mulheres com mais de 18 anos sobre o “Número do calçado feminino”. O resultado obtido pode ter sido o seguinte:

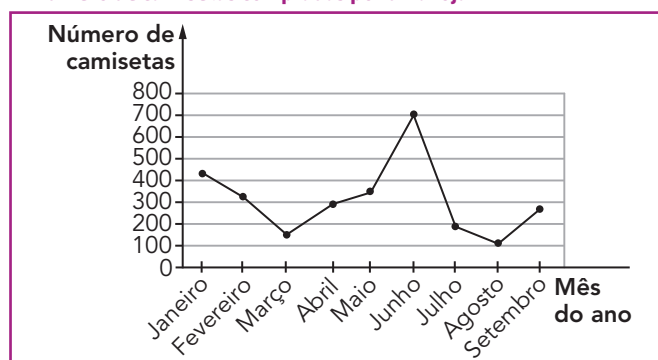
Número do calçado feminino

Número do calçado	Número de mulheres
33	4
34	5
35	8
36	21
37	38
38	20
39	4

Dados elaborados para fins didáticos.

Analisando os dados, verificamos que o número de calçado feminino que mais aparece é o 37 (moda).

4. **a)** A maior compra de camisetas foi em junho, de 698 camisetas.
b) Sim; 140 camisetas, pois 290 − 150 = 140.
c) 432 + 322 + 150 + 290 + 345 + 698 + 189 + 105 + 277 = 2 808; ou seja, 2 808 camisetas.
d) 2 808 : 9 = 312; ou seja, 312 camisetas.
e) Março, abril, julho, agosto e setembro.
f) 432 − 312 = 120; ou seja, 120 camisetas.
g)

Número de camisetas compradas por uma loja

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

5. Exemplo de resposta: Nos meses de maio e junho, a empresa registrou prejuízo nas vendas; nos demais meses, registrou lucro.

6. **a)** $10\% \cdot x =$ R\$ 120,00 $\Rightarrow x =$ R\$ 1.200,00
b) $100\% - (35\% + 10\% + 8\% + 19\%) = 100\% - 72\% = 28\%$
c) $35\% \cdot$ R\$ 1.200,00 = R\$ 420,00

7. a) Tiveram nota 3: $\frac{16}{100} \cdot 250 = \frac{4\,000}{100} = 40$; ou seja, 40 estudantes.

b) A nota média dos estudantes nessa questão foi:

$$\frac{1 \cdot 20 + 2 \cdot 32 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 10 + 0 \cdot 10}{100} = \frac{20 + 64 + 48 + 48 + 50 + 0}{100} = \frac{230}{100} = 2{,}3$$

Portanto, a nota média nessa questão é 2,3.

8. A resposta depende do time escolhido.

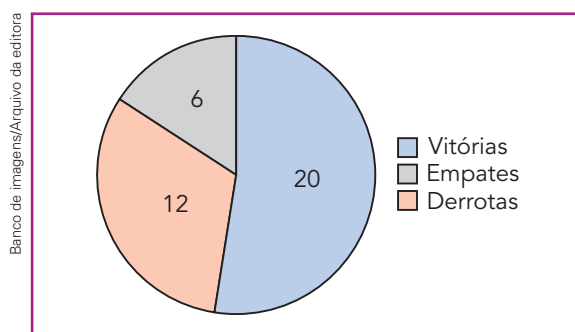
Exemplo de resposta: O time escolhido foi o Palmeiras. Os dados do Campeonato Brasileiro de Futebol masculino de 2021 do Palmeiras estão na tabela a seguir:

***Performance* do Palmeiras no Campeonato Brasileiro de Futebol Masculino de 2021**

Total de jogos	Número de vitórias	Número de empates	Número de derrotas
38	20	6	12

Fonte dos dados: CAMPEONATO Brasileiro 2021 – Série A – Classificação. *Folha de S.Paulo*, [*s. l.*], [*s. d.*]. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/esporte/campeonato-brasileiro/2021/serie-a/tabela.shtml. Acesso em: 23 jun. 2022.

O gráfico escolhido para representar os dados relativos ao time escolhido é o de setores:

***Performance* do Palmeiras no Campeonato Brasileiro de Futebol Masculino de 2021**

Fonte dos dados: CAMPEONATO Brasileiro 2021 – Série A – Classificação. *Folha de S.Paulo*, [*s. l.*], [*s. d.*]. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/esporte/campeonato-brasileiro/2021/serie-a/tabela.shtml. Acesso em: 23 jun. 2022.

9. a) 126 km/h − 72 km/h = 54 km/h

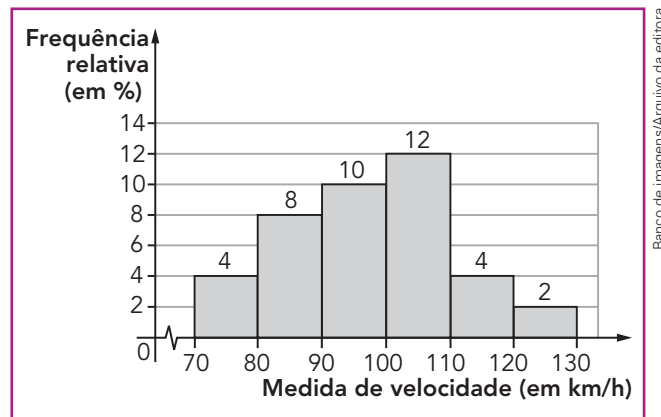
b)

Dados coletados pelo radar na rodovia

Medida de velocidade (em km/h)	Frequência	Frequência relativa (em %)
70 ⊢ 80	4	10
80 ⊢ 90	8	20
90 ⊢ 100	10	25
100 ⊢ 110	12	30
110 ⊢ 120	4	10
120 ⊢ 130	2	5

Dados elaborados para fins didáticos.

c)

Dados coletados pelo radar na rodovia

Dados elaborados para fins didáticos.

10. A resposta com os dados das tabelas depende do resultado da pesquisa realizada pelo estudante, porém, ele deve ser capaz de perceber que:

a) As medidas da altura teriam que ser organizadas em uma tabela de frequência por classes.

b) Os dados relativos à numeração de calçados poderiam ser apresentados em um gráfico de barras, e os relativos às medidas da altura, em um histograma.

11. Resposta pessoal que depende do tema escolhido e dos resultados obtidos.

Exemplo de resposta: Supondo que o tema escolhido foi "Medida de tempo para chegar da residência à escola", e os resultados da pesquisa foram os que estão tabela a seguir:

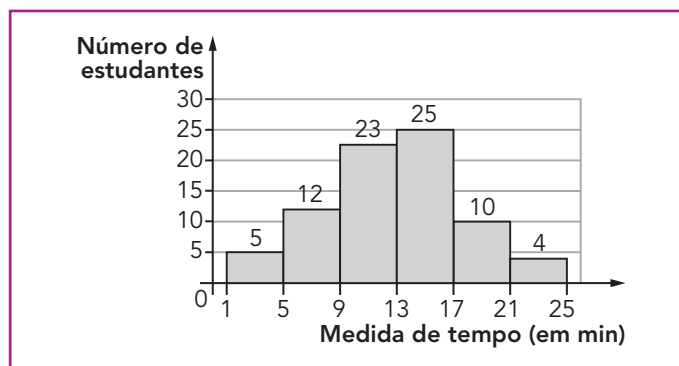
Medida de tempo para chegar da residência à escola

Medida de tempo (em minutos)	Número de estudantes
1 ⊢ 5	5
5 ⊢ 9	12
9 ⊢ 13	23
13 ⊢ 17	25
17 ⊢ 21	10
21 ⊢ 25	4

Dados elaborados para fins didáticos.

O histograma que representa esses dados é:

Medida de tempo para chegar da residência à escola

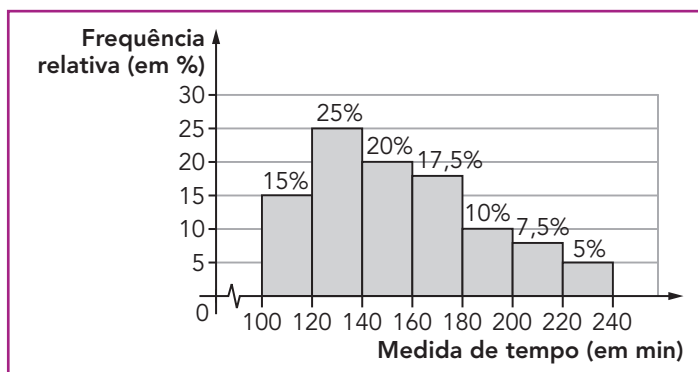
Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Para enriquecer a pesquisa, pode ser acrescentado um gráfico de setores para representar o meio de transporte utilizado para ir à escola.

12. $\frac{12}{80} \cdot 100\% = 12 \cdot \frac{100}{80}\% = 12 \cdot \frac{5}{4}\% = 15\%$

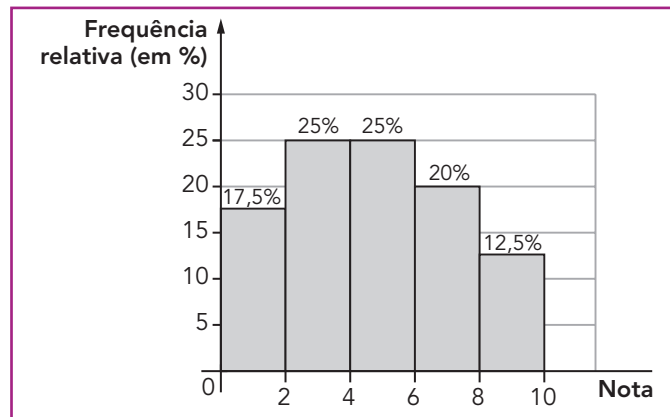
$20 \cdot \frac{5}{4}\% = 25\%$; $16 \cdot \frac{5}{4}\% = 20\%$; $14 \cdot \frac{5}{4}\% = 17{,}5\%$; $8 \cdot \frac{5}{4}\% = 10\%$; $6 \cdot \frac{5}{4}\% = 7{,}5\%$; $4 \cdot \frac{5}{4}\% = 5\%$.

Medida de tempo de cada candidato

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

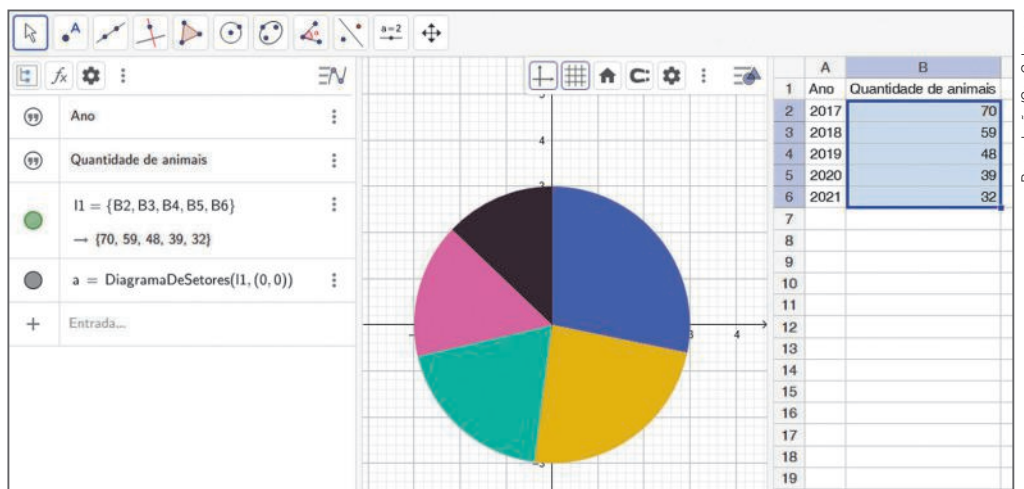
13. $\frac{14}{80} \cdot 100\% = 14 \cdot \frac{100}{80}\% = 14 \cdot \frac{5}{4}\% = 17{,}5\%$

$20 \cdot \frac{5}{4}\% = 25\%$; $16 \cdot \frac{5}{4}\% = 20\%$; $10 \cdot \frac{5}{4}\% = 12{,}5\%$.

Nota dos candidatos

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Matemática e tecnologias

Construindo o gráfico de setores no GeoGebra, conforme as instruções, temos:

Reprodução/GeoGebra.org

Captura de tela do GeoGebra.

Capítulo 19

Atividades

1. Ele pode formar $4 \cdot 6 = 24$; ou seja, 24 modos.
2. **a)** São 5 algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7, 9.
   b) 5 possiblidades.
   c) 5 possiblidades.
   d) 5 possiblidades.
   e) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; são 125 possiblidades.
3. centena dezena unidade

   5 · 4 · 3 = 60; são 60 números.
4. **a)** $4 \cdot 3 = 12$; são 12 possiblidades.
   b) $4 \cdot 4 = 16$; são 16 possiblidades.
5. **a)** Possibilidades:
   1ª 2ª
   ↓ ↓
   2 2
   $2 \cdot 2 = 4$; são 4 sequências.
   b) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; são 8 sequências.
   c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$; são 16 sequências.
6. São 3 opções de lanche, 3 opções de fritas (pequena, média e nenhuma) e 3 opções de suco. Há, portanto, 27 modos de compor o pedido, pois $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.
7. **a)** São 15 rapazes no 8º A, 18 no 8º B e 42 moças adicionando o 8º A e o 8º B. Logo, há 11 340 modos de compor a comissão, pois $15 \cdot 18 \cdot 42 = 11\,340$.
   b) São 22 moças no 8º A, 20 no 8º B e 33 rapazes adicionando o 8º A e o 8º B. Logo, há 14 520 modos de compor a comissão, pois $22 \cdot 20 \cdot 33 = 14\,520$.

8. Exemplo de resposta: Uma prova contém 10 testes, cada um com 4 alternativas, das quais apenas uma é correta. De quantos modos distintos é possível preencher o gabarito? Resposta: 1 048 576 modos distintos, pois $4^{10} = 1\,048\,576$.

9. Exemplo de resposta: Para acessar um *site* de compras, o usuário deve colocar seu *e-mail* e criar uma senha com 4 caracteres, sendo o primeiro uma vogal maiúscula e os demais algarismos de 0 a 9. Quantas senhas distintas são possíveis criar? Resposta: 5 000 senhas distintas.

10. As respostas dependem dos dados da turma.

11. As respostas dependem dos dados da turma.

12. As respostas dependem dos dados da turma.

13. As respostas dependem dos dados da turma.

14. As respostas dependem dos dados da turma.

15. a) Resultados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5, ..., 100. Ou seja, são 100.

- Resultados desejados: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 e 99. São 9.

  A probabilidade de sair múltiplo de 11 é: $\frac{9}{100} = 0{,}09$.

- Resultados desejados: os que não são múltiplos de 11. São $100 - 9 = 91$.

  A probabilidade de sair número que não é múltiplo de 11 é: $\frac{91}{100} = 0{,}91$.

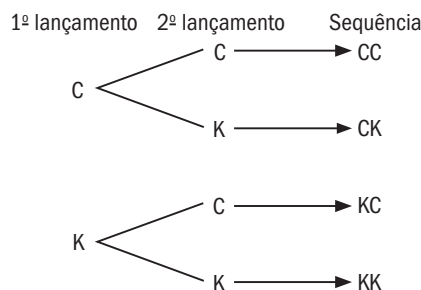
b) $\frac{9}{100} + \frac{91}{100} = \frac{9 + 91}{100} = \frac{100}{100} = 1$

Participe (p. 261)

I. Representando cara por C e coroa por K, temos:

1º lançamento | 2º lançamento | Sequência

C → C → CC
C → K → CK
K → C → KC
K → K → KK

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) 0

b) 1

c) 1

d) 2

e) 0, 1 e 2.

f) $\{0, 1, 2\}$

g) $P(0) = \frac{1}{4}$; $P(1) = \frac{2}{4}$; $P(2) = \frac{1}{4}$.

h) $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$

i) A soma das probabilidades de todos os resultados possíveis desse experimento aleatório é igual a 1.

j) 100%

II. a) 2 (o número 5 e o número 10).

b) $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

c) $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

d) 1

16. a) São 6 resultados possíveis: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$

d) Resultados desejados: 1, 3, 5 pontos; $d = 3$ (6 resultados equiprováveis possíveis). A probabilidade é: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

17. a) Resultados possíveis: números 1 a 10; $n = 10$.
Resultados desejados: 2, 3, 5, 7; $d = 4$.
A probabilidade é: $\frac{4}{10} = 0{,}4$.

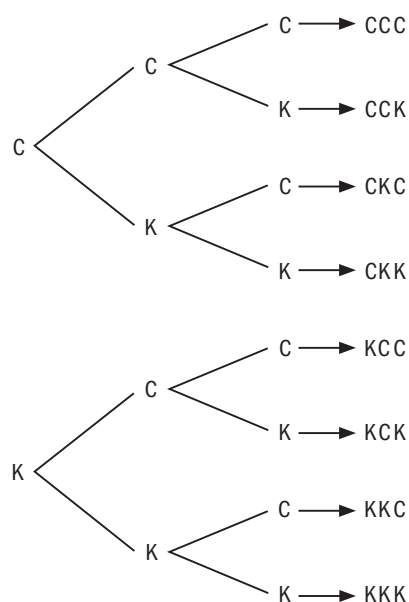
b) A probabilidade é: $\frac{6}{10} = 0{,}6$.

18. a) Resultados possíveis: os 7 dias da semana; $n = 7$.
Resultado desejado: domingo; $d = 1$.
A probabilidade é: $\frac{1}{7}$.

b) Resultados desejados: quarta-feira, quinta-feira; $d = 2$.
A probabilidade é: $\frac{2}{7}$.

19. a) Representando cara por C e coroa por K, temos:

C → C → C → CCC
C → C → K → CCK
C → K → C → CKC
C → K → K → CKK
K → C → C → KCC
K → C → K → KCK
K → K → C → KKC
K → K → K → KKK

Banco de imagens/Arquivo da editora

{CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK}
São 8 sequências possíveis ($n = 8$).

b) Resultados desejados: CCC, KKK; $d = 2$.
A probabilidade é: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

20. a) As sequências possíveis são: (1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); ...; (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6).
Possibilidades:

1ª ↓ 6
2ª ↓ 6

São $6 \cdot 6 = 36$, ou seja, 36 sequências possíveis ($n = 36$).

b) Resultados desejados: sequências de soma 4 são (1, 3); (2, 2) e (3, 1); $d = 3$.
A probabilidade é: $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

21. Total de lâmpadas: $n = 400$.
Lâmpada não defeituosa: $400 - 6 = 394$.
Probabilidade de lâmpada não defeituosa:
$\frac{394}{400} = \frac{197}{200} = \frac{98{,}5}{100} = 98{,}5\%$.

Outro modo:
Lâmpada defeituosa: 6.
Probabilidade de lâmpadas defeituosas:
$\frac{6}{400} = \frac{3}{200} = \frac{1,5}{100} = 1,5\%$.

A probabilidade de lâmpadas não defeituosas é: 100% − 1,5% = = 98,5%.

Na mídia

1. Na faixa de 25 a 29 anos.
2. Na faixa de 55 a 59 anos.
3. De 0 a 4 anos, mais homens. Na população idosa, mais mulheres.
4. Em 1940, no grupo jovem. Em 2060, no grupo idoso.
5. Resposta pessoal.

Na História

1. **a)** De cada 100 pessoas, 36 morriam antes de completar 6 anos de idade.
   b) De 0 a 6 anos morriam 36% e, de 0 a 16 anos, morriam 60%. Portanto, em 1 000 bebês, morriam 360 até 6 anos e 600 até 16 anos.
   c)

Sobrevivência humana por faixas de idade

Idade (em anos)	Porcentual de óbitos em relação à faixa anterior
0	
6	36%
16	37,5%
26	37,5%
36	36%
46	37,5%
56	40%
66	50%
76	67%

Fonte dos dados: GRAUNT, John. *Observações naturais e políticas feitas com base nos Boletins de mortalidade.* Londres, 1662.

   d) De 100 bebês, sobrevivia 1 até 76 anos. Portanto, 1%.
2. Possivelmente às condições de trabalho dos homens, que envolviam mais riscos, e à violência, particularmente das guerras.

Na Unidade

1. $\frac{8 \cdot 13 + 16 \cdot 14 + 12 \cdot 15 + 3 \cdot 16 + 1 \cdot 17}{8 + 16 + 12 + 3 + 1} =$
$= \frac{104 + 224 + 180 + 48 + 17}{40} = \frac{573}{40} = 14\frac{13}{40}$
$\frac{13}{40} \cdot 12 = \frac{39}{10} = 3,9$
Portanto, 14 anos e 4 meses; alternativa **a**.
2. Ordenando as idades, a mediana é o termo central. São 40 termos, então a idade mediana é:
$\frac{20^{\text{o}} \text{ termo} + 21^{\text{o}} \text{ termo}}{2} = \frac{14 + 14}{2} = \frac{28}{2} = 14$
Logo, alternativa **b**.
3. A idade modal é 14 anos. São 16 estudantes com 14 anos. Como há 40 estudantes na classe: $\frac{16}{40} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\%$. Logo, alternativa **c**.
4. Ordenamos os números de erros: 0, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6 (são 8 termos).
A mediana é o termo central, então:
$\frac{4^{\text{o}} \text{ termo} + 5^{\text{o}} \text{ termo}}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$
Logo, alternativa **b**.
5. Da cidade 1 a cidade 2 há 5 caminhos possíveis e, para cada um deles, da cidade 2 a cidade 3 há 4 caminhos possíveis, então: $5 \cdot 4 = 20$.
Logo, alternativa **c**.
6. Resultados possíveis: senhas de 1 a 100; $n = 100$.
Resultados desejados: senhas de 1 a 20; $d = 20$.
Probabilidade: $\frac{20}{100}$.
Logo, alternativa **c**.
7. Resultados possíveis: 12 tonalidades.
Resultados desejados: 3 cintilantes.
Probabilidade: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 25\%$.
Logo, alternativa **b**.
8. As possibilidades para totalizar 400 reais com cédulas de 50 e de 20 reais são:

Cédulas do saque no caixa eletrônico

Cédula de 50 reais	8	6	4	2	0
Cédula de 20 reais	0	5	10	15	20
Total de cédulas	8	11	14	17	20

Dados elaborados para fins didáticos.

São 5 possibilidades e, em 2 delas, o número de cédulas é ímpar. A probabilidade é $\frac{2}{5}$. Logo, alternativa **b**.
9. Total de estudantes: 280 + 320 = 600
Fração correspondente aos estudantes da manhã: $\frac{280}{600} = \frac{7}{15}$
O número de estudantes da manhã na amostra é 14, pois $\frac{7}{15}$ de 16 é igual a 14.
O número de estudantes da tarde na amostra é 16, pois 30 − 14 = 16.
Portanto, a amostra deve ter 14 estudantes do período da manhã e 16 do período da tarde.

MATEMÁTICA E REALIDADE

8º ANO

Gelson IEZZI
Osvaldo DOLCE
Antonio MACHADO

Componente curricular: Matemática
Ensino Fundamental – Anos Finais

Gelson Iezzi

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)

Engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP)

Atuou como professor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

Atuou como professor do Ensino Médio na rede particular de ensino

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

Osvaldo Dolce

Engenheiro civil pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP)

Atuou como professor dos Anos Finais do Ensino Fundamental na rede pública de ensino e de cursos pré-vestibulares na rede particular de ensino

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

Antonio Machado

Mestre em Estatística pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)

Licenciado em Matemática pelo IME-USP

Atuou como professor do Ensino Superior no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)

Atuou como professor do Ensino Médio na rede particular de ensino

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

10ª edição, São Paulo, 2022

Editora Saraiva

Editora Saraiva

Direção executiva: Flávia Bravin
Direção de negócio: Volnei Korzenieski
Gestão editorial: Alice Ribeiro Silvestre
Gestão de planejamento: Eduardo Kruel Rodrigues
Gestão de projeto digital: Tatiany Renó
Gestão de área: Rodrigo Pessota
Coordenação de área: Pamela Hellebrekers Seravalli
Edição: Igor Nóbrega, Valéria Elvira Prete, Daniela Benites e Gabriela Barbosa da Silva (editores), Tainara Figueiredo Dias e Marcio Vieira de Almeida (assist.), Rogério Fernandes Cantelli e Nadili L. Ribeiro (digital)
Planejamento e controle de produção: Vilma Rossi, Camila Cunha, Adriana Souza e Isabela Salustriano
Revisão: Mariana Braga de Milani (ger.), Alexandra Costa da Fonseca, Ana Paula C. Malfa, Carlos Eduardo Sigrist, Flavia S. Venezio e Sueli Bossi
Arte: Claudio Faustino (ger.), Erika Tiemi Yamauchi (coord.), Patricia Mayumi Ishihara (edição de arte), Setup (diagramação)
Iconografia e tratamento de imagens: Roberto Silva (ger.), Claudia Balista e Alessandra Pereira (pesquisa iconográfica), Emerson de Lima (tratamento de imagens)
Direitos autorais: Fernanda Carvalho (coord.), Emília Yamada, Erika Ramires e Carolyne Ribeiro (analistas adm.)
Licenciamento de conteúdos de terceiros: Erika Ramires e Tempo Composto Ltda.
Ilustrações: Alberto De Stefano, Artur Fujita, Hélio Senatore, Ilustra Cartoon, Luigi Rocco, Marcelo Gagliano e Tiago Donizete Leme
Cartografia: Mouses Sagiorato
Design: Luis Vassallo (proj. gráfico, capa e Manual do Professor)
Foto de capa: Souvik Bhattacharya/Moment/Getty Images
Pré-impressão: Alessandro de Oliveira Queiroz, Pamela Pardini Nicastro, Débora Fernandes de Menezes, Fernanda de Oliveira e Valmir da Silva Santos

Alameda Santos, 960, 4º andar, setor 3
Cerqueira César – São Paulo – SP – CEP 01418-002
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
saceditorasaraiva@somoseducacao.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Iezzi, Gelson
Matemática e realidade : 8º ano / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado. -- 10. ed. -- São Paulo : Saraiva Educação S.A., 2022.
(Matemática e realidade)

Bibliografia
Suplementado pelo manual do professor
ISBN 978-65-5766-251-9 (aluno)
ISBN 978-65-5766-252-6 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental - Anos finais) I. Título II. Dolce, Osvaldo III. Machado, Antonio

22-2418 CDD 372.7

Angélica Ilacqua - CRB-8/7057

2022
Código da obra CL 820854
CAE 802097 (AL) / 802098 (PR)
10ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Impressão e acabamento

APRESENTAÇÃO

Esta coleção de Matemática foi elaborada pensando em você, estudante!

Na introdução de muitos conteúdos, apresentamos situações-problema ligadas às realidades que você vivencia. Procuramos promover sua participação constante e ativa na construção dos conhecimentos. Nos boxes ***Participe***, por exemplo, incentivamos que você e os colegas reflitam e exponham conhecimentos prévios à introdução de um novo tema.

Em vários momentos do livro, nos boxes ***Na olimpíada***, são reproduzidas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), com o objetivo de colocá-lo diante de situações que o levem a pensar e desenvolver soluções de modo leve e espontâneo.

Na seção de leitura ***Na mídia***, em que é reproduzido um texto de jornal, revista ou *site* relacionado à Matemática, procuramos mostrar que a aplicação dos conhecimentos matemáticos é indispensável para ter acesso aos meios de informação e comunicação, bem como para ter uma visão crítica dos temas.

Os conhecimentos de finanças são necessários para garantir qualidade de vida desde agora até a vida adulta. Na seção ***Educação financeira***, você encontra atividades individuais e coletivas para refletir sobre o consumo consciente e que podem torná-lo apto a contribuir para o planejamento financeiro de sua família.

Em todos os volumes desta coleção, também está presente a seção ***Matemática e tecnologias***, que explora o uso de *softwares* e aplicativos de Matemática para resolver e modelar problemas.

E, para mostrar que a Matemática é uma descoberta de diferentes pessoas, épocas e civilizações, na seção ***Na História*** expomos a história de descobertas matemáticas ligadas aos temas em estudo.

Esperamos que esta coleção o auxilie no entendimento de números, letras, figuras e diversas representações que compõem o universo matemático e a vida em sociedade.

Bons estudos!

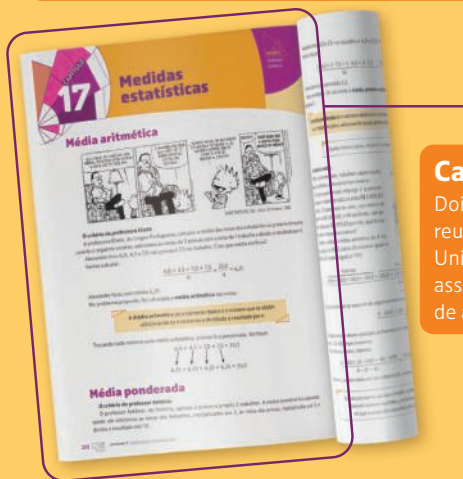
Os autores

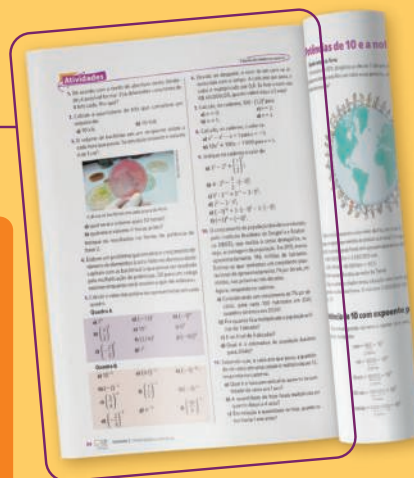
Conheça seu livro

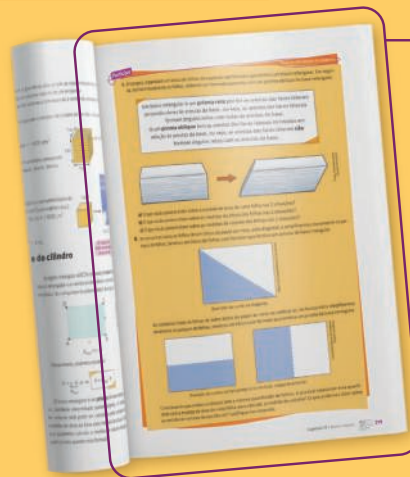
Abertura de Unidade

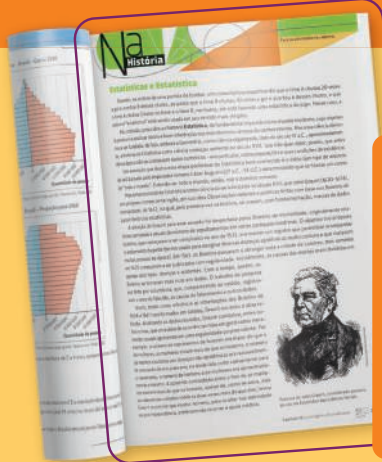
Organizada em uma dupla de páginas, a abertura traz uma ou mais imagens e textos relacionados a temas contemporâneos e interdisciplinares que vão despertar sua curiosidade. A relação entre o tema da abertura e os conteúdos matemáticos da Unidade é feita por meio de atividades contextualizadas na própria abertura e em outros momentos ao longo dos capítulos correspondentes.

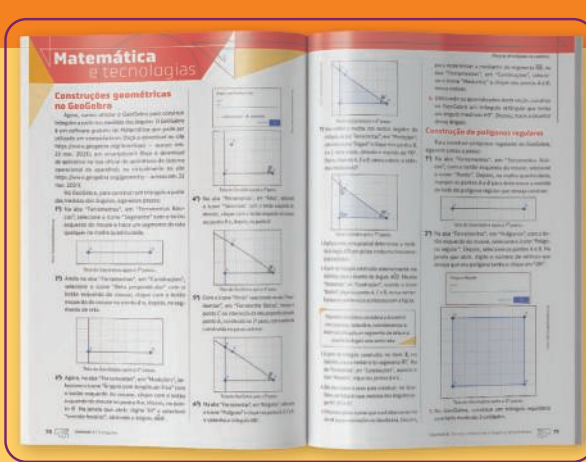
Capítulo

Dois ou mais capítulos estão reunidos em uma mesma Unidade e divididos em assuntos seguidos por blocos de atividades.

Atividades

As atividades, além de variadas, são apresentadas em gradação de dificuldade e permitirão que você aplique os conteúdos estudados. Ao longo desta seção, você encontrará atividades mais desafiadoras, bem como de resolução e elaboração de problemas.

Na olimpíada

Esta seção traz questões de provas oficiais da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), que farão você analisar, pensar e relacionar conteúdos diversos.

Participe

Por meio das questões desta seção, você será incentivado a levantar hipóteses e resolver problemas utilizando estratégias pessoais e trabalhando individualmente ou em dupla.

Na História

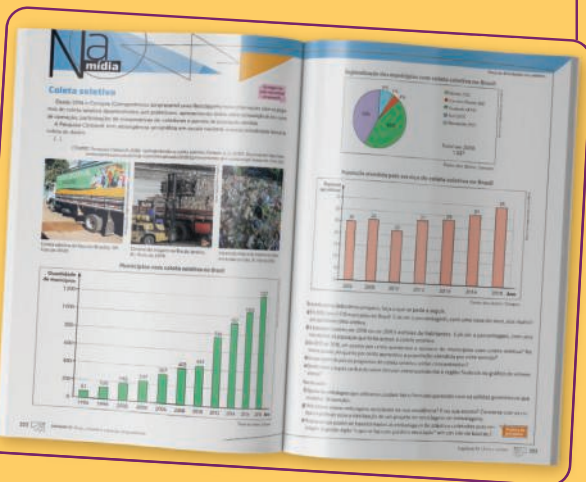
Esta seção aborda temáticas da História da Matemática. Por meio dela, você terá contato com relatos históricos, questionamentos científicos e práticas de pesquisa relacionados a assuntos ligados ao conteúdo.

Matemática e tecnologias

Nesta seção, você terá a oportunidade de utilizar ferramentas tecnológicas, como *softwares* livres e aplicativos de Matemática, para modelar e resolver problemas.

Na mídia

Por meio de textos de jornais, revistas ou *sites* você poderá observar a realidade com visão crítica, utilizando a Matemática para comparar dados e interpretar textos, tabelas e gráficos divulgados pela mídia.

Educação financeira

Refletir sobre atitudes relacionadas à Educação financeira deve fazer parte de nossa rotina. Consumo excessivo e economia são alguns dos contextos abordados nesta seção, que poderá auxiliar você em sua organização financeira familiar.

Na Unidade

Nesta seção, são apresentadas atividades de revisão dos conteúdos abordados ao longo da Unidade, o que permitirá a você fazer uma autoavaliação das aprendizagens. Nela, também constam questões de avaliações oficiais.

ÍCONES

Convém usar a calculadora quando encontrar este ícone.

Indica o uso de régua, compasso, esquadro, entre outros instrumentos.

Prática de pesquisa — Indica momentos de trabalho com práticas de pesquisa relacionadas à História da Matemática e a fatos da realidade por meio de atividades individuais ou coletivas.

Indicam sugestões de leitura de livros e textos, acesso a *sites* e jogos, além de visitações guiadas e outras indicações para aprimorar seus estudos.

Sumário

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da Unidade mobiliza com maior ênfase a **CG01** e a **CEMAT01** ao propor a análise de uma construção africana em que é possível identificar formas fractais, reconhecendo a Matemática como uma ciência humana, fruto das necessidades de diferentes culturas. Favorece, assim, o desenvolvimento do TCT *Diversidade Cultural*.

A abertura desta Unidade tem por objetivo envolver os estudantes no tema escolhido: vista aérea de várias aldeias na cidade de Agadèz, Níger, cujos formatos têm padrão fractal, colaborando para a abordagem do TCT *Diversidade Cultural*.

Os fractais obedecem a certas regras, com uma dimensão fracionária. Uma delas é a propriedade de autossimilaridade, ou seja, apresenta a mesma (ou aproximada) forma em qualquer escala que seja observado. Podemos encontrar os fractais na natureza (árvores, rios, montanhas, nuvens), na Medicina (estrutura do pulmão e no sistema cardiovascular), na Arte (pinturas e músicas), na Computação Gráfica (animações digitais), na Economia (mercado financeiro), entre outros.

Nesta abertura, apresentamos fractais presentes na cultura africana, os quais seguem padrões conscientes. Nesses padrões, na maioria das vezes, ocorre uma hierarquia, de modo que, em cada interação do algoritmo, é possível verificar as relações e mitos dessa cultura.

A noção de escala social é um ótimo tema para desenvolver uma boa prática de pesquisa. Embora o texto se refira ao Níger, pelas características da composição da nossa nação, consideramos que esse texto promove positivamente a imagem dos afrodescendentes e de sua cultura.

Explique à turma que as formas fractais são amplamente utilizadas pelos povos africanos. Comente que, na República dos Camarões, nas montanhas Mandra, vivem diversas etnias que se chamam a si mesmas de “Kirdi”. Elas utilizam o *design* fractal “Mokoulek”, com pequenos silos circulares e celeiros circulares maiores em espiral dentro de três grandes recintos de pedra, que fazem outra espiral a partir de um ponto central, que é a parte quadrada. Também são encontrados em tecidos, esculturas, máscaras e ícones (fonte dos dados: SANTOS, Jefferson. A Matemática no Continente Africano: os Fractais. *Matemática é Fácil*, [*s. l.*], [ca. 2022]. Disponível em: https://www.matematicaefacil.com.br/2016/07/matematica-continente-africano-fractais.html. Acesso em: 26 maio 2022).

1 UNIDADE

Números

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- retomar e aprofundar o estudo dos números naturais, números inteiros e números racionais;
- utilizar métodos para obter uma fração geratriz para uma dízima periódica;
- resolver e elaborar problemas utilizando cálculo de porcentagens.

CAPÍTULOS

Vista aérea da cidade de Agadèz, em Níger, mostrando os padrões fractais na arquitetura. Foto de 1972.

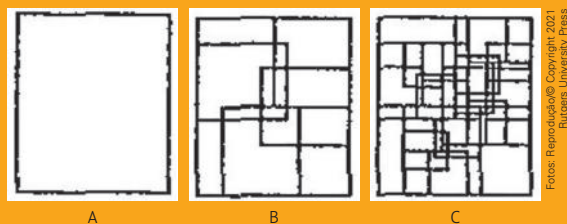
Proposta para o professor

Segue a sugestão de um vídeo do professor estadunidense Ron Eglash, que trabalha com etnomatemática, no qual ele relata sua experiência como visitante em vilas africanas.
RON Eglash sobre os Fractais Africanos. [*s. l.*: *s. n.*], 2007. 1 vídeo (16 min). Publicado pelo canal TED. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=7n36qV4Lk94. Acesso em: 25 maio 2022.

Fractais na arquitetura africana

A palavra **fractal** tem origem no latim *fractus*, que significa "fração, quebrado". Formas fractais têm partes que são semelhantes ao todo e podem ser encontradas na natureza, em obras artísticas ou arquitetônicas, e têm tudo a ver com Matemática.

Os fractais estão presentes na arquitetura africana, de modo que muitas vilas têm padrões geométricos. A arquitetura do povo kotoko, na República dos Camarões, utiliza retângulos fractais em suas construções de maneira consciente, para evidenciar a hierarquia existente na cultura. A escala social é mapeada por meio da escala geométrica.

A B C

Fotos: Reprodução/© Copyright 2021 Rutgers University Press

As imagens não estão representadas em proporção.

Reprodução/Museu do Homem, Paris, França.

Reprodução/© Copyright 2021 Rutgers University Press

D E

A construção de uma aldeia é feita com uma base retangular que representa o palácio real (A), construindo retângulos cujas dimensões são uma fração de lados do retângulo inicial (B). Em seguida, sobre os 4 retângulos construídos, 16 outros são formados, e a proporção nas medidas é mantida. O resultado é uma "grade" composta dos lados de 20 retângulos (C), sobre a qual se pode sobrepor a planta do palácio real (D). Da entrada do palácio à sala do trono, o visitante percorre uma espiral retangular (E), chamada "caminho de luz", cujos lados diminuem regularmente após cada giro de 90 graus.

Jacques Jangoux/Acervo do fotógrafo

A autossimilaridade existente nos fractais reforça outro fator muito valorizado na cultura africana: a ancestralidade e a herança das tradições, elementos que reforçam a identidade da cultura, mesmo em meio a diversas imposições que os povos já tiveram que enfrentar historicamente.

Fontes dos dados: SANTOS, Jefferson. A MATEMÁTICA no continente africano: os fractais. *Matemática É Fácil*, [*s. l.*], *c.* 2022. Disponível em: https://www.matematicaefacil.com.br/2016/07/matematica-continente-africano-fractais.html; FRACTAIS na arquitetura africana. *UFJF*, Juiz de Fora, 8 maio 2021. Disponível em: https://www2.ufjf.br/fractalize/2021/05/08/fractais-na-arquitetura-africana-2/; SILVA, Vanisio Luiz da. *Africanidade, matemática e resistência*. 2014. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-09122014-114244/publico/VANISIO_LUIZ_DA_SILVA.pdf. Acesso em: 18 jan. 2022.

Você conhece algum elemento da natureza, obra artística ou arquitetônica de construção fractal? Compartilhe com os colegas e, se achar necessário, faça uma pesquisa sobre o assunto. **Prática de pesquisa**
Resposta pessoal.

Orientações didáticas

Abertura

Se considerar oportuno, proponha a realização de um trabalho interdisciplinar com a área de **Ciências Humanas**. Faça uma reflexão sobre o legado cultural dos povos africanos e apresente outras características desses povos. É possível, por exemplo, solicitar que os estudantes façam uma pesquisa sobre alguns países africanos, como o Níger ou a República dos Camarões, as línguas faladas nos países e outros aspectos que julgar relevantes.

Proposta para o professor

No vídeo indicado a seguir, o matemático maliense Saddo Ag Almouloud traz suas reflexões sobre a origem africana da Matemática e como essa ciência pode colaborar para o desenvolvimento do continente. Mostra, ainda, o trabalho de Saddo como educador no Brasil e discute problemas, possibilidades e desafios enfrentados no século XXI.
MATEMÁTICA e o desenvolvimento africano. [*s. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (1 h). Publicado pelo canal Latitudes Africanas. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=GFIZUR2mA3U. Acesso em: 25 maio 2022.

Orientações didáticas

Números

Reforçamos que, nas orientações da BNCC, não é abordado o termo "conjuntos numéricos", porém, nesse momento, optamos por tratar dos números naturais, inteiros e racionais utilizando o conceito de conjunto, pois consideramos importante que o estudante consiga compreender que existe uma relação de inclusão entre eles, uma vez que, até o momento, os estudantes compreenderam separadamente o que são os números naturais, os números inteiros e os números racionais. Nessa etapa, é possível ampliar esses conceitos, buscando interligá-los verificando a inclusão de um conjunto no outro e ampliando a noção numérica dos estudantes.

Números naturais

O objetivo deste tópico é relembrar aos estudantes que os números surgiram da necessidade de contar e, então, apresentar o conjunto dos números naturais.

CAPÍTULO 1

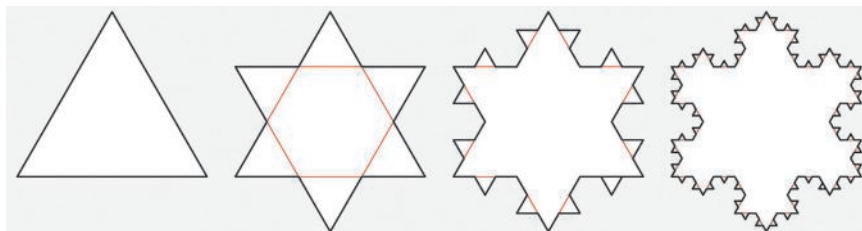
Números naturais, inteiros e racionais

NA BNCC
EF08MA05
EF08MA11

Números

Fractal "floco de neve"

Um fractal muito conhecido é a **curva de Koch** (ou "floco de neve" devido ao formato após o segundo passo). Ela é construída a partir de um triângulo equilátero. A cada passo da sua construção, cada segmento de reta é dividido em 3 partes com mesmo comprimento; o segmento de reta médio obtido é substituído por 2 segmentos de reta de mesmo comprimento, formando com ele um triângulo equilátero. Em cada passo, então, 1 segmento de reta é transformado em 4 outros segmentos de reta com medidas de comprimento iguais, e a medida de perímetro de toda a figura sempre aumenta.

Alejo Miranda/Shutterstock

Partida. Passo 1. Passo 2. Passo 3.

No mundo real, vamos nos deparar com limitações que nos impedem de continuar o desenho da curva de Koch, mas qual seria a medida de perímetro de um fractal como esse?

Considerando que o lado do triângulo original mede 1 u.c. (unidade de comprimento), qual é a medida de perímetro da figura do passo 3, obtida após 3 repetições do procedimento de construção?

A cada passo, o número de segmentos de reta fica multiplicado por 4. Então, ao finalizar o passo 3, o número de segmentos de reta é $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$, portanto, 192.

A cada passo, o comprimento de cada segmento de reta fica dividido por 3, ou multiplicado por $\frac{1}{3}$. Então, ao finalizar o passo 3, o comprimento de cada segmento de reta obtido é $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$, logo, $\frac{1}{27}$.

Assim, a medida de perímetro do polígono obtido ao finalizar o passo 3 é: $192 \cdot \frac{1}{27} = \frac{64}{9} = 7,111...$

A fração $\frac{64}{9}$ é a **geratriz da dízima periódica** 7,111...

Nesse texto, encontramos números inteiros e números racionais. Vamos rever alguns números e, em seguida, obter a fração geratriz de uma dízima periódica.

Números naturais

Os primeiros números surgiram da necessidade de contar.

Os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... são chamados **números naturais.**

1. b) Porque 15 é a representação no sistema de numeração decimal e XV, no sistema de numeração romano.
4. a) São eles: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12,...; são chamados números pares.
5. a) É um número natural maior do que 1, divisível apenas por 1 e por ele mesmo.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. De acordo com os seus conhecimentos sobre números naturais, responda às perguntas a seguir:
a) 15 e XV representam quantidades diferentes? Não.
b) Por que essas representações são diferentes?

2. Sobre o número 478 194 235, responda:
a) Que algarismo ocupa a ordem das centenas de milhar? 1
b) Em que ordem está o algarismo 7? Dezena de milhão.
c) Esse número é múltiplo de 2, de 3 ou de 5? Justifique.

3. Sobre os números naturais de 1 a 1 000, responda:
a) Quantos têm o algarismo 5 na ordem das dezenas? 100 números.
b) Quantos têm o algarismo 5 na ordem das unidades? 100 números.

4. Leia e responda:
a) Quais são e como são chamados os números naturais múltiplos de 2?
b) Quais são os dez primeiros números naturais ímpares? 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

5. Responda:
a) O que é um número natural primo?
b) Quais são os dez primeiros números naturais primos? 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

6. Sobre o número 2 020, responda:
a) Sem considerar a ordem dos fatores, de quantos modos podemos obter o resultado 2 020 multiplicando dois números naturais? 6 modos.
b) E multiplicando três números naturais? 10 modos.

7. Considerando que dois números naturais são equivalentes, se a soma dos divisores de um deles coincide com a soma dos divisores do outro, responda:
a) Os números 6 e 9 são equivalentes? Não.
b) Os números 16 e 25 são equivalentes? Sim.
c) Existe algum número natural equivalente a 10? Qual? Sim, o número 17.

8. O que são dois números primos entre si? Dê um exemplo. Números cujo mdc é igual a 1, como os números 4 e 9.

9. Sabemos que um número natural é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3. Isso ocorre porque 2 e 3 são números primos entre si e $6 = 2 \cdot 3$.
a) Como podemos saber se um número natural é divisível por 12 sem efetuar a divisão?
b) E por 15? Se o número for divisível por 3 e por 5, será divisível por 15.
c) Dos números de 2 015 até 2 030, quais são divisíveis por 12? E por 15? Por 12: 2016 e 2028; por 15: 2025.

10. Quantos são os múltiplos de 4 que têm apenas dois algarismos? 22 números.

11. Considerando a sequência de polígonos que formam a curva de Koch, na ordem dada, desde o da partida, forme as seguintes sequências:
a) do número de lados de cada polígono; (3, 12, 48, 192, ...)
b) da medida dos lados de cada polígono;
c) da medida de perímetro de cada polígono.

12. Na sequência de Fibonacci, os dois primeiros números são 1 e 1. A partir daí, cada número é igual à soma dos dois imediatamente anteriores:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)

Qual é o primeiro número dessa sequência que se escreve com três algarismos? 144

A sequência de Fibonacci é atribuída ao matemático italiano Leonardo Fibonacci (1170-1250).

9. a) Exemplo de resposta: Se o número for divisível por 3 e por 4, será divisível por 12.

11. b) $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$ 11. c) $\left(3, 4, \frac{16}{3}, \frac{64}{9}, \ldots\right)$

Números inteiros

A subtração de dois números naturais nem sempre resulta em um número natural. Apenas com o conhecimento dos números negativos foi possível subtrair um número de outro menor do que ele. Por exemplo:

- $5 - 1 = 4$
- $5 - 2 = 3$
- $5 - 3 = 2$
- $5 - 4 = 1$
- $5 - 5 = 0$
- $5 - 6 = -1$
- $5 - 7 = -2$
- $5 - 8 = -3$
- $5 - 9 = -4$
- $5 - 10 = -5$

2. c) É múltiplo de 5, pois na divisão por 5 o resultado é 0. Não é múltiplo de 2 porque não é par, nem de 3 porque a soma dos algarismos é 43, e 43 não é múltiplo de 3.

Orientações didáticas

Atividades

O bloco de atividades explora o trabalho com números naturais, das quais destacamos algumas.

A atividade **1** tem por finalidade relembrar os estudantes das representações numéricas nos sistemas de numeração decimal e romano, estabelecendo relação entre esses sistemas, pois, apesar de as maneiras de representação serem diferentes, eles podem representar quantidades iguais.

Na atividade **3**, uma das estratégias para identificar os números com o algarismo 5 nas ordens das dezenas e das unidades é separar os números naturais por intervalos e identificar a quantidade de algarismos.

A atividade **5** tem por objetivo retomar o conceito de número primo.

Na atividade **7**, no item **a**, como a soma dos divisores de 6 resulta em 12 e a soma dos divisores de 9 resulta em 15, esses números naturais não são equivalentes. No item **b**, espera-se que os estudantes percebam que a soma dos divisores de cada um desses números resulta em 31, o que faz com que eles sejam equivalentes. No item **c**, espera-se que os estudantes identifiquem que a soma dos divisores do número 10 resulta em 18 e que o número primo 17 tem a soma de seus divisores resultando em 18 também.

Na atividade **8**, aproveite para relembrar que o máximo divisor comum (mdc) corresponde ao **produto dos divisores comuns** entre dois ou mais números naturais e para demonstrar o procedimento matemático que realizamos para obtê-lo.

Na atividade **12**, como o elemento seguinte a cada número é originado pela soma de seus 2 antecessores, a sequência se dá da seguinte maneira: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, **144**, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, 4 181...

Logo, o primeiro número com 3 algarismos é o 144.

Números inteiros

Nesse momento, o conceito de número inteiro será abordado, inserindo a ideia de que o conjunto dos números inteiros é formado pelo conjunto dos números naturais e seus opostos aditivos. Para isso, pode-se recorrer a um contexto com situações em que utilizamos números negativos, como painéis de elevadores que indicam andares no subsolo.

Proposta para o estudante

Oriente os estudantes a realizar uma pesquisa relacionada à história da Matemática, buscando responder, por exemplo: “Para qual finalidade Leonardo Fibonacci criou essa sequência? Ela tem alguma aplicação prática atualmente?”.

Orientações didáticas

Atividades

Esse conjunto de atividades tem como finalidade fixar o aprendizado e avaliar a compreensão dos estudantes acerca do conjunto dos números inteiros.

A atividade **13** busca aprofundar a ideia de números opostos aditivos para definir os números inteiros e evidenciar que esse conjunto é a ampliação dos números naturais com seus opostos negativos.

Na atividade **14**, é abordado o conceito de módulo, sendo pertinente ampliar o horizonte compreensivo dos estudantes com uma breve explicação sobre esse conteúdo, definindo-o da seguinte maneira: "Chamamos a distância de um ponto da reta numérica à origem (distância do ponto até o zero) de **módulo** ou **valor absoluto**". Então, pode-se desenhar uma reta numérica na lousa e mostrar aos estudantes a medida da distância entre um número até o zero e a medida da distância do oposto negativo desse número até o zero, indicando que, como essa medida é a mesma, o módulo (valor absoluto, distância da origem) de um número sempre é positivo.

Na olimpíada

Nesta coleção são apresentadas algumas atividades da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep). Em geral, as atividades propostas neste boxe são desafiadoras e, ao mesmo tempo, acessíveis, uma vez que possibilitam aos estudantes ampliar as estratégias de resolução e reforçam a noção de que a Matemática é uma ciência cujo instrumento de desenvolvimento da autonomia é a investigação de soluções.

Com essas atividades, objetiva-se que os estudantes explorem os conceitos estudados em situações diferenciadas daquelas que lhes deram origem.

Comente com eles que a Obmep é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa), com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e promovido com recursos do Ministério da Educação (MEC) e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações (MCTI).

Na atividade, como os divisores do número 2014 são 1, 2, 19, 38, 53, 106, 1007 e 2014, existem somente 4 possibilidades de se fazer aparecer 2014 na calculadora como uma multiplicação de 2 números naturais.

Dentre as 4 possibilidades, em só uma delas 6 teclas são pressionadas; concluímos, então, que as 6 teclas que Ana Maria apertou foram 3, 8, ×, 5, 3 e =. Portanto, o maior algarismo cuja tecla ela apertou foi 8.

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

Os números ..., −6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... são chamados **números inteiros**.

DedMityay/Shutterstock

No painel de elevadores, é comum os andares abaixo do subsolo serem indicados por números negativos.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

13. Lembrando que −1 é o oposto de 1, responda:

a) Qual é a soma de dois números opostos? 0

b) Qual é o oposto de 3? −3

c) Qual é o oposto de −4? 4

d) Qual é o oposto de 0? 0

14. Indica-se o valor absoluto de um número qualquer *n* por $|n|$ (lê-se: "módulo de *n*" ou "valor absoluto de *n*"). Determine o valor de:

a) $|8|$ 8

b) $|-8|$ 8

c) $|-15|$ 15

d) $|15|$ 15

e) $|0|$ 0

f) $|-(-1)|$ 1

g) $2 \cdot |-5| - |3|$ 7

h) $|-6| + |2 - (9 - 3) + 1|$ 9

15. Analise a sucessão numérica a seguir e responda às perguntas, explicando como você pensou:

$$(1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10, 11, \ldots)$$

Explicações pessoais.

a) Qual é o quinquagésimo número dessa sequência? −50

b) Qual é a soma dos dois primeiros números? E a dos dois seguintes? −1, −1.

c) Qual é a soma dos 50 primeiros números? −25

d) Qual é o vigésimo quinto número dessa sequência? 25

e) Qual é a soma dos 25 primeiros números? 13

f) Qual é o sinal do produto dos 25 primeiros números? Positivo.

g) Qual é o sinal do produto dos 50 primeiros números? Negativo.

Na olimpíada

O problema da calculadora

(Obmep) Ana Maria apertou as teclas de sua calculadora e o resultado 2014 apareceu no visor. Em seguida, ela limpou o visor e fez aparecer novamente 2014 com uma multiplicação de dois números naturais, mas, desta vez, apertando seis teclas em vez de sete. Nesta segunda multiplicação, qual foi o maior algarismo cuja tecla ela apertou? Alternativa **d**.

1 9 × 1 0 6 =

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 9

Números racionais

Quando dividimos um número inteiro *p* por outro número inteiro não nulo, *q*, o quociente $\frac{p}{q}$ pode ser inteiro ou não.

Os números que podem ser representados na forma $\frac{p}{q}$, sendo *p* e *q* inteiros e $q \neq 0$, são chamados **números racionais**.

Números racionais

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA05**, ao permitir o reconhecimento e a utilização de procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica; e **EF08MA11**, ao propor a identificação de regularidade em sequências numéricas que podem ser representadas por fórmulas recursivas. O tópico "Resolver equações" mobiliza com maior ênfase a **CG01** e a **CEMAT01**, ao relatar conhecimentos construídos em determinado momento histórico.

Nesse momento, é abordado o conceito de número racional por meio de sua definição e alguns exemplos.

Acompanhe alguns exemplos de números racionais:

- $\frac{3}{10}$
- $0 = \frac{0}{1}$
- $\frac{13}{25}$
- $1 = \frac{1}{1}$
- $-5 = \frac{-5}{1}$
- $-\frac{8}{5} = \frac{-8}{5}$

Transformar fração em decimal

Um número racional também pode ser representado na **forma decimal**.

Para transformar um número racional da **forma fracionária** para a **forma decimal**, basta dividir o numerador pelo denominador.

Considere estes exemplos:

- $\frac{3}{10} = 0{,}3$
- $-\frac{15}{8} = -1{,}875$
- $\frac{84}{7} = 12$
- $-\frac{71}{100} = -0{,}71$
- $\frac{7}{3} = 2{,}333...$
- $\frac{4}{5} = 0{,}8$
- $-\frac{11}{9} = -1{,}222...$
- $-\frac{24}{6} = -4$

Quando transformamos uma fração em um número decimal, podemos obter:

I. um **decimal exato** – quociente da divisão com resto zero. Por exemplo:

- $\frac{3}{10} = 0{,}3$
- $-\frac{71}{100} = -0{,}71$
- $\frac{84}{7} = 12$
- $-\frac{15}{8} = -1{,}875$

II. uma **dízima periódica** – quociente da divisão com resto diferente de zero apresentando na parte decimal algarismos que se repetem periodicamente (um ou mais algarismos formam um **período** que se repete, o qual denotamos com um traço acima dele) sem fim. Por exemplo:

- $\frac{7}{3} = 2{,}333... = 2{,}\overline{3}$ (período 3)
- $\frac{56}{11} = 5{,}090909... = 5{,}\overline{09}$ (período 09)
- $\frac{11}{9} = 1{,}222... = 1{,}\overline{2}$ (período 2)
- $\frac{25}{6} = 4{,}1666... = 4{,}1\overline{6}$ (período 6)

Geratriz da dízima é uma fração que origina uma dízima periódica. Por exemplo:

- $\frac{7}{3} = 2{,}333...$

  A fração $\frac{7}{3}$ é a geratriz da dízima 2,333... ou $2{,}\overline{3}$.

- $-\frac{11}{9} = -1{,}222... = -1{,}\overline{2}$

  A fração $-\frac{11}{9}$ é a geratriz da dízima $-1{,}\overline{2}$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

16. Escreva os números na forma decimal.

a) $\frac{29}{10}$ 2,9

b) $\frac{2874}{100}$ 28,74

c) $\frac{37}{1000}$ 0,037

d) $\frac{8}{5}$ 1,6

e) $\frac{17}{2}$ 8,5

f) $-\frac{41}{25}$ −1,64

g) $\frac{5}{3}$ 1,666...

h) $-\frac{7}{6}$ −1,1666...

i) $\frac{3}{8}$ 0,375

j) $\frac{8}{3}$ 2,666...

k) $-\frac{9}{20}$ −0,45

l) $-\frac{20}{9}$ −2,2222...

Orientações didáticas

Transformar fração em decimal

Comente com os estudantes que, como os números racionais são aqueles que resultam da divisão de 2 números inteiros (divisor diferente de zero), eles podem ser escritos na forma de fração ou na forma de número decimal. Por isso, esse momento se propõe a demonstrar que toda fração pode ser escrita na forma decimal, bastando realizar a divisão entre numerador e denominador.

A continuação da abordagem visa a compreensão a respeito de frações que geram números decimais exatos, ou seja, aqueles em que a divisão da fração apresenta resto zero, e dízimas periódicas, que são aquelas em que a divisão da fração apresenta resto diferente de zero.

Atividades

Os itens da atividade **16** têm por objetivo avaliar a compreensão sobre a transformação de frações em números decimais.

Proposta para o estudante

Jogo: Qual é o número?
Objetivo: Identificar números naturais, inteiros e racionais.
Número de estudantes: Toda a turma.
Material: Fichas contendo dicas sobre números naturais, inteiros e racionais.
Desenvolvimento: O professor deve sortear uma ficha e ler a dica para os estudantes, que deverão tentar adivinhar qual é o número e identificar a qual conjunto ele pertence: dos números naturais, dos inteiros ou dos racionais. Quem acertar primeiro marca 1 ponto. O jogo continua até que o professor apresente as dicas de todas as fichas. O vencedor do jogo será o estudante que conseguir interpretar o maior número de dicas, isto é, acumular mais pontos.
Exemplos de situações do jogo:
Dica: Sou o oposto de 54. Resposta: O número é −54 e pertence ao conjunto dos inteiros.
Dica: Sou um quarto mais três quartos. Resposta: O número é 1 e pertence ao conjunto dos naturais.
Dica: Sou a divisão de 1 por 2. Resposta: O número é 0,5 e pertence ao conjunto dos racionais.

Orientações didáticas

Decimal exato ou dízima periódica?

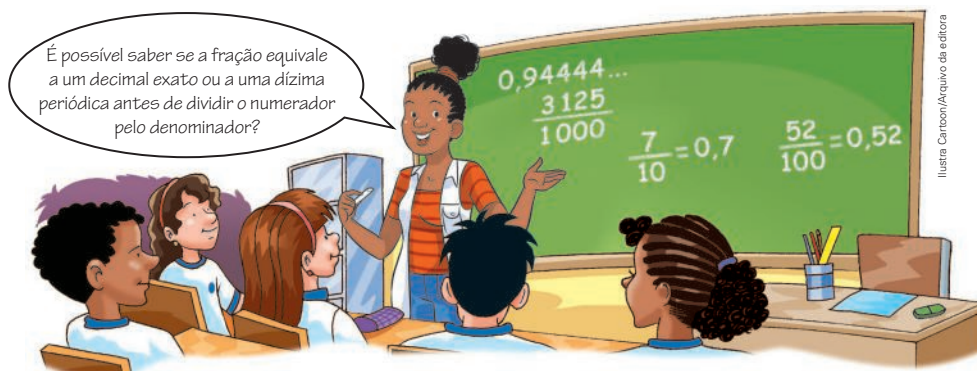
O contexto apresentado tem por objetivo incentivar a curiosidade dos estudantes para, sem a necessidade de se realizar a divisão, identificar se uma fração representa um número decimal exato ou uma dízima periódica. Para isso, são feitas algumas demonstrações seguindo algoritmos relacionados à decomposição do denominador.

Se achar conveniente, retome com os estudantes o conceito de decomposição em números primos. Esse conhecimento é imprescindível para o procedimento proposto nessa etapa do aprendizado.

Antes de iniciar as atividades, verifique se os estudantes compreenderam a diferença entre decimal exato e dízima periódica, bem como os procedimentos de identificação em cada caso.

Antes de responder à pergunta do contexto apresentado, escreva várias frações, realize a divisão do numerador pelo denominador e solicite que os estudantes falem sobre regularidades que notam, ou seja, estimule o pensamento lógico-matemático indutivo dos estudantes; depois, sistematize com as explicações que vêm em seguida no livro, validando ou não as conjecturas construídas por eles.

Decimal exato ou dízima periódica?

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Frações de denominador 10, 100, 1000, etc. equivalem a decimais exatos. Por exemplo:

- $\frac{3}{10} = 0{,}3$
- $\frac{22}{100} = 0{,}22$
- $\frac{35}{1000} = 0{,}035$

Todo número decimal exato equivale a uma fração em que o numerador é um número inteiro e o denominador é uma potência de 10 que depende de quantas forem as casas decimais desse número. Por exemplo:

- $\underbrace{0{,}21}_{\text{2 casas decimais}} = \frac{21}{\underbrace{100}_{\text{2 zeros}}}$
- $\underbrace{1{,}729}_{\text{3 casas decimais}} = \frac{1\,729}{\underbrace{1000}_{\text{3 zeros}}}$
- $-\underbrace{6{,}045}_{\text{3 casas decimais}} = \frac{-6\,045}{\underbrace{1000}_{\text{3 zeros}}}$

Os denominadores 10, 100, 1000 são potências de 10. Acompanhe suas decomposições: elas apresentam como fatores primos apenas 2 e 5.

- $10 = 2 \cdot 5$
- $100 = 10^2 = (2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2$
- $1000 = 10^3 = (2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$

Decompondo o denominador, podemos saber se uma fração equivale a um número decimal exato ou a uma dízima periódica sem efetuar a divisão do numerador pelo denominador.

Quando a fração é irredutível (numerador e denominador primos entre si) com denominador maior do que 1, decompomos o denominador em fatores primos. Acompanhe dois casos:

1º caso – fração equivalente a um decimal exato

Nos exemplos a seguir, determinamos uma fração, equivalente à fração dada, cujo denominador é uma potência de 10.

- A fração $\frac{13}{25}$ tem denominador 25, e 25 equivale a 5^2; só tem o fator primo 5.

  Temos: $\frac{13}{25} = \frac{13 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{52}{100} = 0{,}52$. A fração $\frac{13}{25}$ equivale a um decimal exato.

- A fração $\frac{617}{500}$ tem denominador 500, e $500 = 2^2 \cdot 5^3$; só tem os fatores primos: 2 e 5.

  Temos: $\frac{617}{500} = \frac{617 \cdot 2}{500 \cdot 2} = \frac{1234}{1000} = 1{,}234$. A fração $\frac{617}{500}$ equivale a um decimal exato.

> Se os fatores primos do denominador forem apenas 2 ou 5, a fração equivale a outra com denominador 10, 100, 1000, etc. e, portanto, equivale a um **decimal exato**.

2º caso – fração equivalente a uma dízima periódica

Analise o exemplo a seguir.

A fração $\frac{17}{180}$ é irredutível e tem denominador 180. Como 180 equivale a $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, o denominador tem o fator primo 3, diferente de 2 e de 5. Então, a fração $\frac{17}{180}$ equivale a uma dízima periódica.

Temos: $\frac{17}{180} = 0{,}094444...$

Existe algum número inteiro *n* tal que o produto $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot n$ seja uma potência de 10? A resposta é não, porque em $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot n$ há o fator primo 3, e em toda potência de 10 só há os fatores primos 2 e 5.

Se o denominador de uma fração irredutível contiver fatores primos diferentes de 2 e de 5, ela não terá uma fração equivalente cujo denominador é uma potência de 10. Então, a fração equivale a uma **dízima periódica** e não é um decimal exato.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

17. Escreva na forma de fração, simplificando-a quando possível.

a) 0,57 $\frac{57}{100}$ **b)** 1,28 $\frac{32}{25}$ **c)** 3,125 $\frac{25}{8}$ **d)** $-31{,}25$ $-\frac{125}{4}$

18. Sem efetuar a divisão, responda: Quais das seguintes frações equivalem a um decimal exato?

a) $\frac{7}{20}$ Alternativas **a**, **c** e **d**. **b)** $\frac{17}{15}$ **c)** $-\frac{37}{100}$ **d)** $-\frac{102}{5}$

19. Com as frações a seguir, construa no caderno um quadro com duas colunas, DE e DP. Na coluna DE, escreva as frações que podem ser convertidas em decimais exatos; na coluna DP, escreva as frações que geram dízimas periódicas.

$\frac{11}{10}$ DE $-\frac{37}{75}$ DP $-\frac{11}{20}$ DE $\frac{207}{100}$ DE $\frac{42}{14}$ DE $\frac{13}{3}$ DP $\frac{15}{7}$ DP $\frac{21}{6}$ DE $\frac{32}{27}$ DP $-\frac{15}{3}$ DE

20. Responda:

a) Qual é a decomposição do número 320 em fatores primos? $2^6 \cdot 5$

b) A fração $\frac{321}{320}$ equivale a um decimal exato ou a uma dízima periódica? Por quê? Decimal exato, porque o denominador só tem os fatores primos 2 e 5.

21. A seguir há 12 números.

0,5 -111 3,6 58 -4 $\frac{5}{3}$

$-1{,}33$ 0 0,001 $-\frac{1}{9}$ -17 1

a) Quantos deles são números naturais? Quais? Três: 0, 58 e 1.

b) Quantos deles são números inteiros? Quais? Seis: -111, 0, 58, -4, -17 e 1.

c) Quantos deles são números racionais? Quais? Todos.

d) Qual deles tem o maior valor absoluto? -111

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **17** tem por objetivo desenvolver a habilidade dos estudantes de mudar a representação de um número racional na forma decimal para a forma de fração irredutível.

A atividade **18** visa identificar, por meio da decomposição do denominador, quais frações correspondem a números decimais exatos.

A atividade **19** tem por objetivos identificar, diferenciar e separar as frações que correspondem a números decimais exatos das frações que correspondem a dízimas periódicas.

A atividade **20** tem por objetivo avaliar se os estudantes têm a habilidade para, de maneira autônoma, fazer a decomposição em fatores primos para identificar se a fração equivale a um número decimal exato ou a uma dízima periódica.

A atividade **21** tem por finalidade avaliar a compreensão sobre os conjuntos numéricos abordados até o momento.

Orientações didáticas

Resolver equações

O contexto abordado neste tópico, por meio de um dos problemas do papiro de Ahmes, visa retomar e fixar as habilidades relacionadas ao conteúdo básico do cálculo com equações do 1º grau e operações com números decimais, a fim de preparar os estudantes para o próximo passo, que diz respeito a obter uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Este tópico mobiliza com maior ênfase a **CG01** e a **CEMAT01**, ao relatar conhecimentos construídos em determinado momento histórico.

Resolver equações

Por volta do século V ou VI, circulava na Grécia uma obra usualmente descrita como a *Antologia grega*, cujos conteúdos matemáticos lembram fortemente os problemas do Papiro de Ahmes, de mais de dois milênios antes. Esses problemas teriam sido reunidos em milhares de epigramas por Metrodorus, um gramático, que deve ter usado várias fontes.

Eis um dos problemas dessa obra: "Quantas maçãs há numa coleção, se devem ser distribuídas entre seis pessoas de modo que a primeira receba um terço das maçãs, a segunda receba um quarto, a terceira pessoa receba um quinto, a quarta receba um oitavo, a quinta receba dez maçãs, e reste uma maçã para a última pessoa?".

(Fonte dos dados: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edusp, 1974. p. 140.)

Quando queremos calcular um número desconhecido (denominado incógnita), podemos representá-lo por uma letra, elaborar uma equação que corresponda ao problema proposto e resolvê-la.

No problema anterior, sendo x a quantidade de maçãs da coleção, temos:

$$x = \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{8} + 10 + 1$$

Recorde que, para resolver uma equação, podemos aplicar dois tipos de operações elementares:

- Adicionar um mesmo número aos dois membros da equação.
- Multiplicar por um mesmo número diferente de zero ambos os membros da equação.

Por exemplo, acompanhe estas resoluções:

- $2x + 1 = 15 - 7x$

  $2x + 1 + 7x = 15 - 7x + 7x$

  $9x + 1 = 15$

  $9x + 1 - 1 = 15 - 1$

  $9x = 14$

  $\frac{1}{9} \cdot 9x = \frac{1}{9} \cdot 14$

  $x = \frac{14}{9}$

- $\frac{3x}{2} = \frac{2x}{3} + 15$

  $6 \cdot \frac{3x}{2} = 6 \cdot \frac{2x}{3} + 6 \cdot 15$

  $9x = 4x + 90$

  $9x - 4x = 4x - 4x + 90$

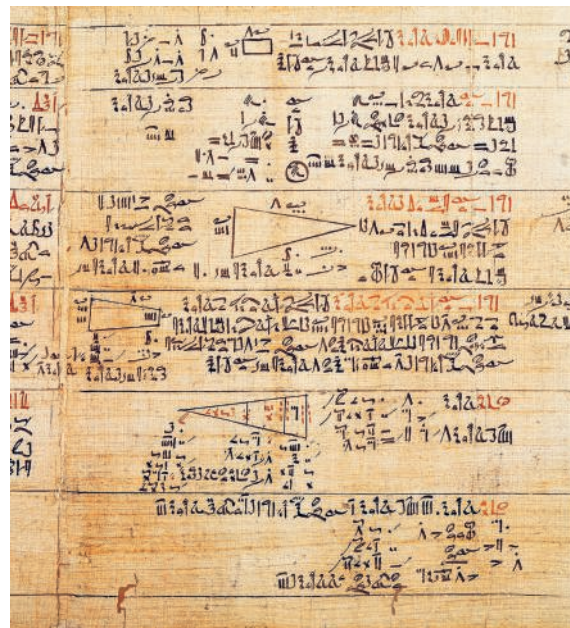
  $9x - 4x = 90$

  $5x = 90$

  $\frac{1}{5} \cdot 5x = \frac{1}{5} \cdot 90$

  $x = \frac{90}{5}$

  $x = 18$

DEA PICTURE LIBRARY/Album/Fotoarena

O Papiro de Ahmes ou Papiro Rhind (datado por volta de 1650 a.C.) é um documento egípcio que apresenta a solução de 85 problemas matemáticos.

Agora, resolva a equação do problema da *Antologia grega* e descubra quantas maçãs havia na coleção.

120 maçãs.

Calcular a fração geratriz

Leia o problema a seguir.

Eu sei que $0,4 = \frac{4}{10}$; $0,44 = \frac{44}{100}$; $0,444 = \frac{444}{1\,000}$, etc. Mas como transformar a dízima 0,444... em fração?

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

A dízima periódica 0,444... tem período 4. Para determinar a sua **fração geratriz**, vamos representar a dízima periódica por x:

$$x = 0,444\ldots \quad (1)$$

Como o período, 4, só tem um algarismo, multiplicamos ambos os membros da equação (1) por 10, para que a vírgula do número se desloque uma casa decimal para a direita:

$$10x = 4,444\ldots \quad (2)$$

Subtraímos, membro a membro, a equação (1) da equação (2):

$$\begin{array}{rrl} & 10x = 4,444\ldots & (2) \\ - & x = 0,444\ldots & (1) \\ \hline & 10x - x = 4,444\ldots - 0,444\ldots & (3) \end{array}$$

Resolvendo a equação (3), obtemos x:

$$9x = 4$$
$$x = \frac{4}{9}$$

Concluímos que $0,444\ldots = \frac{4}{9}$. Ou seja, $\frac{4}{9}$ é a fração geratriz de 0,444...

Para conferir se está certo, é só dividir 4 por 9. O resultado é 0,444...

Atividades

Faça as atividades no caderno.

22. Escreva no caderno o período dos números decimais periódicos a seguir.

a) 0,342342342... 342

b) 27,577777... 7

c) 1036,898989... 89

23. Determine a fração geratriz da dízima 0,6666... $\frac{2}{3}$

24. Escreva 3,222... na forma de fração. $\frac{29}{9}$

Orientações didáticas

Calcular a fração geratriz

Este tópico tem por objetivo demonstrar os passos necessários para obter a fração geratriz para uma dízima periódica. Esse processo mobiliza um dos pilares do pensamento computacional, o algoritmo, uma vez que são seguidas instruções, um passo a passo, para se obter o resultado final.

Nesse momento, os estudantes devem dominar o conteúdo básico de equações do 1º grau e operações com números decimais, a fim de que consigam resolver a situação-problema apresentada.

Atividades

A atividade **22** tem por objetivo identificar os períodos das dízimas periódicas. Se necessário, reitere que o período de uma dízima periódica é formado pelos algarismos que se repetem nela.

As atividades **23** e **24** se apoiam no passo a passo abordado até o momento para representar uma dízima periódica por meio de uma fração geratriz.

Orientações didáticas

Dízima com período de dois algarismos ou mais

Este tópico tem por objetivo aplicar os passos necessários para obter a fração geratriz para uma dízima periódica com períodos de 2 algarismos ou mais. Nesse momento, é demonstrado passo a passo o procedimento para esse cálculo. Esse processo mobiliza um dos pilares do pensamento computacional, o algoritmo, uma vez que são seguidas instruções, um passo a passo, para se obter o resultado final.

Atividades

Para realizar a atividade **25**, os estudantes terão de identificar o período de cada dízima periódica e obter a fração geratriz usando o procedimento abordado na teoria.

Separando a parte não periódica de uma dízima

A abordagem deste tópico visa desenvolver a compressão dos estudantes acerca das dízimas periódicas compostas e demonstrar um passo a passo para calcular a fração geratriz para cada dízima composta. Esse processo mobiliza um dos pilares do pensamento computacional, o algoritmo, uma vez que são seguidas instruções, um passo a passo, para se obter o resultado final.

Uma dízima periódica composta tem parte inteira (que vem antes da vírgula), parte não periódica e período (que vêm depois da vírgula). O que diferencia uma dízima periódica simples de uma composta é que, na simples, só há o período depois da vírgula; na composta, existe uma parte que não se repete depois da vírgula.

Dízima com período de dois algarismos ou mais

Vamos obter a fração geratriz da dízima 5,121212...

Primeiro, representamos a dízima periódica por x:

$$x = 5{,}121212\ldots \quad (1)$$

O período é 12 e, como tem dois algarismos, multiplicamos, então, ambos os membros de (1) por 100, de modo que a vírgula do número se desloque duas casas decimais para a direita e 12 fique à esquerda da vírgula:

$$100x = 512{,}1212\ldots \quad (2)$$

Subtraímos, membro a membro, a equação (1) da equação (2):

$$\begin{array}{rrl} & 100x = 512{,}1212\ldots & (2) \\ - & x = 5{,}1212\ldots & (1) \\ \hline & 99x = 507 & (3) \end{array}$$

$$x = \frac{507}{99} = \frac{169}{33}$$

Concluímos que $5{,}1212\ldots = \frac{169}{33}$. (Pode conferir!)

Atividades

Faça as atividades no caderno.

25. Determine a fração geratriz de:

a) 5,474747... $\frac{542}{99}$

b) 0,312312312... $\frac{104}{333}$

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Separando a parte não periódica de uma dízima

Vamos escrever 1,27888888... na forma fracionária.

Fazemos $x = 1{,}27888888\ldots$ (1)

Nesse caso, o decimal apresenta uma parte não periódica:

1, 27 888888...

parte não periódica (27) — parte periódica (888888...)

O primeiro passo é transformar a parte não periódica em parte inteira, ou seja, devemos deslocar a vírgula duas casas para a direita.

Vamos, então, multiplicar ambos os membros de (1) por 100:

$$100x = 127{,}888888\ldots \quad (2)$$

Agora, à direita da vírgula existe apenas o período. Procedemos, então, como nos exemplos anteriores.

Multiplicamos (2), membro a membro, por 10:

$$1000x = 1278{,}88888\ldots \quad (3)$$

Daí, calculamos ③ − ②:

$$\begin{array}{r} 1000x = 1278{,}88888\ldots \\ -\quad 100x = 127{,}88888\ldots \\ \hline 900x = 1151 \end{array}$$

$$x = \frac{1\,151}{900}$$

Assim, concluímos que $1{,}2788888\ldots = \dfrac{1\,151}{900}$.

Agora, analise uma dízima negativa.

Para escrever, por exemplo, $-1{,}2788888\ldots$ na forma fracionária, começamos determinando a geratriz de $1{,}2788888\ldots$, que é $\dfrac{1\,151}{900}$.

Temos, então:

$$-1{,}2788888\ldots = -\frac{1\,151}{900}$$

E se a dízima for negativa?

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Atividades

Faça as atividades no caderno.

26. Obtenha as geratrizes das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,777... $\frac{7}{9}$

b) 3,888... $\frac{35}{9}$

c) 6,1777... $\frac{278}{45}$

d) 5,83333... $\frac{35}{6}$

e) 9,151515... $\frac{302}{33}$

f) −12,3454545... $-\frac{679}{55}$

27. Escreva no caderno uma fração equivalente a cada um dos seguintes decimais:

a) 0,7 $\frac{7}{10}$

b) 0,33 $\frac{33}{100}$

c) 1,333 $\frac{1333}{1000}$

d) 5,21 $\frac{521}{100}$

e) 2,333... $\frac{7}{3}$

f) 3,4 $\frac{17}{5}$

28. Escreva no caderno cada dízima na forma de fração, calcule e responda na forma decimal:

a) 2,83333... + 1,6666... $\frac{17}{6} + \frac{5}{3} = \frac{9}{2} = 4{,}5$

b) 2,83333... × 1,6666... $\frac{17}{6} \times \frac{5}{3} = \frac{85}{18} = 4{,}7222\ldots$

29. Considere os padrões de formação de cada sequência a seguir.

I. $\left(\frac{1}{100}, \frac{1}{50}, \frac{3}{100}, \frac{1}{25}, \frac{1}{20}, \frac{3}{50}, \ldots\right)$

II. (6, −12, 18, −24, 30, −36, 42, ...)

III. $\left(\frac{5}{12}, \frac{5}{6}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{25}{12}, \frac{5}{2}, \frac{35}{12}, \ldots\right)$

a) **I.** $\frac{7}{100}$; **II.** −48; **III.** $\frac{40}{12} = \frac{10}{3}$.

b) **I.** 10; **II.** −10; **III.** 10.

c) **I.** 0,55; **II.** −30; **III.** $\frac{275}{12}$.

d) **I.** 2,01; **II.** 6; **III.** $\frac{335}{4}$.

Responda às perguntas:

a) Qual é o próximo número de cada sequência?

b) Qual é a razão entre o décimo e o primeiro número de cada sequência?

c) Quanto é a soma dos dez primeiros números de cada sequência?

d) Quanto é a soma do centésimo com o centésimo primeiro número de cada sequência?

Orientações didáticas

Atividades

As atividades deste bloco têm por objetivo avaliar a compreensão dos estudantes sobre o conteúdo de dízimas periódicas e suas frações geratrizes, trabalhado neste capítulo. O momento é propício para auxiliar os estudantes e sanar as dúvidas que possam existir.

A atividade **26** tem por objetivo obter fração geratriz de dízimas periódicas simples e compostas.

A atividade **27** tem por objetivo obter a fração geratriz dos números decimais, sejam eles exatos ou dízimas periódicas.

A atividade **28** tem por objetivo aplicar os passos necessários para obter a fração geratriz de uma dízima periódica e, em seguida, simplificar cada fração até sua forma irredutível.

O item **a** da atividade **29** tem por objetivo identificar a regularidade de cada sequência numérica que pode ser representada por fórmula recursiva, o que permite indicar os números seguintes de cada uma delas. Como os estudantes já descobriram a regularidade de cada sequência no item anterior, no item **b** eles precisarão dar continuidade à tarefa para encontrar o décimo número em cada uma e determinar a razão pedida. Se necessário, lembre aos estudantes que a razão entre 2 números é dada pela sua divisão obedecendo à ordem na qual eles foram apresentados. Os itens **c** e **d** têm por objetivo ampliar os itens anteriores e fazer com que os estudantes utilizem os conhecimentos assimilados com o apoio do raciocínio lógico, a fim de realizar pressupostos acerca dos elementos das sequências.

Orientações didáticas

Taxa percentual

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA04**, da **CG02** e da **CEMAT05** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo o cálculo de porcentagens, com o apoio da calculadora.

Este capítulo tem como objetivo principal o desenvolvimento do cálculo de porcentagens, utilizado em diversas situações do cotidiano. A abordagem visa desenvolver a correspondência entre fração e porcentagem, representação e cálculos para valores de acréscimos e decréscimos percentuais, tópicos iniciais de Matemática financeira. Além disso, trabalha conteúdos que contribuem para a formação do raciocínio hipotético-dedutivo.

O estudo de Matemática desencadeia diversos tipos de noções que permitem a utilização de vários métodos e estratégias de ensino. Dentre eles, considera-se essencial a ligação entre o conhecimento de porcentagem e a resolução de problemas, já que esse conteúdo é utilizado frequentemente nas operações comerciais de compra e venda, nas negociações bancárias, na leitura e na interpretação de textos, nas taxas de impostos, etc. Assim, a noção de porcentagem deve ser trabalhada em sala de aula de maneira atrativa, prática e prazerosa para os estudantes. Podemos ressaltar, também, a importância da abordagem de problemas que envolvam os conhecimentos prévios dos estudantes, isto é, situações cotidianas e esquemas mentais de resolução já internalizados por eles.

O exemplo contextualizado "Café com leite" tem por finalidade chamar a atenção dos estudantes para o conteúdo proposto por meio da resolução de um problema cotidiano. Nesse momento, espera-se que os estudantes revisitem os conhecimentos já adquiridos em anos anteriores para responder às questões propostas, participando ativamente da aula. Comente com os estudantes que a resolução independe das medidas de capacidade da garrafa e da xícara.

CAPÍTULO 2

Porcentagens

NA BNCC
EF08MA04

Taxa percentual

Café com leite

Ao longo do dia, Fafinha toma 1 garrafa de café com leite preparado com 1 xícara de café e 3 xícaras de leite. Quantos por cento de café há na garrafa de café com leite de Fafinha?

Na garrafa há 4 xícaras de café com leite, sendo 1 xícara de café e 3 xícaras de leite. Então, a fração de café na garrafa de café com leite é $\frac{1}{4}$. Recorde como podemos transformar a fração em **taxa percentual**:

$$\frac{1}{4} = \frac{1^{\times 25}}{4_{\times 25}} = \frac{25}{100} = 25\% \text{ ou } \frac{1}{4} = 0{,}25 = \frac{25}{100} = 25\% \text{ ou } \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4} \times 100\right)\% = \left(\frac{100}{4}\right)\% = 25\%$$

Logo, na garrafa de café com leite da Fafinha, 25% é café.

I. Se, após tomar meio copo do café com leite, Fafinha encher novamente o copo com 2 xícaras de leite, qual será a porcentagem de café nesse novo copo cheio? Justifique sua resposta. 12,5%. Resposta pessoal.

II. Para preparar uma jarra de limonada, Cidinha adiciona, para cada limão espremido, 2 copos de água gelada. Desse modo, em 400 mililitros de limonada, 40 mililitros são de suco de limão e 360 mililitros são de água.

a) Qual é a fração que representa a quantidade de suco de limão na limonada? $\frac{1}{10}$

b) Qual é a porcentagem de suco de limão na limonada? 10%

c) Qual é a fração que representa a quantidade de água na limonada? $\frac{9}{10}$

d) Qual é a porcentagem de água na limonada? 90%

Fração e porcentagem

Recordemos que:

I. Uma fração centesimal $\frac{p}{100}$ é representada na forma de taxa percentual por $p\%$:

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Porcentagem é uma fração de um todo. Podemos formar ideia de uma porcentagem, $p\%$ de um todo, imaginando o todo dividido em 100 partes iguais e tomando p partes. Por exemplo:

- $1\% = \frac{1}{100}$; logo 1% de um todo é 1 centésimo do todo. Para calcular 1% de um todo, basta dividir o todo por 100.
- $6\% = \frac{6}{100}$; logo 6% de um todo são 6 centésimos do todo. Então, $6\% = 6 \times 1\%$.

Assim, 1% de R$ 135.520,00 é: R$ 135.520,00 : 100 = R$ 1.355,20.

E 6% são: 6 × R$ 1.355,20 = R$ 8.131,20.

Fração e porcentagem

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA04**, da **CG02** e da **CEMAT05** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo o cálculo de porcentagens com o apoio da calculadora. Os contextos de diversas atividades permitem trabalhar os TCTs *Educação Financeira*, *Educação Fiscal* e *Trabalho*.

A abordagem propõe retomar com os estudantes a noção de que porcentagem (ou percentagem) representa uma razão cujo denominador é igual a 100 e indica uma comparação da parte com o todo que a fração representa. A compreensão desse conceito é imprescindível para a demonstração realizada, assim como o domínio dos procedimentos necessários para se calcular a porcentagem de uma quantidade.

II. Toda fração $\frac{m}{n}$ pode ser escrita como taxa percentual multiplicando-a por 100 e colocando o símbolo %:

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{m}{n} \cdot 100\right)\%$$

Por exemplo: $\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4} \cdot 100\right)\% = \frac{300}{4}\% = 75\%$

A fração $\frac{m}{n}$ também representa a razão entre m e n.

Samuel Borges Photography/Shutterstock

Mulher dando uma explicação sobre frações e porcentagens.

III. Para calcular uma fração (ou uma porcentagem) de uma quantidade Q, também podemos multiplicar a fração (ou a taxa percentual) pela quantidade Q:

$$\left(\frac{m}{n} \text{ de } Q\right) = \frac{m}{n} \cdot Q \text{ e } (p\% \text{ de } Q) = \frac{p}{100} \cdot Q$$

Exemplos

- Em um painel de 49 peças, $\frac{4}{7}$ delas são brancas e as demais são pretas. Quantas são as peças brancas no painel?

$$\frac{4}{7} \cdot 49 = 4 \cdot 7 = 28$$

No painel há 28 peças brancas.

- Em uma prova contendo 25 testes, Enzo acertou 80% deles, enquanto Tobias acertou 64%. Quantos testes Enzo acertou a mais do que Tobias?

Enzo acertou: $(80\% \text{ de } 25) = \frac{80}{100} \cdot 25 = \frac{80}{4} = 20$

Tobias acertou: $(64\% \text{ de } 25) = \frac{64}{100} \cdot 25 = \frac{64}{4} = 16$

$20 - 16 = 4$

Logo, Enzo acertou 4 testes a mais do que Tobias.

Há outro modo de resolver essa questão. Como $80\% - 64\% = 16\%$, Enzo acertou 16% dos testes a mais do que Tobias:

$$(16\% \text{ de } 25) = \frac{16}{100} \cdot 25 = \frac{16}{4} = 4$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Associe cada item de **I** a **IV** ao seu valor equivalente de **a** a **d**:

I. 7% c

II. 20% a

III. $\frac{1}{8}$ d

IV. 1 b

a) $\frac{1}{5}$

b) 100%

c) $\frac{7}{100}$

d) 12,5%

2. A turma do 7º ano A da Escola Nova Indaiá é composta de 32 estudantes, entre eles Maya e Joaquim.

a) Qual é a porcentagem de estudantes presentes em um dia em que nenhum deles faltou? 100%

b) Quando apenas Maya e Joaquim faltaram, os estudantes presentes representavam que fração dos estudantes da turma? E que porcentagem? $\frac{15}{16}$; 93,75%

3. Um incêndio atingiu 24% da área de uma região de 35 000 quilômetros quadrados. Qual foi a medida de área devastada pelo incêndio? 8 400 km²

4. Um combustível vendido em posto de gasolina é uma mistura de gasolina e etanol. Em um 1 litro, ou seja, 1 000 mililitros, desse combustível, 200 mililitros são de etanol.

a) Qual é a porcentagem de etanol no combustível? 20%

b) Adicionando 200 mililitros de etanol a 3 litros do combustível, quantos por cento de etanol terá essa nova mistura? 25%

Orientações didáticas

Fração e porcentagem

Por meio das resoluções dos exemplos dados, busca-se a compreensão dos estudantes acerca dos procedimentos para se calcular o percentual de determinada quantidade.

Antes de apresentar o tópico **III**, proponha que os estudantes calculem 20% de 300 e comente que, considerando que 20% significa 20 em cada 100, e como 300 é $3 \cdot 100$, teríamos $3 \cdot 20$ igual a 60. Proponha outros exemplos com centenas exatas e, então, apresente a definição **III**. Desse modo, contribuirá para o desenvolvimento do pensamento lógico caracterizado como indução.

Atividades

Na atividade **1**, os estudantes terão de relacionar as colunas ligando cada número em forma percentual à sua fração correspondente. Como ampliação da atividade, pode-se pedir que os estudantes escrevam a representação de cada valor dado em forma de número decimal.

No item **a** da atividade **2**, espera-se que os estudantes tenham o entendimento de que, se não houve faltas, é intuitivamente lógico que todos estavam presentes, e o percentual que representa o todo é 100%. No item **b**, explore as estratégias utilizadas pelos estudantes para encontrar a porcentagem.

Na atividade **3**, com base na observação dos dados do enunciado, os estudantes deverão calcular a área incendiada com base no percentual indicado. Se necessário, explique aos estudantes que, nesse caso, o procedimento será invertido, pois já temos o percentual. Aproveite o contexto desse problema para refletir com os estudantes sobre a importância de se preservar a natureza.

No item **a** da atividade **4**, com base na observação dos dados do enunciado, os estudantes deverão calcular o percentual de etanol no combustível. No item **b**, avalie a compreensão dos estudantes e, se necessário, explique que: se em cada litro há 200 mL de etanol, sabemos que em 3 L há 600 mL de etanol. Adicionando mais 200 mL, ficarão 800 mL de etanol em 3 200 mL de combustível. Logo:

$$\frac{800}{3200} = 0{,}25 = 25\%.$$

Orientações didáticas

Atividades

Nestas atividades, os estudantes deverão utilizar a calculadora. Caso não haja calculadoras o suficiente para todos, peça que se organizem em duplas ou trios. Aproveite a oportunidade para avaliar se os estudantes estão aptos para manuseá-las de forma correta.

Na atividade **5**, os estudantes devem calcular o valor do imposto levando em consideração as informações presentes no enunciado. Aproveite para explorar noções de Educação Financeira relacionadas ao pagamento e à destinação dos impostos. Desse modo, estará contribuindo para a formação cidadã dos estudantes.

Na atividade **6**, com base nas informações do enunciado, os estudantes deverão somar as quantidades para encontrar o total de pinguins e, então, calcular o percentual corresponde a Santa Catarina.

Na atividade **7**, os estudantes devem utilizar a calculadora para realizar o cálculo. O procedimento mais simples para isso é efetuar a divisão:

$$2842332 : 5523023$$

e, em seguida, multiplicar por 100 o resultado obtido. Se achar conveniente, explique a origem desse procedimento, que se encontra na regra de três.

Na atividade **8**, a elaboração de problemas e a utilização de recursos tecnológicos contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Acréscimos e decréscimos: variação percentual

O contexto relacionado à população da cidade de Olímpia tem a finalidade de criar uma circunstância concreta para que os estudantes verifiquem a aplicação prática do conceito de variação percentual, que será abordado na sequência.

Nesse momento, os estudantes são apresentados à definição conceitual de variação percentual e à fórmula utilizada para os cálculos que envolvem esse conteúdo. Em seguida, por meio de um exemplo prático, eles terão a oportunidade de aferir sua compreensão desse conceito.

8. Exemplo de resposta: A população de uma cidade é de 550000 habitantes. Sabendo-se que 23% dessa população é de crianças com menos de 12 anos, calcule o número de crianças até 12 anos que vivem nessa cidade.

Resolução: $\frac{23}{100} \times 550000 = 126500$. São 126500 crianças com menos de 12 anos que vivem nessa cidade.

Faça as atividades no caderno.

5. Nas rodovias do Sistema Anhanguera-Bandeirantes (SP), um dos pedágios para automóveis é de R$ 10,60, dos quais se estima que 18,24% sejam de tributos. Qual é o valor estimado do tributo? R$ 1,93

6. O jornal *O Estado de S. Paulo* publicou em 27 dez. 2021 uma notícia sobre os pinguins encontrados no litoral brasileiro em 2021. Foram 4741 pinguins encontrados em Santa Catarina, 1028 no Paraná e 869 em São Paulo. Desse total, quantos por cento correspondem aos animais encontrados em Santa Catarina? 71,4%

7. Após a realização do Enem de 2020, foi divulgado o número de inscritos que faltaram no primeiro dia de aplicação da prova. Dos 5523023 inscritos para as provas impressas, 2842332 não compareceram. Esse número representa uma abstenção de x%.

Use uma calculadora e descubra o valor de x com uma casa decimal. 51,5

8. Elabore um problema que envolva porcentagem a ser resolvido com o uso de calculadora.

Acréscimos e decréscimos: variação percentual

Olímpia é uma cidade do interior do estado de São Paulo que se tornou um polo turístico nos últimos anos devido aos parques aquáticos lá existentes. Antes da criação desses parques, a população de Olímpia era de cerca de 30000 habitantes e hoje é de cerca de 54000 habitantes. Quantos por cento a população de Olímpia aumentou no período considerado?

O crescimento da população em número de habitantes foi de:

$$54\,000 - 30\,000$$

Em relação à população antiga, o crescimento percentual é de:

$$\left(\frac{54\,000 - 30\,000}{30\,000} \cdot 100\right)\% = \left(\frac{24\,000}{30\,000} \cdot 100\right)\% = \frac{240}{3}\% = 80\%$$

No período considerado, a população de Olímpia aumentou 80%.

Conforme estudado anteriormente, aumento, redução, lucro ou prejuízo percentuais podem ser calculados desta maneira:

$$VP = \left(\frac{VM - Vm}{Vi} \cdot 100\right)\%$$

sendo VP a variação percentual, VM o valor maior, Vm o valor menor e Vi o valor inicial.

No numerador, calculamos sempre a diferença entre o maior e o menor valor (pode ser final menos inicial, ou inicial menos final, dependendo de ser aumento ou redução). No denominador usamos sempre o valor inicial, antes de sofrer a alteração.

Na questão anterior sobre a população de Olímpia, o valor maior é 54000, o menor é 30000 e o valor inicial é 30000. A variação percentual foi um acréscimo de 80%.

Exemplo

Um patinete que custava R$ 200,00 estava sendo vendido em uma liquidação por R$ 164,00. Qual é a porcentagem de desconto em relação ao valor inicial do patinete?

O valor maior é 200, o menor é 164 e o valor inicial, 200. O percentual do desconto é:

$$\left(\frac{VM - Vm}{Vi} \cdot 100\right)\% = \left(\frac{200 - 164}{200} \cdot 100\right)\% = \left(\frac{36}{200} \cdot 100\right)\% = \frac{36}{2}\% = 18\%$$

12. Exemplo de resposta: Numa feira de livros, paguei R$ 136,00 por um livro que custava R$ 160,00. Qual foi o percentual do desconto oferecido na feira?

Atividades

Faça as atividades no caderno.

9. A imprensa noticiou que, antes da pandemia de covid-19, uma cidade tinha cerca de 12 000 trabalhadores desempregados e, após um ano, 13 500. Qual foi a porcentagem de aumento do número de desempregados nesse ano nessa cidade? 12,5%

10. Em uma sala de aula, havia 36 carteiras. Para aumentar a distância entre os estudantes, foi feito um remanejamento, de modo que ficaram apenas 20 carteiras na sala. Quantos por cento da capacidade da sala foi preciso diminuir? Aproximadamente 44,4%.

11. De um ano para outro, a mensalidade de uma escola infantil aumentou de R$ 475,00 para R$ 513,00. Qual foi a porcentagem de aumento? 8%

12. Elabore um problema que possa ser resolvido pela sequência de operações a seguir:

$$160{,}00 - 136{,}00 = 24{,}00$$

$$\left(\frac{24{,}00}{160{,}00} \cdot 100\right)\% = \frac{240}{16}\% = 15\%$$

Resposta: 15%

13. Um cliente frequente de um supermercado fez uma compra no valor total de R$ 728,50. Alguns itens comprados estavam em promoção e, com os descontos, ele pagou por essa compra R$ 530,35. Quantos por cento do total foram descontados nessa compra? 27,2%

Cálculo do valor novo após acréscimo de um percentual

Jandira recebe um salário de R$ 2.800,00 e, no próximo mês, será promovida a um novo cargo. O salário dela terá um acréscimo de 25%.

Note que o acréscimo será de 25% de R$ 2.800,00; portanto, de:

$$\frac{25}{100} \cdot 2\,800{,}00 = \frac{2\,800{,}00}{4} = 700{,}00$$

Assim, o novo salário de Jandira será de:

R$ 2.800,00 + R$ 700,00 = R$ 3.500,00

> Você já ouviu este nome: Jandira? Sabe qual é o significado dele? **Prática de pesquisa**
>
> Descubra o significado deste e de outros nomes fazendo uma pesquisa em: http://www.seer.ufu.br/index.php/GTLex/article/download/37831/20533/ (acesso em: 9 maio 2022). Apresente aos colegas o significado e a origem dos nomes que você encontrou.

Há outro modo de fazer esse cálculo. Hoje, Jandira recebe R$ 2.800,00, que é 100% do seu salário; como vai ter um acréscimo de 25%, ela passará a receber (100% + 25%) do salário atual. Então, o salário novo dela em reais será de:

$$(100\% + 25\%) \text{ de } 2\,800{,}00 = (125\% \text{ de } 2\,800{,}00) = \frac{125}{100} \cdot 2\,800{,}00 = 3\,500{,}00$$

Já estudamos que, após um aumento percentual em um valor, o valor novo pode ser calculado da seguinte maneira:

$$VN = VA + AP \cdot VA$$

sendo VN o valor novo, VA o valor antigo e AP o aumento percentual.

No exemplo, mostramos que há outra maneira de fazer esse cálculo, que é:

$$VN = (100\% + AP) \cdot VA$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

14. Por quanto devemos multiplicar um valor para obter esse valor acrescido de 20%? Por 1,20.

15. O preço da passagem de ônibus de um município era R$ 3,20 durante três anos consecutivos. O prefeito decidiu atualizar o preço dando um acréscimo de 10%. Para quanto foi o preço da passagem? R$ 3,52

Ampliando o conceito técnico trabalhado até aqui, a atividade **12** tem a finalidade de explorar a criatividade dos estudantes, além de avaliar se eles realmente compreenderam as situações em que os cálculos de variação percentual se fazem necessários. Atividades como essa contribuem para o desenvolvimento do pensamento computacional, pois supõem a observação e utilização de passos (algoritmo) preestabelecidos.

Na atividade **13**, considerando os dados do enunciado, os estudantes deverão calcular um percentual de desconto. Avalie se eles têm total compreensão do conceito de desconto.

Cálculo do valor novo após acréscimo de um percentual

Aprofundando e ampliando os estudos relacionados à porcentagem, apresentamos o conceito de acréscimo, presente em relações comerciais e financeiras. Além de saber calcular porcentagens de quantidades e variações percentuais, é importante saber determinar o valor de um aumento ou desconto. Por isso, a abordagem apresenta exemplo prático dessa aplicação, bem como a demonstração das fórmulas utilizadas e as diferentes maneiras de realizar esse tipo de cálculo.

Embora a Educação Financeira não seja sinônimo de Matemática financeira e vice-versa, a compreensão dos conceitos apresentados neste capítulo são importantes para a análise e a tomada de decisões relacionadas à Educação Financeira, contribuindo, assim, para o exercício da cidadania.

Atividades

Na atividade **14**, espera-se que os estudantes compreendam que todo acréscimo percentual é **adicionado** ao valor total, ou seja, um acréscimo de 20% é somado a 100%, resultando em 120%. Se achar pertinente, construa com os estudantes um quadro contendo alguns acréscimos e fatores de multiplicação correspondentes.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **9**, com o objetivo de fixar o conhecimento relacionado à variação percentual, os estudantes terão de analisar as informações dadas no enunciado e utilizar a fórmula para calcular o acréscimo percentual do número de desempregados. O contexto desse problema é uma oportunidade para favorecer a argumentação. Pergunte aos estudantes se o aumento do desemprego no Brasil (e no mundo) pode ter sido uma das consequências da pandemia do novo coronavírus. Para que possam fundamentar seus pontos de vista, sugira pesquisas em fontes científicas. Desse modo, eles poderão acessar e interagir criticamente com diferentes fontes de informação e, ainda, mobilizar o TCT *Trabalho*.

Na atividade **10**, considerando os dados do enunciado, os estudantes deverão calcular o decréscimo percentual correspondente à capacidade da sala. Como o resultado será uma dízima periódica, pode-se aproveitar para retomar o assunto estudado no capítulo anterior, como uma revisão.

A atividade **11** tem por objetivo a fixação do conceito de variação percentual a partir de uma situação do cotidiano dos estudantes relacionada à mensalidade de escolas particulares.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **16**, além de trabalhar a parte conceitual relacionada ao cálculo de uma quantidade a partir do valor percentual, é apresentada uma oportunidade de conversar com os estudantes sobre a importância da participação feminina na política. Se achar conveniente, pode-se abrir um bate-papo para a conscientização sobre a relevância da representatividade feminina nessa área. Aproveite o contexto dessa atividade para promover positivamente a imagem da mulher. Se julgar interessante, sugira, em parceria com o professor de **História**, uma pesquisa sobre a luta das mulheres para conquistar espaço na política, seja como votantes ou como candidatas. Outra possibilidade é fazer o levantamento da quantidade de mulheres vereadoras no município em que residem, deputadas estaduais e deputadas federais eleitas no estado dos estudantes. Desse modo, além da articulação com outras áreas do conhecimento, eles desenvolverão boa prática de pesquisa.

Na atividade **18**, é importante os estudantes compreenderem que, para realizá-la, não poderão apenas somar as taxas dos aumentos percentuais e aplicar o resultado na fórmula. Será necessário calcular o primeiro aumento de 10% e utilizar o resultado para então calcular o segundo aumento, de 5%.

Cálculo do valor novo após decréscimo de um percentual

Neste tópico, é introduzido mais um tipo de cálculo, agora relacionado à obtenção de um valor ou quantidade a partir do decréscimo percentual. Pergunte aos estudantes: "O que justificaria a redução de salários de trabalhadores?". Esse é um tema polêmico, que poderá gerar uma excelente discussão em sala de aula, mobilizando o TCT *Trabalho*. Incentive a argumentação oral dos estudantes sobre o assunto, mas não se esqueça de frisar que as opiniões precisam ser baseadas em dados verídicos.

Atividades

Na atividade **19**, espera-se que os estudantes compreendam que todo decréscimo percentual é **subtraído** do valor total, ou seja, um decréscimo de 10% é subtraído de 100%, resultando em 90%. Logo, o fator de multiplicação para um valor decrescido de 10% é 0,90.

Faça as atividades no caderno.

16. Nas eleições para prefeitos e vereadores no Brasil em 2020, havia cerca de 180 000 mulheres candidatas. Se esse número aumentar em 6% nas próximas eleições, quantas mulheres serão candidatas? 190 800 mulheres.

17. Uma lata de tinta de 18 litros usada para pintar paredes custava R$ 425,50 em uma loja. Quando a fábrica anunciou que haveria um aumento de 8%, o lojista decidiu aumentar seu preço em apenas 7,5%.

a) Qual seria o novo preço da lata de tinta se o lojista tivesse dado o aumento que a fábrica indicou? R$ 459,54

b) Qual foi o preço que ele colocou? R$ 457,41

18. O custo de 1 dólar americano em janeiro de 2020 era de R$ 5,00. Houve um aumento de 10% em fevereiro e o novo preço aumentou 5% em março. Qual era o preço do dólar em março? R$ 5,78

Cálculo do valor novo após decréscimo de um percentual

Uma empresa anunciou a redução da jornada e dos salários de seus funcionários em 20% por determinado período durante a pandemia de covid-19. Adamastor, um dos colaboradores dessa empresa, recebia R$ 2.550,00 antes da pandemia. Quanto ele passou a receber no período de baixa dos salários?

Note que o decréscimo foi de 20% de R$ 2.550,00. Portanto, de: $\frac{20}{100} \cdot 2550 = \frac{2550}{5} = 510$

Assim, Adamastor passou a receber R$ 2.550,00 − R$ 510,00 = R$ 2.040,00.

Há outro modo de fazer esse cálculo. Adamastor recebia R$ 2.550,00, que era 100% do salário dele. Com a redução de 20%, passou a receber (100% − 20%) do salário. Então:

$$(100\% - 20\%) \text{ de } 2550 = (80\% \text{ de } 2550) = \frac{80}{100} \cdot 2550 = 2040$$

O salário novo foi de R$ 2.040,00.

Já estudamos que, após uma redução percentual em um valor, o valor novo é calculado da seguinte maneira:

$$VN = VA - RP \cdot VA$$

sendo *RP* a redução percentual.

No exemplo anterior, mostramos que há outra maneira de fazer esse cálculo, que é: $VN = (100\% - RP) \cdot VA$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

19. Por quanto devemos multiplicar um valor para obter esse valor diminuído de 10%? Por 0,90.

20. Para digitar um texto, Marco levava 16 minutos. Após um treinamento, ele passou a digitar textos do mesmo tamanho que aquele em um tempo 25% menor. Agora, em quantos minutos ele faz essa digitação? 12 min

21. O vestibular de uma universidade pública tinha 140 000 inscritos, mas 8,5% deles faltaram no dia da prova. Quantos candidatos fizeram a prova? 128 100 candidatos.

22. Segundo a Associação Brasileira das Indústrias de Refrigerantes e de Bebidas não Alcoólicas (Abir), a produção nacional de refrigerantes foi de 12,837 bilhões de litros em 2017. Em 2018, houve um decréscimo de 4,2% em relação ao ano anterior e, em 2019, um acréscimo de 2,9% em relação a 2018.

a) Use uma calculadora e estime qual foi a medida de volume de refrigerante produzida em 2019. 12,654 bilhões de litros.

b) Estime a variação percentual da produção de 2019 em relação à de 2017. Decréscimo de 1,4%.

23. Elabore um problema que possa ser resolvido pela seguinte sequência de operações:

$150 \cdot 1{,}20 = 180$

$180 \cdot 0{,}85 = 153$

$153 - 150 = 3$

Resposta: 3

Exemplo de resposta: Uma escola tinha 150 estudantes de oitavo ano em 2019 e teve um acréscimo de 20% em 2020. Mas, em 2021, houve decréscimo de 15% relativamente a 2020. Quantos estudantes de oitavo ano essa escola tinha em 2021 a mais do que em 2019?

24. Elabore um problema envolvendo o cálculo de uma quantidade que sofreu um aumento (ou desconto) de um percentual dado, a ser resolvido mentalmente.

24. Exemplo de resposta: Uma loja vende determinado modelo de televisão por R$ 2.000,00. Para incentivar a venda dessa televisão, fez uma promoção, oferecendo um desconto de 10%. Quanto passou a custar essa televisão? Resposta: R$ 1.800,00.

Na atividade **20**, os estudantes terão de calcular uma quantidade de minutos após um decréscimo de 25%. Avalie as estratégias utilizadas pelos estudantes e verifique se alguns utilizaram o fator de multiplicação 0,75.

A atividade **24** tem por finalidade avaliar se os estudantes compreenderam as aplicações práticas do conteúdo abordado até aqui. A elaboração de problemas contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Educação **financeira**

Faça as atividades no caderno.

Prática de pesquisa

Pesquisa sobre inflação

As imagens não estão representadas em proporção.

Você já ouviu falar em "poder de compra"?

Poder de compra é a capacidade de comprar algo com determinada quantia. Conseguimos saber se o poder de compra aumentou ou diminuiu quando uma mesma quantia compra mais ou menos de um produto. E é a inflação que interfere no poder de compra!

Koval_sia/Shutterstock

Afinal, o que é inflação?

PetiteARTist/Shutterstock

Para saber o significado de inflação e qual é a influência dela na vida das pessoas, não basta procurar no dicionário o significado dessa palavra, é necessário realizar uma **pesquisa bibliográfica**. Nesse tipo de pesquisa, buscamos informações sobre o tema a ser investigado em textos, livros, artigos, *sites*, etc., que chamamos de **fontes de informação**.

Seguem algumas dicas para analisar se as fontes encontradas são confiáveis.

- Não acredite na primeira informação que aparecer na sua consulta.
- Busque mais fontes para comparar as informações.
- A data da publicação também é importante para a informação ser o mais atualizada possível.
- Busque textos em instituições de estudos reconhecidas, centros de pesquisas e universidades.

A metodologia para realizar a pesquisa bibliográfica é composta das seguintes etapas a serem percorridas.

Introdução: texto curto com a definição do tema, a questão de pesquisa e o objetivo.

Desenvolvimento: busca das informações que se relacionam com o tema da pesquisa, em fontes confiáveis. Leitura e interpretação dos textos encontrados e registro, com suas próprias palavras, das informações obtidas.

Conclusão: elaboração de uma conclusão argumentada e justificada e apresentação dos resultados da pesquisa por meio de texto, cartaz, infográfico, vídeo, etc.

Referências bibliográficas: lista das fontes consultadas e utilizadas na pesquisa no seguinte padrão:

Para livro: [SOBRENOME DO AUTOR], [Nome do autor]. [*Título do livro*]. [edição, se houver]. [Cidade]: [Editora], [ano da publicação]. ([nome da coleção, se houver]).
Para artigo de revista: [SOBRENOME DO AUTOR], [nome do autor]. [Título do artigo]. [*Nome da revista*], [Cidade]: [Editora], [ano da publicação]. [volume], [número da publicação], [número da(s) página(s)].
Para artigo de jornal: [SOBRENOME DO AUTOR], [Nome do autor]. [Título do artigo]. [*Nome do jornal*], [número da(s) página(s)], [dia mês e ano da publicação].
Para texto da internet (em geral): [SOBRENOME DO AUTOR], [Nome do autor]. [Título do artigo]. [*nome do site*], [dia, mês e ano da publicação, se houver]. Disponível em: [URL]. Acesso em: [dia, mês e ano].

Agora, você pode se reunir com 3 colegas e seguir as etapas apresentadas.

Tema da pesquisa: Inflação.

Questão da pesquisa: O que é inflação?

Quando um tema de pesquisa é muito amplo, algumas **questões específicas** podem nos orientar para que o resultado seja adequado.

I. O que significa inflar?

II. O que é inflação?

Orientações didáticas

Educação financeira

Na BNCC

Esta seção favorece com maior ênfase a habilidade **EF08MA04**, quando são aplicados conceitos relacionados à porcentagem para resolver as situações propostas. Mobiliza a **CG09** e a **CEMAT08** ao propor a prática de pesquisa e a interação entre os estudantes na discussão das questões propostas. Favorece também o trabalho com os TCTs *Educação Financeira*, *Educação Fiscal* e *Educação para o Consumo* ao abordar o tema da inflação, índices financeiros e poder de compra do consumidor.

O objetivo desta seção é apresentar o passo a passo de uma atividade de pesquisa bibliográfica para que os estudantes compreendam conceitos relacionados ao tema **inflação**, ensinando-os a pesquisar e produzir conhecimento.

Sobre a pergunta inicial do texto, questione os estudantes se eles conhecem a expressão "poder de compra" e o que eles entendem por isso. Você pode exemplificar pedindo para que eles digam o que é possível comprar atualmente com R$ 1,00: "Quantos pãezinhos do tipo francês conseguimos comprar hoje com R$ 1,00? E há 2 anos? E daqui a 2 anos?". Discutir sobre poder de compra auxilia no entendimento do conceito de inflação, que será investigado por meio de uma pesquisa bibliográfica.

A metodologia de pesquisa bibliográfica apresentada tem como estrutura: introdução, desenvolvimento, conclusão e referências bibliográficas. A definição do tema e do objetivo estão contemplados na introdução, a busca de informações, a leitura e o registro das informações fazem parte do desenvolvimento da pesquisa. Na conclusão, o pesquisador pode expressar o que aprendeu com a pesquisa. No texto final, devem ser incluídas as referências bibliográficas.

Oriente os estudantes a anotarem as referências utilizadas no trabalho de pesquisa. Explique o modo como as referências devem ser anotadas, segundo orientação de uma norma da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) e, por isso, devem seguir um padrão, como expresso no livro do estudante.

Comente com os estudantes sobre a importância de termos fontes confiáveis disponíveis para serem consultadas, inclusive para não sermos vítimas de *fake news*. Oriente para que prefiram livros e artigos de revista e de jornal disponibilizados por instituições de estudos reconhecidas, centros de pesquisas e universidades.

A questão de pesquisa desta atividade é: "O que é inflação?". No entanto, como esse tema é amplo, propomos questões específicas que têm a função de auxiliar no entendimento dos conceitos e favorecer a construção do conhecimento.

A situação de aprendizagem proposta tem o objetivo de fomentar no estudante as habilidades de selecionar e compartilhar informações, ler, compreender e interpretar textos, consultar de forma crítica fontes de informação diferentes e confiáveis e sintetizar e expor o que aprendeu.

Orientações didáticas

Educação financeira

A apresentação dos resultados da pesquisa deve ser feita por meio de instrumentos de aprendizagem que permitam que os estudantes demonstrem o que aprenderam, desenvolvendo habilidades de argumentação em apresentação oral e escrita e em debate. Essa produção final envolve a elaboração de um infográfico, que poderá ser fixado em um painel (confeccionado em papel ou no material TNT, fixado na parede, em local visível, de grande circulação), contemplando os resultados da pesquisa e, posteriormente, apresentado em um seminário.

Existem programas gratuitos de computador, que possibilitam a construção de infográficos, por exemplo, o Canva.

No final dessa atividade de pesquisa, são propostas questões que envolvem conceitos sobre o tema inflação para que os estudantes às respondam, agora, com o embasamento teórico necessário.

Seguem algumas referências bibliográficas que podem ser utilizadas para o desenvolvimento da pesquisa.

BAGNO, Marcos. *Pesquisa na Escola*: o que é como se faz. São Paulo: Edições Loyola, 2007.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. *O que é inflação?* Disponível em: https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/oqueinflacao. Acesso em: 26 abr. 2022.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 2002.

DEMO, Pedro. *Educar pela Pesquisa*. 4 ed. Campinas: Autores Associados, 2000.

IBGE. *IBGE explica inflação*. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php. Acesso em: 26 abr. 2022.

IPEA. *Inflação por faixa de renda*. Disponível em: https://www.ipea.gov.br/cartadeconjuntura/index.php/category/inflacao/. Acesso em: 26 abr. 2022.

MARCONI, Marina de A.; LAKATOS, Eva M. *Fundamentos de Metodologia Científica*. 9. ed. São Paulo: GEN/Atlas, 2021.

SERASA. *O que é inflação e como ela impacta suas finanças?* Disponível em: https://www.serasa.com.br/ensina/dicas/o-que-e-inflacao/. Acesso em: 26 abr. 2022.

III. Quais são as causas mais comuns para o aumento da inflação?

IV. Quais são os principais mecanismos de que dispõe o governo para combater a inflação?

V. Como é avaliada a inflação média mensal no Brasil?

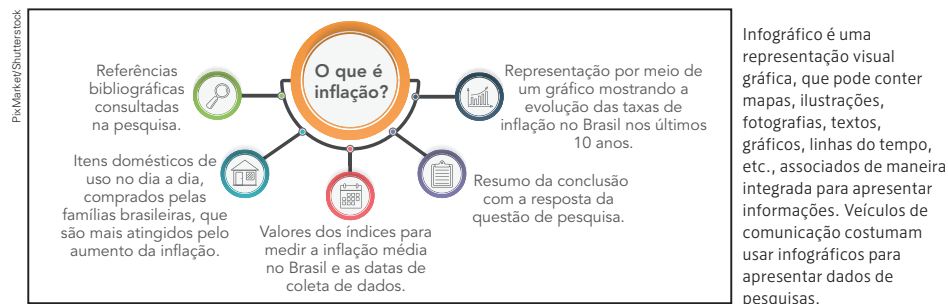
VI. Quais são os principais índices oficiais para medir a inflação média no Brasil?

VII. Quais foram as taxas anuais de inflação no Brasil nos últimos 10 anos?

Apresentação dos resultados

Você e o grupo de pesquisa podem juntos confeccionar um infográfico para apresentar os resultados. Vocês sabem o que é infográfico? Note a seguir um exemplo.

PixMarket/Shutterstock

Infográfico é uma representação visual gráfica, que pode conter mapas, ilustrações, fotografias, textos, gráficos, linhas do tempo, etc., associados de maneira integrada para apresentar informações. Veículos de comunicação costumam usar infográficos para apresentar dados de pesquisas.

Após a confecção do infográfico, preparem-se para apresentá-lo em um seminário para os demais estudantes.

Ampliando as informações

Uma pesquisa pode ser complementada com informações que contribuem para entender os conceitos pesquisados. Para ampliar a pesquisa que você já fez, faça individualmente as tarefas a seguir.

I. Tomando por base o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), que é o índice utilizado oficialmente pelo governo para avaliar a inflação, o valor de R$ 100,00 de 10 anos atrás ficou reduzido a quanto? Para descobrir a resposta, divida R$ 100,00 pelo índice de correção no período. Resposta pessoal.

Acesse https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php (acesso em: 14 abr. 2022) e, em índice IPCA (IBGE), escolha o mês inicial e o mês final no período de 10 anos desejado e clique em "corrigir valor". Você terá o valor de R$ 100,00 da data inicial corrigido pela inflação no período.

II. Supondo que a inflação mensal seja de 1% e que um produto hoje custe R$ 100,00, qual será o preço desse produto daqui a 3 meses se ele for reajustado de acordo com a inflação? R$ 103,03

III. Se a inflação mensal for de 2% e um cidadão tiver um salário de R$ 2.000,00, daqui a 2 meses o poder de compra do salário dele ficará reduzido em que porcentual? 3,88%

IV. Como você aferiria a veracidade da seguinte notícia: "Inflação do mês de março de 2022 foi a menor da história do real"? A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

V. Quais produtos ou serviços você consome e qual a variação do custo deles ao longo de determinado período? A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Junte-se a um grupo de 3 colegas para responder às questões.

1. Tendo em vista a tarefa **IV**, debatam a questão: Qual índice foi usado nessa notícia? Como verificar um histórico desse índice? A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. Considerando as tarefas **IV** e **V**, debatam a questão: Os índices de inflação refletem o consumo de todas as famílias do país? Na realidade de suas famílias, quais itens de consumo são os mais impactantes no orçamento? A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Na Unidade

Faça as atividades no caderno.

1. O número 3,125 escrito na forma de fração corresponde a: Alternativa **b**.

a) $\frac{3125}{999}$

b) $\frac{25}{8}$

c) $\frac{3125}{900}$

d) $\frac{3125}{990}$

2. Escrevendo-se $\frac{3}{40}$ na forma decimal, obtém-se: Alternativa **b**.

a) 0,75

b) 0,075

c) 0,0075

d) 7,5

3. A fração que equivale a um número decimal não exato é: Alternativa **c**.

a) $\frac{7}{8}$

b) $-\frac{4}{25}$

c) $\frac{5}{6}$

d) $\frac{33}{40}$

4. **(Saresp)** Observe a reta numérica:

Reprodução/ Saresp, 2007

132,26 132,27 K M

A letra **K** está assinalando o número 132,268. Qual é o número que a letra **M** está marcando? Alternativa **b**.

a) 132,280

b) 132,283

c) 133,001

d) 133,300

5. A fração geratriz da dízima 0,454545... é: Alternativa **a**.

a) $\frac{5}{11}$

b) $\frac{1}{20}$

c) $\frac{45}{100}$

d) $\frac{454}{900}$

6. A fração geratriz da dízima 2,7333..., na sua forma irredutível, tem numerador igual a: Alternativa **c**.

a) 15

b) 25

c) 41

d) 91

7. Dos 36 estudantes de uma classe de 8º ano, 9 usam óculos. Quantos por cento dos estudantes dessa classe não usam óculos? Alternativa **d**.

a) 27%

b) 36%

c) 60%

d) 75%

Texto para os testes **8** a **10**:

O número de carros novos vendidos por uma concessionária de veículos em dezembro de 2021 foi 65% menor comparando com o mesmo mês do ano anterior. Mas a venda de carros usados, seminovos, foi 75% maior. Em dezembro de 2020, essa concessionária havia vendido 80 carros novos e 60 carros seminovos.

8. O número de carros novos vendidos em dezembro de 2021 foi: Alternativa **a**.

a) 28

b) 30

c) 32

d) 36

9. O número de carros seminovos vendidos em dezembro de 2021 foi: Alternativa **c**.

a) 95

b) 100

c) 105

d) 108

10. Em relação ao total de carros vendidos em dezembro de 2020, o total vendido em dezembro de 2021 foi: Alternativa **d**.

a) 5% maior.

b) 10% maior.

c) 10% menor.

d) 5% menor.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

A atividade **1** tem por objetivo reconhecer a fração que corresponde ao número decimal 3,125. Na atividade **2**, os estudantes terão de encontrar o número decimal correspondente à fração dada no enunciado. Já na atividade **3**, dentre as frações representadas nos itens, os estudantes deverão verificar aquela que corresponde a um número decimal exato. Erros de resolução nessas atividades podem indicar dificuldades de representação de fração na forma decimal e vice-versa. Faça na lousa alguns exemplos dessas representações.

Erros de resolução na atividade **4** podem indicar que os estudantes não perceberam que cada tracinho da imagem representa 0,001. Proponha que verifiquem novamente o enunciado da atividade e mostre que, como as letras são separadas por tracinhos, temos 132,268 + 0,015 = 132,283.

Nas atividades **5** e **6**, os estudantes terão de recorrer aos conceitos estudados no capítulo anterior para obter a fração geratriz de uma dízima periódica simples (atividade **5**) e composta (atividade **6**).

Erros de resolução nas atividades **7** a **10** podem indicar que os estudantes não compreenderam os enunciados das atividades e/ou os conceitos relacionados à porcentagem. Peça a eles que retomem a leitura dos enunciados, anotem os dados relevantes e, em seguida, definam a melhor estratégia de resolução.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da Unidade mobiliza com maior ênfase a **CG05** e a **CEMAT05** ao propor o uso de tecnologias digitais para resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento. Favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

Converse com os estudantes sobre os prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI) e os que são relativos às unidades usadas na informática. Espera-se que os estudantes percebam que a diferença entre eles refere-se à base utilizada, de acordo com o sistema. Enquanto as unidades do SI se relacionam na base 10, as unidades da informática utilizam a base 2, seguindo o sistema binário usado na linguagem dos computadores.

UNIDADE 2

Potenciação e radiciação

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- resolver problemas com potências de expoentes inteiros;
- representar números em notação científica;
- elaborar problemas usando a relação entre a potenciação e a radiciação;
- representar a raiz de um número como potência de expoente fracionário.

CAPÍTULOS

Código binário em tela de computador.

Qual é a diferença entre *bits* e *bytes*?

Bits e *bytes* são unidades de medida de capacidade de armazenamento de dados em sistemas computacionais. Os computadores fazem a "leitura" de impulsos elétricos, positivos ou negativos, que são representados por 1 ou 0 e, a cada impulso elétrico, é dado o nome de ***bit*** (***binary digit***). Um conjunto de 8 *bits* reunidos forma 1 ***byte***.

Esse sistema que utiliza apenas os dígitos 0 e 1 é chamado de **sistema binário**, justamente por apresentar apenas dois dígitos. Nos sistemas computacionais, todas as letras, números, caracteres e até mesmo imagens são representadas apenas por esses dígitos. Cada letra, por exemplo, tem o tamanho de 1 *byte*, ou seja, 8 *bits*.

Vamos supor que a letra *A* seja representada pelos *bits* 01000001. Se modificarmos a posição de apenas um desses *bits*, como 00010001, já teremos outra letra. Com 8 *bits*, é possível representar 2^8, ou seja, 256 diferentes caracteres.

A palavra "computador", por exemplo, possui 10 letras, cada letra com 1 *byte*, ou seja, são necessários 10 *bytes* ou 80 *bits* para armazenar apenas essa palavra. Para armazenar grandes quantidades de informação, são necessários muitos *bytes*; para facilitar a compreensão da capacidade de armazenamento nos computadores foram criados prefixos para múltiplos dessas quantidades. Além dos prefixos geralmente adotados para potências de base 10, há também prefixos para potências de base 2. Acompanhe:

1 *byte* = 8 *bits* = 2^3 *bits*

Base 10	Base 2
1 *kilobyte* (kB) = 1 000 *bytes* = 10^3 *bytes*	1 *kibibyte* (KiB) = 1 024 *bytes* = 2^{10} *bytes*
1 *megabyte* (MB) = 1 000 *kilobytes* = 10^3 kB	1 *mebibyte* (MiB) = 1 024 *kibibytes* = 2^{10} KiB
1 *gigabyte* (GB) = 1 000 *megabytes* = 10^3 MB	1 *gibibyte* (GiB) = 1 024 *mebibytes* = 2^{10} MiB
1 *terabyte* (TB) = 1 000 *gigabytes* = 10^3 GB	1 *tebibyte* (TiB) = 1 024 *gibibytes* = 2^{10} GiB
1 *petabyte* (PB) = 1 000 *terabytes* = 10^3 TB	1 *pebibyte* (PiB) = 1 024 *tebibytes* = 2^{10} TiB
1 *exabyte* (EB) = 1 000 *petabytes* = 10^3 PB	1 *exbibyte* (EiB) = 1 024 *pebibytes* = 2^{10} PiB
1 *zettabyte* (ZB) = 1 000 *exabytes* = 10^3 EB	1 *zebibyte* (ZiB) = 1 024 *exbibytes* = 2^{10} EiB
1 *yottabyte* (YB) = 1 000 *zettabytes* = 10^3 ZB	1 *yobibyte* (YiB) = 1 024 *zebibytes* = 2^{10} ZiB

Fonte dos dados: ALECRIM, Emerson. O que são *bits, bytes, megabits, megabytes* e afins? *InfoWester*, [*s. l.*], 20 fev. 2022. Disponível em: https://www.infowester.com/bit.php. Acesso em: 20 fev. 2022.

No Sistema Internacional de Unidades (SI), o prefixo quilo (k) antes de uma unidade significa 1 000 vezes a unidade. Por exemplo, 1 kg = 1 000 g. Pense em uma explicação para o fato de o prefixo *kilo* na informática ser equivalente ao prefixo *kibi*. Os computadores trabalham com potências de 2, e 1 024 = 2^{10} é a potência de 2 mais próxima de 1 000.

Jason Winter/Shutterstock

Orientações didáticas

Abertura

O texto da abertura da Unidade favorece a compreensão de termos utilizados no contexto da Computação que estão presentes em nosso cotidiano, como a quantidade de dados que podem ser armazenados ou transmitidos. Esse é um momento rico para o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*, em que utilizamos a linguagem matemática para dar sentido a expressões como *gigabyte* e *terabyte*.

Proposta para o professor

Comente sobre a diferença entre capacidade de armazenamento (medida em *bytes*) e transmissão de dados (medida em *bits*), que pode ser consultada na referência apresentada no Livro do Estudante (Alecrim, 2022). Para complementar o que foi apresentado sobre os prefixos que utilizam potências de base 2 e os de base 10, indicamos a referência a seguir (em inglês).

NIST. *Prefixes for binary multiples*. [*s. l.*]. Disponível em: https://physics.nist.gov/cuu/Units/binary.html. Acesso em: 23 jun. 2022.

Orientações didáticas

Potências

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA01**, ao propor a realização de cálculos com potências de expoentes inteiros; **EF08MA03**, ao propor a resolução e elaboração de problemas de contagem envolvendo o princípio multiplicativo; e **EF08MA04**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo porcentagens. As atividades têm contextos que mobilizam a **CG04** e a **CEMAT05**, ao abordar a utilização de linguagens de programação e tecnologias digitais; a **CEMAT02**, ao promover o desenvolvimento do raciocínio lógico na resolução de problemas nos quais se utiliza potenciação, como o crescimento populacional; e a **CEMAT01**, ao reconhecer a Matemática como ciência humana fruto da necessidade em determinado momento histórico. Favorece ainda o desenvolvimento dos TCTs *Saúde* e *Educação Ambiental.*

Trabalhe o texto sobre população bacteriana, que introduz esse tópico, propondo aos estudantes que se reúnam em duplas para conversarem sobre ele. Aproveite o contexto e discuta sobre cuidados que devem ter para evitar doenças causadas por algumas dessas bactérias e vírus, como o que ocorreu com a pandemia de covid-19, explorando o TCT *Saúde*. Peça que discutam também sobre a influência benéfica dos microrganismos para o meio ambiente e para os seres humanos, como descrito no texto, desenvolvendo o TCT *Educação Ambiental*.

Escreva na lousa os cálculos relacionados ao crescimento da população de bactérias e discuta com os estudantes o que eles conhecem sobre esses microrganismos e os benefícios advindos deles.

Pode-se propor também um trabalho interdisciplinar com o professor do componente curricular **Ciências**, que pode auxiliar os estudantes em pesquisas sobre tópicos apresentados no texto. O assunto desse texto possibilita a articulação com Biologia, reforçando o papel da Matemática como uma ciência importante para o desenvolvimento tecnológico e científico, como na fabricação de vacinas e na tecnologia envolvida no funcionamento do microscópio eletrônico.

CAPÍTULO 3

Potenciação

NA BNCC
EF08MA01
EF08MA03
EF08MA04

Potências

Como cresce a população bacteriana

As bactérias, junto com os vírus e os fungos, são estudadas no ramo das Ciências Biológicas denominado Microbiologia.

Os microrganismos estão presentes em quase todos os ambientes e representam a maior biodiversidade da Terra. Contribuem na fertilização do solo e na degradação de detritos, beneficiam a natureza ao fixar e utilizar matérias orgânica e inorgânica e têm importante função na reciclagem de materiais. São usados nas indústrias alimentícia e farmacêutica, na produção de vinagres, bebidas alcoólicas, queijos, iogurtes, pães e antibióticos. Alguns desses agentes são patogênicos ou danosos, causando doenças em humanos, animais e plantas, assim como a deterioração de alimentos e a degradação de estruturas.

Devido ao seu rápido crescimento e à relativa simplicidade, os microrganismos têm sido utilizados como modelos na compreensão de fenômenos biológicos.

Fonte dos dados: UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. ICB. Depto. de Microbiologia. Graduação. [São Paulo: USP], [20--?]. Disponível em: http://microbiologia.icb.usp.br/graduacao/. Acesso em: 8 mar. 2022.

Dennis Kunkel Microscopy/SPL/Fotoarena

Cultura de bactérias *Vibrio cholerae*, agente causador da cólera. Aumento de 7 000 vezes colorido por microscópio eletrônico de varredura.

Bactérias são organismos unicelulares (formados por uma única célula) e que se reproduzem rapidamente. Em algumas espécies, cada bactéria se transforma em outras duas em um prazo de 20 minutos.

Vamos imaginar uma cultura dessas bactérias em fase de crescimento que se duplica a cada período de 20 minutos.

A partir de um dado instante, para cada 1 000 bactérias, quantas teremos após:

a) 1 período (20 min)?
b) 2 períodos (40 min)?
c) 3 períodos (60 min)?
d) n períodos?

Acompanhe:

instante inicial: 1 000 bactérias
após 1 período: $1\,000 \cdot 2$ bactérias
após 2 períodos: $1\,000 \cdot 2 \cdot 2$ bactérias
após 3 períodos: $1\,000 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ bactérias

A multiplicação de fatores iguais pode ser representada na forma de **potência**: a **base** é o fator que se repete, e o **expoente** é a quantidade de vezes que a base aparece. Assim, teremos:

após 1 período: $1\,000 \cdot 2$ bactérias
após 2 períodos: $1\,000 \cdot 2^2$ bactérias
após 3 períodos: $1\,000 \cdot 2^3$ bactérias

Agora, vamos responder às perguntas da proposta anterior:

a) em 1 período: $1\,000 \cdot 2 = 2\,000$, ou seja, 2 000 bactérias;
b) em 2 períodos: $1\,000 \cdot 2^2 = 1\,000 \cdot 4 = 4\,000$, ou seja, 4 000 bactérias;
c) em 3 períodos: $1\,000 \cdot 2^3 = 1\,000 \cdot 8 = 8\,000$, ou seja, 8 000 bactérias;
d) em n períodos: $1\,000 \cdot 2^n$ bactérias.

Proposta para o professor

Seguem referências que trazem informações complementares sobre como as bactérias podem impactar positivamente em nossas vidas.

OLIVEIRA, Graciele A.; GUIMARÃES, Letícia. De Bandidos a Mocinhos: os microrganismos que impactam positivamente a saúde. *ComCiência*, 2018. Disponível em: https://www.comciencia.br/de-bandidos-mocinhos-os-microrganismos-que-impactam-positivamente-saude/.

PEDROSA, Manoel V. B.; ALVES, Ludimila P.; PASCHOA, Roberta P.; AMARAL, Atanásio A. Importância Ecológica dos Microrganismos do Solo. *Enciclopédia Biosfera*, Centro Científico Conhecer – Goiânia, v. 11, n. 22, p. 100--114, 2015. Disponível em: http://www.conhecer.org.br/enciclop/2015E/importancia%20ecologica.pdf. Acesso em: 30 maio 2022.

Participe

Faça as atividades no caderno.

O tabuleiro do jogo de xadrez tem 64 casas: 32 brancas e 32 pretas.

Diz a lenda que o jogo foi inventado por um jovem indiano que o apresentou a um poderoso rei após a morte do filho em uma batalha. Maravilhado, prometeu compensar o jovem com qualquer bem que desejasse.

O pedido foi:

- 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro;
- 2 grãos pela segunda casa;
- $2 \cdot 2$ grãos pela terceira casa;
- $2 \cdot 2 \cdot 2$ grãos pela quarta casa, e assim por diante até a sexagésima quarta casa, sempre dobrando a quantidade de grãos da casa anterior.

Vastram/Shutterstock

O xadrez é um jogo de estratégia em que cada jogador comanda um exército com 16 peças.

a) Como se representa, na forma de potência de base 2, a quantidade de grãos pedida pela primeira casa? Quantos grãos são? 2^0; 1 grão.

b) E pela segunda casa? Quantos grãos são? 2^1; 2 grãos.

c) E pela terceira casa? Quantos grãos são? 2^2; 4 grãos.

d) E pela quarta casa? Quantos grãos são? 2^3; 8 grãos.

e) E pela quinta casa? Quantos grãos são? 2^4; 16 grãos.

f) E pela sexta casa? 2^5; 32 grãos.

g) E pela sétima casa? 2^6; 64 grãos.

h) E pela décima primeira casa? 2^{10}; 1 024 grãos.

Vamos retomar o estudo da situação "Como cresce a população bacteriana".

Após n períodos de 20 min, teremos $1\,000 \cdot 2^n$ bactérias para cada 1 000 bactérias. Note como podemos interpretar esse resultado:

- Substituindo n por 1, teremos $1\,000 \cdot 2^1$.

  Já vimos que a quantidade de bactérias que existirá após 1 período é $1\,000 \cdot 2$. Então, comparando as duas expressões, temos: $2^1 = 2$.

  De fato, o valor de uma potência de expoente 1 é igual à base da potência.

- Substituindo n por 0, teremos $1\,000 \cdot 2^0$.

  Essa é a quantidade de bactérias no instante inicial, ou seja, 1 000, que corresponde a $1\,000 \cdot 1$. Comparando as duas expressões, temos: $2^0 = 1$.

  De fato, o valor de uma potência de expoente 0 e base não nula é igual a 1.

- Substituindo n por -1, teremos $1\,000 \cdot 2^{-1}$.

  Essa é a quantidade de bactérias que havia 1 período antes de a contagem começar. Como nesse período a quantidade dobrou e chegou a 1 000, havia $1\,000 \cdot \frac{1}{2}$. Comparando as duas expressões, devemos ter $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Logo, $2^{-1} = \frac{1}{2^1}$.

> O valor de uma potência de expoente negativo e base não nula é igual ao valor da potência em que a base é o inverso da base dada e o expoente é o oposto do expoente dado.

Orientações didáticas

Participe

No boxe *Participe* é explorado o jogo de xadrez para retomar o conteúdo de potenciação de base 2.

Peça aos estudantes para exporem suas reflexões sobre a quantidade de grãos em cada casa, como um momento para o desenvolvimento do letramento matemático, no qual os estudantes podem formular conjecturas para a resolução de problemas.

Orientações didáticas

Potência de expoente inteiro maior do que 1

Neste tópico é retomada a potenciação como um produto de fatores iguais em que o fator que se repete é a base e a quantidade de vezes que esse fator se repete é o expoente, que nesse caso é um inteiro maior do que 1. Discuta os exemplos com os estudantes e apresente outros na lousa para que eles exponham como fazer o cálculo das potências apresentadas. Por exemplo:

$(0{,}5)^5 =$
$= (0{,}5) \cdot (0{,}5) \cdot (0{,}5) \cdot$
$\cdot\ (0{,}5) \cdot (0{,}5) = 0{,}03125$

$(-11)^4 =$
$= (-11) \cdot (-11) \cdot (-11) \cdot$
$\cdot\ (-11) = +14\,641$

$(-1{,}1)^5 = (-1{,}1) \cdot (-1{,}1) \cdot$
$\cdot\ (-1{,}1) \cdot (-1{,}1) \cdot (-1{,}1) =$
$= -1{,}61051$

Potência de expoente 1

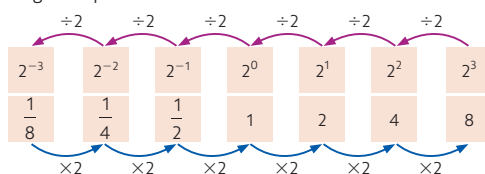
Retome com os estudantes a potência de expoente 1. Antes de apresentar os exemplos, converse com eles para que exponham seus conhecimentos a respeito desse cálculo.

Potência de expoente zero

Neste tópico, discuta com os estudantes o caso da potência de expoente zero e base não nula.

Algumas potências de 2:

2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

(÷2 de cada potência para a anterior; ×2 de cada potência para a seguinte)

expoente
base → a^n

O símbolo a^n representa a potência de base a e expoente n.

Potência de expoente inteiro maior do que 1

Toda potência de expoente inteiro maior do que 1 é igual ao produto de tantos fatores iguais à base quantas forem as unidades do expoente.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$, para qualquer número a e qualquer inteiro n maior do que 1.

Exemplos

- $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$
- $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- $\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{49}{9}$
- $\left(-\frac{1}{10}\right)^4 = \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10\,000}$

Potência de expoente 1

Toda potência de expoente 1 é igual à base.

$a^1 = a$, para qualquer número a.

Exemplos

- $(-2{,}3345)^1 = -2{,}3345$
- $(1{,}4142)^1 = 1{,}4142$
- $(-2)^1 = -2$
- $\left(-\frac{7}{10}\right)^1 = -\frac{7}{10}$

Potência de expoente zero

Toda potência de expoente zero e base não nula é igual a 1.

$a^0 = 1$, para qualquer número a, $a \neq 0$.

Exemplos

- $(0{,}75)^0 = 1$
- $(-11)^0 = 1$
- $(-1{,}354)^0 = 1$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$

Potência de expoente inteiro negativo

Toda potência de expoente inteiro negativo e base não nula é igual ao inverso da potência que se obtém conservando a base e trocando o sinal do expoente.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, para qualquer número a, $a \neq 0$, e qualquer inteiro n.

Exemplos

- $(1{,}5)^{-2} = \dfrac{1}{(1{,}5)^2} = \dfrac{1}{2{,}25} = \dfrac{1}{\frac{225}{100}} = \dfrac{100}{225} = \dfrac{4}{9}$
- $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^1} = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}$

Outro modo de calcular a^{-n}

Do último exemplo, $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} = \dfrac{4}{3} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{1}$. (trocou sinal; inverteu)

Outro exemplo: $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \dfrac{1}{\frac{1}{64}} = 1 \cdot \dfrac{64}{1} = 64$; como $64 = 4^3$, temos: $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3$. (trocou sinal; inverteu)

Para $a \neq 0$, vale: $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \underbrace{\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{a}}_{n \text{ fatores}} = \dfrac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}} = \dfrac{1}{a^n}$

Concluímos, então, que a^{-n} e $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ são iguais:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Ou seja: Uma potência de base não nula e expoente negativo é igual à potência em que a base é o inverso da base dada e o expoente é o oposto do expoente dado.

Exemplos

- $5^{-2} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{25}$ (trocou sinal; inverteu)
- $\left(-\dfrac{10}{3}\right)^{-5} = \left(-\dfrac{3}{10}\right)^5 = \left(-\dfrac{3}{10}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{10}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{10}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{10}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{10}\right) = -\dfrac{243}{100\,000}$ (trocou sinal; inverteu)

Vamos recordar que:

- Potência de base positiva é positiva. Por exemplo: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.
- Potência de base negativa e expoente par é positiva. Por exemplo: $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.
- Potência de base negativa e expoente ímpar é negativa. Por exemplo: $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{8}$.
- As expressões numéricas que envolvem potências devem ser resolvidas calculando-se primeiro o valor das potências. Por exemplo, para calcular o valor de $3x^2 - x + 2$, para $x = -1$, procedemos assim:

$$3x^2 - x + 2 = 3 \cdot (-1)^2 - (-1) + 2 = 3 \cdot 1 + 1 + 2 = 3 + 1 + 2 = 6$$

Orientações didáticas

Potência de expoente inteiro negativo

Neste tópico é apresentado o cálculo de potências de base não nula e expoente inteiro negativo. Se julgar necessário, retome com os estudantes o conceito de inverso de um número diferente de zero e como obtê-lo. Proponha na lousa exemplos para que os estudantes determinem o inverso de alguns números racionais não nulos. Depois, discuta o cálculo de potências de expoente inteiro negativo cuja base é racional positiva. Se for necessário, retome também a noção de oposto.

Reúna os estudantes em duplas para acompanharem e discutirem os exemplos apresentados no tópico “Outro modo de calcular a^{-n}”.

Garanta que todos compreendam que um número racional, não nulo, elevado ao expoente -1 é igual ao inverso do valor da base.

Proposta para o estudante

Peça aos estudantes que acompanhem os vídeos indicados a seguir, com os quais se pode retomar o cálculo de potências de expoente inteiro negativo. Faça um fechamento com os estudantes para suprimir possíveis dúvidas que ainda existam.

POTÊNCIA de expoente inteiro negativo. [*s. l.*: *s. n.*], 2019. 1 vídeo (13 min). Publicado pelo canal Matemático TECA. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=1dUWtvqJFZs.

POTENCIAÇÃO com expoentes negativos. [*s. l.*: *s. n.*], 2017. 1 vídeo (5 min). Publicado pelo canal Matemática no Papel. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=X8EQ98LqS1s.

Acesso em: 30 maio 2022.

Orientações didáticas

Atividades

Estas atividades exploram cálculos de potências com expoente inteiro. Elas podem ser realizadas em duplas, para que a discussão favoreça o aprendizado, ampliando o repertório de estratégias dos estudantes.

Na atividade **1**, faça uma releitura do texto da abertura da Unidade. Conforme o texto, para cada caractere representado por uma sequência de 8 *bits* (cada *bit* é representado pelo algarismo 0 ou 1), mudando a posição de apenas um desses *bits* já formamos um caractere diferente. Então, há 2 possibilidades diferentes para cada posição nessa sequência de 8 *bits*. Considerando todas as trocas de ordem possíveis (permutações dos *bits*), temos $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, ou seja, 2^8 representações diferentes, portanto, é possível formar 256 diferentes caracteres de 8 *bits* cada.

A atividade **10** pode ser um pretexto para discutir sobre a diversidade demográfica brasileira, permitindo assim a interdisciplinaridade com **Geografia**.

Já a atividade **11** pode ser utilizada para auxiliar os estudantes a refletirem sobre quais são as consequências de determinado fenômeno em nosso cotidiano. Pergunte a eles: "Quais seriam as causas e as consequências de um crescimento da população de ratos em uma cidade com a taxa proposta na questão?". Esse tipo de reflexão estimula o desenvolvimento da habilidade argumentativa deles e o contexto favorece a mobilização do TCT *Saúde*.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. De acordo com o texto de abertura desta Unidade, é possível formar 256 diferentes caracteres de 8 *bits* cada. Por quê? A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. Calcule a quantidade de *bits* que compõem um arquivo de:

a) 10 kB; 80 000 *bits*.
b) 10 KiB. 81 920 *bits*.

3. O volume de bactérias em um recipiente dobra a cada hora que passa. Se em dado instante o volume é de 1 cm^3:

Saiful52/Shutterstock

Cultura de bactérias em uma placa de Petri.

a) qual será o volume após 10 horas? 2^{10} cm^3
b) qual era o volume 4 horas antes? 2^{-4} cm^3

Indique os resultados na forma de potência de base 2.

4. Elabore um problema que envolva o crescimento do número de elementos (como feito na abertura deste capítulo com as bactérias) e que possa ser resolvido pela multiplicação de potências. Dê para um colega resolver enquanto você resolve o que ele elaborou.

5. Calcule o valor das potências apresentadas em cada quadro. **4.** O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Quadro A

a) 7^3 343
b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ $\frac{9}{4}$
c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ $\frac{4}{25}$
d) $(-1{,}1)^2$ 1,21
e) 10^3 1 000
f) $(3{,}14)^1$ 3,14
g) 1^5 1
h) $(-1)^6$ 1
i) 0^9 0
j) $(-10)^0$ 1

Quadro B

a) 10^{-2} $\frac{1}{100}$
b) $(-2)^{-2}$ $\frac{1}{4}$
c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ $\frac{64}{27}$
d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ $\frac{9}{4}$
e) $(0{,}1)^{-2}$ 100
f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ 125
g) 6^{-3} $\frac{1}{216}$
h) $(-1)^{-4}$ 1
i) $(-2)^{-5}$ $-\frac{1}{32}$
j) $\left(\frac{10}{9}\right)^{-1}$ $\frac{9}{10}$

6. Devido ao desgaste, o valor de um carro vai diminuindo com o tempo. A cada ano que passa, o valor é multiplicado por 0,8. Se hoje o carro vale R$ 60.000,00, quanto valerá daqui a 3 anos? R$ 30.720,00

7. Calcule, no caderno, $100 \cdot (1{,}2)^n$ para:

a) $n = 0$; 100
b) $n = 1$; 120
c) $n = 2$; 144
d) $n = 3$. 172,8

8. Calcule, no caderno, o valor de:

a) $x^3 - x^2 - x + 1$ para $x = -1$; 0
b) $10x^2 + 100x - 1\,000$ para $x = 5$. −250

9. Indique no caderno o valor de:

a) $3^2 - 2^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^0$; 2
b) $4 \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot (-2)^1$; 35
c) $5^1 \cdot 3^{-2} + 3^{-1} - 3 \cdot 3^0$; $-\frac{19}{9}$
d) $2^3 - 2 \cdot 3^2$; −10
e) $(-1)^{10} + 3 \cdot (-1)^5 - 3 \cdot (-1)^6$; −5
f) $(+5)^4 - (-5)^4$. 0

10. O crescimento da população brasileira é estudado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), que realiza o censo demográfico, ou seja, a contagem da população. Em 2010, éramos aproximadamente 196 milhões de habitantes. Estima-se que tenhamos um crescimento populacional de aproximadamente 7% por década, em média, nas próximas três décadas.

Agora, responda no caderno:

a) Considerando um crescimento de 7% por década, para cada 100 habitantes em 2020, quantos seremos em 2030? 107 habitantes.
b) Por quanto fica multiplicada a população ao final de 1 década? 1,07
c) E ao final de 3 décadas? $(1{,}07)^3$
d) Qual é a estimativa da população brasileira para 2040? 240 milhões de habitantes.

11. Sabendo que, a cada ano que passa, a quantidade de ratos em uma cidade é multiplicada por 1,5, responda no caderno:

a) Qual é a taxa percentual de aumento da quantidade de ratos em 1 ano? 50%
b) A quantidade de hoje ficará multiplicada por quanto daqui a 4 anos? 5,0625
c) Em relação à quantidade de hoje, quantos ratos havia 1 ano atrás? $\frac{2}{3}$ da quantidade de hoje.

Proposta para o estudante

Indicamos uma atividade sobre densidade demográfica envolvendo interpretação de tabela e construção de gráfico.
IBGE EDUCA. *A população cresce*. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/professores/educa-atividades/17664-a-populacao-cresce.html.
Para retomar o conceito de porcentagem, os estudantes podem acessar o conteúdo deste portal, assistir aos vídeos e fazer os exercícios.
OBMEP. *Módulo*: Porcentagem. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=21.
Acesso em: 23 jun. 2022.

Proposta para o professor

Caso queira explorar o contexto da atividade **11**, indicamos uma notícia de 2019 sobre o aumento da população de ratos em Nova York e um manual do Ministério da Saúde que recomenda como cuidar desse problema no Brasil.
POZZI, Sandro. Nova York perde a guerra contra os ratos. *El País*, 2019. Disponível em: https://brasil.elpais.com/brasil/2019/05/30/internacional/1559213672_466168.html.
BRASIL. Fundação Nacional de Saúde. *Manual de controle de roedores*. Brasília: Ministério da Saúde, Fundação Nacional de Saúde, 2002. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/manual_roedores1.pdf.
Acesso em: 23 jun. 2022.

Potências de 10 e a notação científica

Dando voltas na Terra

Em outubro de 2011, atingimos a cifra de 7 bilhões de habitantes na Terra. Se pudéssemos formar uma fila com todas essas pessoas, uma atrás da outra, que tamanho teria essa fila?

Luigi Rocco/Arquivo da editora

A composição étnica do Brasil envolve uma ampla diversidade de raças e etnias, tradições, culturas, idiomas e outros elementos. O Brasil é um país com uma grande diversidade étnica, ou seja, apresenta uma elevada variedade de raças e etnias. Você já olhou ao seu redor e percebeu o quanto somos diferentes uns dos outros? O livro *A cabeleira de Berenice* explora uma história que dá destaque a temas relativos à diversidade étnica da população brasileira, à sociabilidade, ao *bullying* e ao preconceito. Leia: ARAUJO, Leusa. *A cabeleira de Berenice*. Ilustrações de Sônia Magalhães. 2. ed. São Paulo: SM, 2016.

Colocando 2 pessoas em cada metro da fila, ela teria 3,5 bilhões de metros. Você consegue imaginar que medida de distância é essa? O equador (linha imaginária ao redor da maior largura da Terra) tem aproximadamente 40 000 km. Então, como:

3 500 000 000 m = 3 500 000 km

3 500 000 km : 40 000 km = 87,5

a fila daria quase 88 voltas ao redor da Terra!

Alguns números citados nessa situação são muito grandes, mas podemos representá-los de outra forma. O número 3 500 000 000, por exemplo, equivale a $35 \cdot 10^8$.

Potência de 10 com expoente positivo

Para escrever grandes números e operar com eles, recorremos às potências de base 10 com expoentes positivos. Acompanhe:

cem = $1\underbrace{00}_{\text{2 zeros}} = 10^2$

mil = $1\underbrace{000}_{\text{3 zeros}} = 10^3$

10 mil = $1\underbrace{0\,000}_{\text{4 zeros}} = 10^4$

100 mil = $1\underbrace{00\,000}_{\text{5 zeros}} = 10^5$

1 milhão = $1\underbrace{000\,000}_{\text{6 zeros}} = 10^6$

1 bilhão = $1\underbrace{000\,000\,000}_{\text{9 zeros}} = 10^9$

1 trilhão = $1\underbrace{000\,000\,000\,000}_{\text{12 zeros}} = 10^{12}$

1 quatrilhão = $1\underbrace{000\,000\,000\,000\,000}_{\text{15 zeros}} = 10^{15}$

e assim por diante.

Orientações didáticas

Potências de 10 e a notação científica

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA01** ao propor a realização de cálculos com potências de expoentes inteiros e a representação de números em notação científica.

Neste tópico são abordadas as potências de 10 e a notação científica. Espera-se que os estudantes mobilizem os conhecimentos já construídos anteriormente sobre potenciação. Dessa maneira, eles podem aplicar a regularidade das potências de 10 já estudadas para expoente natural, estender para expoente inteiro negativo e calcular expressões envolvendo números em notação científica. Para isso, retome a multiplicação e a divisão de números inteiros e decimais positivos por potências de 10 (como 10, 100, 1 000, etc.).

Aproveite o contexto sobre a população mundial e solicite aos estudantes que pesquisem dados estatísticos e notícias que tragam números muito grandes, apresentados em um formato que favoreça a visualização e a leitura no cotidiano, ou seja, uma representação com número decimal e texto. Por exemplo, a população mundial estimada em 2022 era cerca de 7,9 bilhões de pessoas.

Aproveite a sugestão de leitura complementar e converse com os estudantes sobre o tema desenvolvido no livro que trata da diversidade étnica da população brasileira e do preconceito. Pode-se fazer um trabalho interdisciplinar com o componente curricular **Língua Portuguesa** desenvolvendo a literacia.

Potência de 10 com expoente positivo

Neste tópico é retomada a regularidade das potências de 10 com expoente natural. Antes de apresentar os exemplos, escreva algumas dessas potências na lousa para discussão dos resultados, de modo que os estudantes exponham o conhecimento já construído sobre esse assunto. Verifique como eles fazem os cálculos e se empregam a regularidade já estudada.

Em seguida, acompanhe com os estudantes a escrita dos números indicados no livro e apresente a generalização da notação científica. Depois, discuta com eles os exemplos apresentados e amplie propondo outros similares na lousa.

Orientações didáticas

Atividades

Estas atividades exploram potências de base 10 com expoente natural e a notação científica.

As atividades **12** e **13** podem ser realizadas individualmente para que se verifique o conhecimento construído e possíveis dúvidas de cada estudante.

As atividades **14** a **18** podem ser feitas em duplas ou trios. A discussão entre os pares favorece e enriquece o aprendizado.

Na atividade **18**, após os estudantes levantarem suas hipóteses, pode-se sugerir que façam uma pesquisa em casa ou, se possível, na sala de aula para investigar e comprovar essas hipóteses, obtendo que 1 sextilhão corresponde a 10^{21}. Assim, os estudantes percebem que devem exprimir a constante de Avogadro usando essa potência de 10, ou seja: $6{,}02 \cdot 10^{23} = 602 \cdot 10^{21}$, concluindo que a constante de Avogadro equivale a 602 sextilhões. Ressalte que o número $602 \cdot 10^{21}$ não está escrito em notação científica, porque a parte inteira (602) da representação é maior do que 10.

O número de habitantes da Terra em outubro de 2011 era de 7 bilhões, que é equivalente a $7 \cdot 10^9$.

Essa forma de escrever o número é denominada **notação científica**: ela tem um **coeficiente** (7) e um **expoente** (9). O coeficiente deve ser um número *a* maior ou igual a 1 e menor do que 10.

Notação científica: $a \cdot 10^n$, sendo $1 \leqslant a < 10$.

Vamos converter alguns números escritos em notação científica para a forma decimal:

- $9 \cdot \underbrace{10^5}_{\text{5 zeros}} = 900\,000$
- $3{,}4 \cdot \underbrace{10^8}_{\text{8 zeros}} = 3\underbrace{40\,000\,000}_{\text{a vírgula avança 8 casas}}$

E da forma decimal para a notação científica:

- $\underbrace{1}_{\text{parte inteira do coeficiente}}\overbrace{60\,000\,000}^{\text{8 casas}} = \underbrace{1{,}6}_{\text{coeficiente}} \cdot \overbrace{10^8}^{\text{8 zeros}}$
- $8\underbrace{25\,000\,000\,000}_{\text{11 casas}} = 8{,}25 \cdot 10^{11}$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

12. No caderno, escreva na forma decimal.

a) $3 \cdot 10^7$ 30 000 000

b) $1{,}2 \cdot 10^6$ 1 200 000

c) $4{,}15 \cdot 10^9$ 4 150 000 000

d) $2{,}22 \cdot 10^{10}$ 22 200 000 000

13. No caderno, escreva em notação científica.

a) 700 000 $7 \cdot 10^5$

b) 1 800 000 000 $1{,}8 \cdot 10^9$

c) 35 000 000 $3{,}5 \cdot 10^7$

d) 295 000 000 000 $2{,}95 \cdot 10^{11}$

14. A distância média da Terra ao Sol mede 150 milhões de quilômetros (Fonte dos dados: UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS. Sistema Solar. *Observatório Astronômico*. Disponível em: https://www.unifal-mg.edu.br/observatorio/sistema-solar/. Acesso em: 12 abr. 2022.). Escreva, no caderno, essa medida de distância em quilômetros e em notação científica. $1{,}5 \cdot 10^8$ km

15. Em 2021, o comércio eletrônico no Brasil faturou 161 bilhões de reais (Fonte dos dados: BUSS, Gabriel. *E-commerce cresceu 27% em 2021 e faturou R$ 161 bi, diz levantamento*. Disponível em: https://www.poder360.com.br/economia/e-commerce-cresceu-27-em-2021-e-faturou-r-161-bi-diz-levantamento/. Acesso em: 12 abr. 2022). Escreva, no caderno, essa quantia em reais e em notação científica. $1{,}61 \cdot 10^{11}$ reais

16. Responda, no caderno, às seguintes questões:

a) Qual número é o maior: $1{,}1 \cdot 10^{10}$ ou $9{,}9 \cdot 10^9$? $1{,}1 \cdot 10^{10}$

b) A igualdade $160\,000\,000 = 16 \cdot 10^7$ é correta? E $16 \cdot 10^7$ é a notação científica de 160 000 000? Sim. Não, a notação científica correta é $1{,}6 \cdot 10^8$.

17. No caderno, escreva em notação científica cada número a seguir.

a) $52{,}5 \cdot 10^6$ $5{,}25 \cdot 10^7$

b) $3\,256 \cdot 10^4$ $3{,}256 \cdot 10^7$

c) $0{,}25 \cdot 10^5$ $2{,}5 \cdot 10^4$

d) $0{,}0183 \cdot 10^8$ $1{,}83 \cdot 10^6$

18. Um número utilizado no estudo das Ciências é $6{,}02 \cdot 10^{23}$, conhecido como constante de Avogadro. Esse número equivale a quantos sextilhões? 602 sextilhões.

Potência de 10 com expoente negativo

Também recorremos às potências de 10 e à notação científica para escrever números positivos muito pequenos e operar com eles. Para isso, usamos expoentes negativos:

- 1 décimo $= \overbrace{0{,}\underbrace{}_{}1}^{\text{1 casa}} = 10^{-1}$ (1 casa; 1 zero)
- 1 décimo de milésimo $= 0{,}0001 = 10^{-4}$ (4 casas; 4 zeros)
- 1 centésimo $= 0{,}01 = 10^{-2}$ (2 casas; 2 zeros)
- 1 milionésimo $= 0{,}000001 = 10^{-6}$ (6 casas; 6 zeros)
- 1 milésimo $= 0{,}001 = 10^{-3}$ (3 casas; 3 zeros)
- 1 bilionésimo $= 0{,}000000001 = 10^{-9}$ (9 casas; 9 zeros)

Podemos, por exemplo, escrever o número cinco bilionésimos em notação científica $(5 \cdot 10^{-9})$ ou na representação decimal (0,000000005).

Vamos converter outros números de uma representação para a outra:

- $2{,}6 \cdot 10^{-4} = 0{,}00026$ (a vírgula recua 4 casas)
- $5{,}25 \cdot 10^{-4} = 0{,}0000000000525$ (a vírgula recua 11 casas)
- $0{,}000333 = 3{,}33 \cdot 10^{-4}$ (4 casas)

Atividades

Faça as atividades no caderno.

19. No caderno, escreva na forma decimal.

a) $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ 0,0013

b) $4{,}25 \cdot 10^{-5}$ 0,0000425

c) $1{,}11 \cdot 10^{-4}$ 0,000111

d) $8 \cdot 10^{-6}$ 0,000008

20. No caderno, escreva em notação científica.

a) 0,000012 $1{,}2 \cdot 10^{-5}$

b) 0,000007 $7 \cdot 10^{-6}$

c) 0,01111 $1{,}111 \cdot 10^{-2}$

d) 0,00222 $2{,}22 \cdot 10^{-3}$

21. O professor Tarcísio disse: "A gota de água tem cerca de 0,05 grama. A partir daí, podemos estabelecer que o litro de água, cuja massa mede 1 000 gramas, contém cerca de 20 000 gotas. Assim, o volume da gota mede 0,00005 litro". No caderno, reescreva a frase do professor colocando na notação científica os quatro números citados. $5 \cdot 10^{-2}$; $1 \cdot 10^3$; $2 \cdot 10^4$; $5 \cdot 10^{-5}$.

22. Qual número é menor: $5{,}5 \cdot 10^{-5}$ ou $6{,}6 \cdot 10^{-6}$? $6{,}6 \cdot 10^{-6}$

Propriedades das potências

Velocidade da luz

A velocidade da luz no vácuo mede 300 000 quilômetros por segundo. Se 1 hora tem 3 600 segundos, que medida de distância percorre a luz em 5 horas?

Em 5 horas há $5 \cdot 3\,600$ segundos $= 18\,000$ segundos.

Se, em cada segundo, a luz percorre 300 000 (ou $3 \cdot 10^5$) km, em 18 000 (ou $1{,}8 \cdot 10^4$) segundos ela percorrerá 300 000 km/s · 18 000 s, o que dá 5 400 000 000 (ou $5{,}4 \cdot 10^9$) km.

Então, temos $(3 \cdot 10^5) \cdot (1{,}8 \cdot 10^4) = 5{,}4 \cdot 10^9$.

Repare que $10^5 \cdot 10^4 = 10^{5+4}$ e que, ao multiplicar as potências de 10, conservamos a base 10 e adicionamos os expoentes 5 e 4. Esta é uma das propriedades das potências, que estudaremos a seguir.

Alf Ribeiro/Shutterstock

A fotografia de longa exposição dos veículos dá a impressão de que a luz deixa rastros. Rodovia Comandante João Ribeiro Barros, em Marília (SP), 2019.

Proposta para o professor

Destacamos 2 artigos que podem enriquecer o trabalho docente envolvendo números muito grandes e números muito pequenos:

PROFESSOR NEWS. *Como ler e escrever números muito grandes ou muito pequenos*. 18 mar. 2015. Disponível em: https://professornews.com.br/utilidades/dicas-de-redacao/7317-como-ler-e-escrever-numeros-muito-grandes-ou-muito-pequenos.html.

PROFESSOR NEWS. *Leitor de números "gigantescos" ou "minúsculos"*. 24 set. 2020. Disponível em: https://www.professornews.com.br/utilidades/dicas-de-redacao/10672-leitor-de-numeros-gigantescos-ou-minusculos.html.

Acesso em: 7 jun. 2022.

Orientações didáticas

Potência de 10 com expoente negativo

Neste tópico são exploradas as potências de base 10 e a notação científica com expoente negativo. Discuta os exemplos com os estudantes e, se julgar necessário, proponha outros similares na lousa para serem discutidos em duplas. Acompanhe-os nessa tarefa, percorrendo as duplas pela sala, e intervenha quando verificar dúvidas não sanadas.

Atividades

Estas atividades exploram potências de 10 com expoente inteiro positivo ou negativo e notação científica envolvendo tais potências.

As atividades **19** e **20** podem ser realizadas individualmente para que seja possível verificar o conhecimento construído e possíveis dúvidas de cada estudante.

Já as atividades **21** e **22** podem ser discutidas em duplas para enriquecimento do aprendizado.

Propriedades das potências

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA01**, ao propor a realização de cálculos com potências de expoentes inteiros e a representação de números em notação científica; e **EF08MA03**, na resolução de problemas de contagem envolvendo o princípio multiplicativo. Em *Participe*, mobiliza com maior ênfase a **CG02** e a **CEMAT02** por instigar a curiosidade e a imaginação, auxiliar no desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para resolver problemas.

Neste tópico são exploradas as propriedades da potenciação para base racional e expoente inteiro. Essas propriedades são empregadas na resolução de problemas envolvendo potências e nas operações realizadas com números expressos em notação científica.

Explore o texto sobre a velocidade da luz com os estudantes e aproveite o contexto para desenvolver um trabalho interdisciplinar com o componente curricular **Ciências**, ampliando o conhecimento dos estudantes com relação às características da luz.

Orientações didáticas

Participe

No boxe *Participe*, os estudantes retomam a lenda do jogo de xadrez e fazem cálculos de grãos envolvendo potências de base 2 e aproximações por potências de base 10. Esse trabalho pode ser feito em grupos para que os estudantes tenham a possibilidade de discutir e formular conjecturas relacionadas à interpretação do texto.

Comente sobre a comparação entre potências de 2 e potências de 10, para propiciar o trabalho com estimativa e aproximação. À medida que se avança nas casas do tabuleiro, o estudante pode perceber claramente que o número aumenta de maneira alarmante, e essa percepção só acontece porque existe a comparação com a potência de 10, que ele supostamente já conhece.

Proponha outras atividades em que os estudantes devem estimar quantidades em termos de ordens de grandeza (comprimentos, massas, valores monetários, etc.).

Multiplicação de potências de mesma base

Neste tópico é estudada uma propriedade da potenciação que é a multiplicação de potências de mesma base. Aplicando essa propriedade, os estudantes efetuam a multiplicação de maneira mais simplificada, operando apenas com os expoentes.

Discuta os exemplos do livro com os estudantes. Se julgar necessário, proponha outros similares na lousa para serem discutidos em duplas. Acompanhe-os nessa tarefa, percorrendo as duplas pela sala, e intervenha quando verificar dúvidas não sanadas.

Participe — Faça as atividades no caderno.

Releia o texto sobre a lenda do jogo de xadrez no primeiro *Participe* deste capítulo. Depois, leia a seguir o desfecho dessa lenda.

O rei esperava que o jovem lhe pedisse como recompensa algo muito valioso e espantou-se ao ouvir o pedido dos grãos de trigo, achando-o muito modesto. Ordenou que fosse pago imediatamente. Os sábios do reino puseram-se a fazer cálculos e demorou muito até que voltassem, assustadíssimos, e comunicassem que, para pagar tal recompensa, nem todas as safras de trigo colhidas por 2 000 anos seriam suficientes.

DenisNata/Shutterstock

O trigo é um dos cereais mais consumidos no mundo.

Vamos analisar a situação:

- 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro;
- 2 grãos pela segunda casa;
- 2^2 grãos pela terceira casa;
- 2^3 grãos pela quarta casa; e assim por diante.

a) Pela 11ª casa seriam 2^{10} grãos. Quanto é 2^{10}? Por qual potência de 10 podemos aproximar esse resultado? 1 024; 10^3.

b) Pela 21ª casa seriam 2^{20} grãos. Usando a resposta do item **a**, por qual potência de 10 podemos aproximar a potência 2^{20}? Essa potência é igual a quanto? 10^6; 1 milhão.

c) E 2^{30}? 10^9; 1 bilhão.

d) E 2^{40}? 10^{12}; 1 trilhão.

e) E 2^{50}? 10^{15}; 1 quatrilhão.

f) E 2^{60}? 10^{18}; 1 quintilhão.

g) Só pela última casa o rei deveria pagar 2^{63} grãos de trigo. A quantos grãos corresponde essa potência usando a aproximação $2^{10} \simeq 10^3$? 8 quintilhões de grãos.

h) O rei deveria pagar por todas as casas. Só pelas 4 últimas, quanto seria? 15 quintilhões de grãos.

Ao perceber a inteligência do jovem, o rei o chamou para juntar-se aos sábios do reino. E dessa maneira o jovem perdoou a dívida do rei!

Multiplicação de potências de mesma base

Acompanhe o raciocínio e compare a expressão inicial com a final nas seguintes multiplicações de potências de mesma base:

- $a^5 \cdot a^3 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{5 \text{ fatores}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a)}_{3 \text{ fatores}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{8 \text{ fatores}} = a^8 = a^{5+3}$
- $a^{-2} \cdot a^6 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot a^6 = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4 = a^{(-2)+6}$, com $a \neq 0$

Então, $a^5 \cdot a^3 = a^{5+3}$ e $a^{-2} \cdot a^6 = a^{(-2)+6}$, com $a \neq 0$.

Um **produto de potências** de mesma base é igual à potência que se obtém conservando a base e adicionando os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exemplos

- $(0{,}12)^3 \cdot (0{,}12)^4 = (0{,}12)^{3+4} = (0{,}12)^7$
- $x^4 \cdot x^{-1} \cdot x^2 = x^{4-1+2} = x^5$

Proposta para o estudante

Proponha aos estudantes que calculem as expressões numéricas sem utilizar a propriedade de multiplicação de potências de mesma base.

a) $2^3 \cdot 5^{-2}$

b) $2^3 \cdot 2^{-2}$

Espera-se que eles realizem primeiro o cálculo das potências, para depois efetuar a multiplicação:

a) $2^3 \cdot 5^{-2} = 8 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 8 \cdot \frac{1}{25} = \frac{8}{25} = 0{,}32$

b) $2^3 \cdot 2^{-2} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$

Depois de apresentar a propriedade, peça que calculem novamente essas expressões, aplicando a propriedade quando possível. Espera-se que eles percebam que a expressão do item **a** não está em condição para que se aplique a propriedade de multiplicação de potências de mesma base, mas a expressão do item **b**, sim. Então, aplicando essa propriedade na expressão do item **b**, temos:

$2^3 \cdot 2^{-2} = 2^{3+(-2)} = 2^{3-2} = 2$

Divisão de potências de mesma base

Acompanhe o raciocínio e compare a expressão inicial com a final nas seguintes divisões de potências de mesma base a, com $a \neq 0$:

- $a^7 : a^3 = \dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a^4 = a^{7-3}$
- $a^2 : a^{-5} = a^2 : \left(\dfrac{1}{a}\right)^5 = \dfrac{a \cdot a}{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}} = \dfrac{a^2}{\frac{1}{a^5}} = a^2 \cdot a^5 = a^7 = a^{2-(-5)}$
- $a^{-3} : a^1 = \left(\dfrac{1}{a}\right)^3 : a = \left(\dfrac{1}{a}\right)^3 \cdot \dfrac{1}{a} = \left(\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{a}\right) \cdot \dfrac{1}{a} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^4 = a^{-4} = a^{(-3)-1}$

Então, sendo $a \neq 0$, temos $a^7 : a^3 = a^{7-3}$, $a^2 : a^{-5} = a^{2-(-5)}$ e $a^{-3} : a^1 = a^{-3-1}$.

> Um **quociente de potências de mesma base** é igual à potência que se obtém conservando a base e subtraindo os expoentes.
> $a^m : a^n = a^{m-n}$, para $a \neq 0$

Exemplos

- $10^7 : 10^2 = 10^{7-2} = 10^5$
- $6^{10} : 6^{-2} = 6^{10-(-2)} = 6^{12}$
- $\dfrac{a^{-1}}{a^{-2}} = a^{-1-(-2)} = a^{-1+2} = a^1 = a$, com $a \neq 0$

Multiplicação de potências de mesmo expoente

Acompanhe as passagens na multiplicação de duas potências de mesmo expoente:

$$a^3 \cdot b^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^3$$

Então, $a^3 \cdot b^3 = (a \cdot b)^3$.

Assim, por exemplo: $4^3 \cdot 10^3 = (4 \cdot 10)^3$.

Isso significa que podemos calcular o valor da expressão $4^3 \cdot 10^3$ reduzindo-a a uma só potência de expoente 3, em que a base é o produto das duas bases: 4 e 10.

Temos: $4^3 \cdot 10^3 = (4 \cdot 10)^3 = 40^3 = 40 \cdot 40 \cdot 40 = 64\,000$.

Exemplos

- $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \cdot 4^5 \cdot (-3)^5 = \left[\dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-3)\right]^5 = (-6)^5$
- $10^{-1} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1} = \left(10 \cdot \dfrac{1}{5}\right)^{-1} = 2^{-1}$

> Um **produto de potências de mesmo expoente** é igual à potência que se obtém multiplicando as bases e conservando o expoente.
> $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

Outros exemplos:

- $(5a)^2 = 5^2 \cdot a^2 = 25a^2$
- $(3 \cdot x \cdot y)^2 = 3^2 \cdot x^2 \cdot y^2 = 9x^2y^2$

É incorreto afirmar que $(a + b)^m = a^m + b^m$.

Por exemplo, $(3 + 4)^2 = (7)^2 = 49$, enquanto $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Portanto, $(3 + 4)^2$ e $3^2 + 4^2$ resultam em números diferentes.

Orientações didáticas

Divisão de potências de mesma base

Neste tópico é estudada uma propriedade da potenciação que é a divisão de potências de mesma base. Aplicando essa propriedade, os estudantes efetuam a divisão de maneira mais simplificada, operando apenas com os expoentes.

Depois de trabalhar com os exemplos do Livro do Estudante, proponha outros similares na lousa para que os estudantes obtenham o resultado mentalmente, aplicando essa propriedade.

Multiplicação de potências de mesmo expoente

Neste tópico é estudada uma propriedade da potenciação que é a multiplicação de potências de mesmo expoente.

Depois de trabalhar com os exemplos do Livro do Estudante, proponha outros similares na lousa para que os estudantes obtenham o resultado mentalmente, aplicando essa propriedade.

Proposta para o estudante

Proponha a seguinte atividade complementar para os estudantes:

Classifique cada igualdade como verdadeira ou falsa e justifique.

- $\dfrac{3^3}{3^2} = 3$
- $5^2 : 5^2 = 5$
- $10^{10} \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-5} \cdot 10 = 10$

Respostas e justificativas:

- Verdadeira, pois $\dfrac{3^3}{3^2} = 3^{3-2} = 3^1 = 3$.
- Falsa, pois todo número dividido por ele mesmo resulta em 1, ou ainda: $5^2 : 5^2 = 5^{2-2} = 5^0 = 1$.
- Verdadeira, pois $10^{10} \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-5} \cdot 10 = 10^{10-5-5+1} = 10^1 = 10$.

Orientações didáticas

Divisão de potências de mesmo expoente

Neste tópico é estudada uma propriedade da potenciação que é a divisão de potências de mesmo expoente.

Discuta os exemplos de modo que os estudantes percebam que o que se mantém é o expoente que é igual para o dividendo e o divisor.

Ressalte que essa propriedade pode ser encarada como a potência de um quociente. Verificando que, se $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)$, então $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Potência de potência

Neste tópico é estudada uma propriedade da potenciação que é a potência de potência.

Proponha aos estudantes que, reunidos em duplas, discutam os exemplos do livro. Em seguida, peça que registrem no caderno as dúvidas que podem ter surgido para serem discutidas com a turma durante a sistematização do conteúdo.

Divisão de potências de mesmo expoente

Acompanhe as passagens na divisão de duas potências de mesmo expoente, em que $b \neq 0$:

$$a^3 : b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = (a : b)^3\text{; então, } a^3 : b^3 = (a : b)^3.$$

Por exemplo, $32^3 : 8^3 = (32 : 8)^3$.

Isso significa que podemos calcular o valor da expressão $32^3 : 8^3$ reduzindo-a a uma só potência de expoente 3, em que a base é o quociente da divisão das duas bases: 32 e 8. Temos: $32^3 : 8^3 = (32 : 8)^3 = 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Exemplos

- $90^{-2} : 30^{-2} = (90 : 30)^{-2} = 3^{-2}$
- $\left(\frac{7}{4}\right)^6 : \left(-\frac{1}{8}\right)^6 = \left[\frac{7}{4} : \left(-\frac{1}{8}\right)\right]^6 = \left[\frac{7}{4} \cdot (-8)\right]^6 = (-14)^6$

Um **quociente de potências de mesmo expoente** é igual à potência que se obtém dividindo-se as bases e conservando-se o expoente.

$$a^m : b^m = (a : b)^m\text{, ou } \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m\text{, para } b \neq 0$$

Outros exemplos:

- $\left(\frac{a}{3}\right)^4 = \frac{a^4}{3^4} = \frac{a^4}{81}$
- $\left(\frac{2 \cdot x}{5}\right)^2 = \frac{(2 \cdot x)^2}{5^2} = \frac{2^2 \cdot x^2}{5^2} = \frac{4x^2}{25}$

Potência de potência

Vamos elevar ao cubo a potência a^5.

Temos: $(a^5)^3 = a^5 \cdot a^5 \cdot a^5 = a^{15}$; então, $(a^5)^3 = a^{5 \cdot 3}$.

Também podemos concluir que:

- $(a^{-2})^4 = (a^{-2})(a^{-2})(a^{-2})(a^{-2}) = a^{-2-2-2-2} = a^{-8} = a^{(-2) \cdot 4}$

  Então, $(a^{-2})^4 = a^{(-2) \cdot 4}$, com $a \neq 0$.
- $(a^3)^{-2} = \left(\frac{1}{a^3}\right) = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^3 \cdot a^3} = \frac{1}{a^6} = a^{-6} = a^{3 \cdot (-2)}$

  Então, $(a^3)^{-2} = a^{3 \cdot (-2)}$, com $a \neq 0$.

Uma **potência elevada a um dado expoente** é igual à potência que se obtém conservando-se a base e multiplicando-se os expoentes.

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

Exemplos

- $(10^7)^{11} = 10^{7 \cdot 11} = 10^{77}$
- $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{3 \cdot 4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{12}$
- $(x^5)^{-2} = x^{5 \cdot (-2)} = x^{-10}$, com $x \neq 0$

Proposta para o estudante

Para ampliação, proponha expressões numéricas na lousa nas quais se possa aplicar mais de uma propriedade. Por exemplo:

a) $(2^3 \cdot 10^4)^2 = (2^3)^2 \cdot (10^4)^2 = 2^6 \cdot 10^8 = 64 \cdot 100\,000\,000 = 6\,400\,000\,000$

b) $(5^{-1} : 2^{-2})^3 = (5^{-1})^3 : (2^{-2})^3 = 5^{-3} : 2^{-6} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{5^3} : \frac{1}{2^6} = \frac{1}{5^3} \cdot \frac{2^6}{1} = \frac{2^6}{5^3} = \frac{64}{125} = 0{,}512$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

23. Na Grécia antiga, o maior número que tinha uma denominação era 10 000 e chamava-se **miríade**. Arquimedes, um matemático grego, intrigado com a quantidade de grãos de areia existentes na face da Terra, pensou em um método de expressar números muito grandes, começando por uma "miríade de miríades".

Reprodução/Departamento de Matemática, Universidade de Nova York, EUA.

Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) em gravura da obra *Vrais pourtraits et vies des homes illustres*, de Andre Thevet, 1584.

a) No caderno, escreva uma miríade na forma de potência de 10. 10^4

b) Quanto é uma miríade de miríades? 100000000 ou 10^8.

24. Calcule, expressando o resultado em notação científica.

a) $(1{,}25 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^8)$ $7{,}5 \cdot 10^{12}$

b) $(4{,}5 \cdot 10^7) : (2{,}5 \cdot 10^4)$ $1{,}8 \cdot 10^3$

c) $(3{,}2 \cdot 10^{-2}) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-6})$ $4{,}8 \cdot 10^{-8}$

d) $(6 \cdot 10^4) \cdot (5{,}5 \cdot 10^6)$ $3{,}3 \cdot 10^{11}$

25. Reduza a uma só potência.

a) $10^3 \cdot 10^2$ 10^5

b) $10^8 : 10^5$ 10^3

c) $2^4 \cdot 5^4$ 10^4

d) $2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-2}$ 30^{-2}

e) $60^3 : 12^3$ 5^3

f) $250^4 : 125^4$ 2^4

g) $(2^2)^3$ 2^6

h) $(10^{-1})^{-2}$ 10^2

26. Um ano-luz é a medida de distância que a luz percorre em um ano.

a) Expresse um ano-luz em quilômetros, em notação científica. Aproxime o coeficiente usando uma casa decimal. $9{,}5 \cdot 10^{12}$

b) A quantos quilômetros da Terra está uma estrela que dela dista 6 anos-luz? Aproximadamente $5{,}7 \cdot 10^{13}$ km

27. Simplifique, no caderno, aplicando as propriedades das potências.

a) $9{,}8^2 \cdot 9{,}8^3 \cdot 9{,}8^{-1}$ $9{,}8^4$

b) $10^8 : 10^5$ 10^3

c) $a^{10} \cdot b^{10} \cdot c^{10}$ $(a \cdot b \cdot c)^{10}$

d) $(a \cdot x)^2$ $a^2 \cdot x^2$

e) $(-0{,}5)^5 : (-0{,}5)^2$ $(-0{,}5)^3$

f) $\left(\frac{a}{2}\right)^3$ $\frac{a^3}{8}$

g) $\left(\frac{2 \cdot a^2}{5}\right)^3$ $\frac{8a^6}{125}$

h) $(17^5)^{-3}$ $(17)^{-15}$

28. Retorne à fala do professor Tarcísio, na atividade **21**, e responda:

a) Que conta ele fez para descobrir quantas gotas há em 1 litro de água? Dividiu 1 000 g por 0,05 g.

b) Indique essa conta com os números em notação científica e aplique uma propriedade das potências para obter a resposta em notação científica. $(1 \cdot 10^3) : (5 \cdot 10^{-2}) = (1 : 5) \cdot 10^{3-(-2)} = 0{,}2 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^4$

Orientações didáticas

Atividades

Estas atividades exploram a aplicação das propriedades da potenciação estudadas.

As atividades **23** a **25** podem ser realizadas individualmente para que se verifique o conhecimento construído e possíveis dúvidas de cada estudante. A atividade **23** traz uma informação histórica sobre o desafio do matemático Arquimedes. Acesse o *site* sugerido e, se jugar conveniente, compartilhe com os estudantes as informações que ele traz.

As atividades **26** a **35** podem ser discutidas em duplas. A cada atividade realizada, faça a correção, pois dúvidas sanadas em uma atividade podem auxiliar nas resoluções das seguintes.

Proposta para o professor

A referência a seguir traz informações sobre Arquimedes, suas reflexões, desafios e descobertas. Nesta página do IMPA há um *link* que dá acesso a mais informações no *site* da BBC Brasil.

IMPA. *O desafio de Arquimedes para contar grãos de areia*. Rio de Janeiro, 22 fev. 2021. Disponível em: https://impa.br/noticias/o-desafio-de-arquimedes-para-contar-graos-de-areia/. Acesso em: 23 jun. 2022.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **29**, peça a uma dupla de estudantes que apresente as justificativas sobre cada item, utilizando a linguagem matemática para deduzir se uma afirmação é verdadeira ou não.

A atividade **30** pode ser utilizada para o desenvolvimento da prática de pesquisa de dados da realidade. O tema em questão ajuda a dar visibilidade à densidade demográfica brasileira. É importante alertar os estudantes para que anotem as fontes consultadas.

Na atividade **35**, há itens em que há mais de um número que torna a igualdade verdadeira, como é o caso do item **a**, em que tanto 10 quanto −10 elevados ao quadrado resultam em 100. Verifique se os estudantes indicaram 2 respostas para os itens **a**, **c**, **d** e **h**.

30. b) Em março de 2022, era $8{,}51 \cdot 10^6$ km², segundo o IBGE, disponível em: https://www.ibge.gov.br/geociencias/organizacao-do-territorio/estrutura-territorial/15761-areas-dos-municipios.html?=&t=o-que-e (acesso em: 9 mar. 2022).

Faça as atividades no caderno.

c) E que conta ele fez para descobrir a medida de volume da gota? Dividiu 1 L por 20 000.

d) Indique essa conta com os números em notação científica e aplique uma propriedade das potências para obter a resposta em notação científica. $(1 \cdot 10^0) : (2 \cdot 10^4) = (1 : 2) \cdot 10^{0-4} = 0{,}5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}$

29. Em cada item, indique no caderno se a igualdade é verdadeira (V) ou falsa (F). (Faça os cálculos, se necessário.)

a) $\dfrac{10^2 \cdot 10^4}{10^3} = 10^3$ V

b) $(2x)^{10} = 2x^{10}$ F

c) $(5 \cdot 3)^2 = 5^2 \cdot 3^2$ V

d) $(5 : 3)^2 = 5^2 : 3^2$ V

e) $(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$ F

f) $(5 - 3)^2 = 5^2 - 3^2$ F

30. Pesquise os dados atuais, em fontes confiáveis, como no *site* do IBGE (ibge.gov.br), e escreva, no caderno, em notação científica:

a) a população aproximada do Brasil; Em março de 2022 era $2{,}14 \cdot 10^8$ habitantes segundo o IBGE, disponível em: https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/index.html (acesso em: 9 mar. 2022).

b) a medida de área aproximada da extensão territorial do Brasil (em km²).

Dividindo o resultado do item **a** pelo do item **b**, calcule a **densidade demográfica** do país, isto é, o número de habitantes por quilômetro quadrado. Em março de 2022 era 25,1 hab./km².

31. Um segundo passa muito rapidamente. Contando a partir de agora, daqui a quantos dias terão decorridos $8{,}64 \cdot 10^{10}$ segundos? Vai demorar mais de 2 000 anos ou menos de 2 000 anos? 1 milhão de dias; mais de 2 000 anos.

32. Qual é o número maior? Escreva no caderno.

a) $3{,}2 \cdot 10^6$ ou $8{,}4 \cdot 10^5$ $3{,}2 \cdot 10^6$

b) $6{,}6 \cdot 10^{-11}$ ou $3{,}9 \cdot 10^{-12}$ $6{,}6 \cdot 10^{-11}$

33. Indique no caderno, em cada item, qual é o número menor.

a) $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ ou $8 \cdot 10^{-2}$ $2{,}5 \cdot 10^{-3}$

b) $9{,}9 \cdot 10^{21}$ ou $1{,}1 \cdot 10^{23}$? $9{,}9 \cdot 10^{21}$

34. Calcule no caderno e expresse o resultado usando a notação científica.

a) $(8 \cdot 10^{15}) : (2 \cdot 10^{12})$ $4 \cdot 10^3$

b) $(4{,}5 \cdot 10^6) \cdot (9{,}2 \cdot 10^4)$ $4{,}14 \cdot 10^{11}$

c) $(2{,}25 \cdot 10^4) : (9 \cdot 10^6)$ $2{,}5 \cdot 10^{-3}$

d) $(2 \cdot 10^{-3}) \cdot (5 \cdot 10^{-8})$ $1 \cdot 10^{-10}$ (ou apenas 10^{-10})

35. Copie cada item no caderno escrevendo o número que substitui ▨ para que a igualdade seja verdadeira.

a) $(▨)^2 = 100$ 10 ou −10

b) $(▨)^3 = 64$ 4

c) $(▨)^2 = \dfrac{4}{9}$ $\dfrac{2}{3}$ ou $-\dfrac{2}{3}$

d) $(▨)^2 = 144$ 12 ou −12

e) $(▨)^3 = 27$ 3

f) $(▨)^3 = \dfrac{1}{8}$ $\dfrac{1}{2}$

g) $(▨)^3 = 1$ 1

h) $(▨)^2 = 0{,}04$ 0,2 ou −0,2

Na olimpíada

As invenções de José

(Obmep) José gosta de inventar operações matemáticas entre dois números naturais. Ele inventou uma operação ■ em que o resultado é a soma dos números seguida de tantos zeros quanto for o resultado dessa soma. Por exemplo,

$2 ■ 3 = 5\underbrace{00\,000}_{5\text{ zeros}}$ e $7 ■ 0 = 7\underbrace{0\,000\,000}_{7\text{ zeros}}$ Alternativa **d**.

Quantos zeros há no resultado da multiplicação [a seguir]?

$$(1 ■ 0) \times (1 ■ 1) \times (1 ■ 2) \times (1 ■ 3) \times (1 ■ 4)$$

a) 5 **b)** 10 **c)** 14 **d)** 16 **e)** 18

Na mídia

A corrente do bem

Como iniciar grandes transformações a partir de pequenos passos

Pensar na escola como sendo um lugar que pode gerar uma transformação tão grandiosa que ultrapasse os limites espaciais da vida de um estudante é algo que nos parece longe demais; no entanto, o filme *Corrente do bem* parte dessa premissa [...].

[...] Trata-se da história de um garoto de 12 ou 13 anos, portanto um aluno de 7ª Série [8º ano], com as aulas começando, em seu primeiro dia. Quando o garoto e seus colegas chegam à sala de aula, encontram o professor de Geografia os aguardando, [...]. [...] O professor despreza o material e propõe uma atividade diferenciada: pergunta aos alunos sobre a possibilidade de desenvolvimento de um projeto, mas não um simples trabalho escolar, algo que vá além, que gere consequências, que provoque transformações.

[...] Um dos garotos, de nome Trevor, [...] cria a "Corrente do bem". Essa corrente [...] encaminha-se no sentido de fazer com que as pessoas pratiquem o bem para os outros, sem esperar qualquer devolução ou retorno.

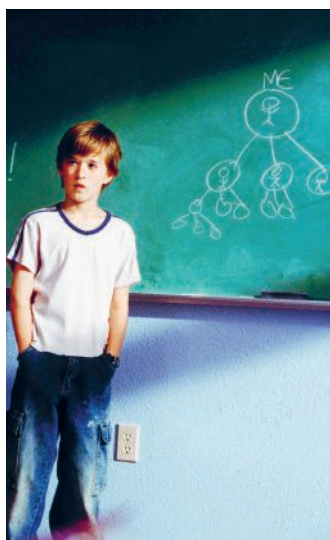
Cada pessoa teria que fazer o bem para 3 indivíduos e pedir que os outros continuassem fazendo o mesmo, ou seja, praticando o bem para outras pessoas e pedindo que elas estendessem essa corrente indefinidamente. De 3 benfeitorias ou benefícios prestados passaríamos numa segunda etapa para 9, dos 9 para 27 e assim sucessivamente.

[...]

PARANÁ. Secretaria da Educação. *A corrente do bem*. [Curitiba]: Secretaria da Educação, [20--?]. Disponível em: http://www.filmes.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=870. Acesso em: 4 mar. 2022.

A.F. ARCHIVE/Alamy/Fotoarena

Cena do filme *Corrente do bem*. EUA, 2000.

A.F. ARCHIVE/Alamy/Fotoarena

Cena do filme *Corrente do bem*. Personagem Trevor, vivido pelo ator Haley Joel Osment, explicando seu projeto escolar.

Proposta para o professor

Caso julgue pertinente promover ações sociais e trabalho voluntário, seguem alguns materiais que podem auxiliá-lo.

INSTITUTO REAÇÃO. Confira 6 dicas para fazer trabalho voluntário e transformar vidas! *Instituto Reação*. [*s. l.*]. Disponível em: https://institutoreacao.org.br/confira-6-dicas-para-fazer-trabalho-voluntario-e-transformar-vidas/.

JENSEN, Kris. Como ajudar sua comunidade. *Wikihow*. [*s. l.*]. Disponível em: https://pt.wikihow.com/Ajudar-sua-Comunidade.

Acesso em: 23 jun. 2022.

Orientações didáticas

Na mídia

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Vida Familiar e Social* e da **CG03**, por valorizar uma manifestação artística no formato de um filme que aborda o conceito matemático de potenciação; da **CG07**, ao auxiliar na capacidade de argumentação baseada em informações confiáveis; da **CG09** e da **CG10**, ao propor ações coletivas que geram transformações baseadas em princípios éticos, democráticos e em respeito mútuo.

Proponha que os estudantes, reunidos em duplas, leiam o texto apresentado. Aproveite o contexto e discuta com eles sobre a atitude do personagem do filme, o garoto Trevor.

Em seguida, solicite que as duplas leiam e discutam as atividades **1** a **3**. Depois da discussão, solicite que registrem no caderno os pontos que geraram dúvidas. Em seguida, promova uma roda de conversa para debater os pontos levantados pelos estudantes e faça um fechamento.

Proponha para a atividade **4** que os estudantes se reúnam em grupos de 4 integrantes e peça que conversem sobre essa tarefa. Ao final, um representante de cada grupo pode ler o texto que elaboraram. Discuta as propostas apresentadas com a turma ou sugira que o texto produzido possa ser exposto em um painel, *blog*, etc.

Além da resolução de problemas matemáticos, ou seja, de propor cálculos numéricos relacionados ao contexto descrito sobre o filme, promova outras atividades que contribuam para a construção da cidadania e do convívio social. Por exemplo: organize um momento para os estudantes assistirem ao filme juntos; incentive que escrevam uma lista de ações que eles mesmos poderiam fazer para ajudar outras pessoas e argumentem explicando como cada ação funcionaria para o bem das pessoas; sugira que coloquem em prática as boas ações em que pensaram.

Orientações didáticas

Na mídia

Na atividade **5**, com as informações das atividades anteriores, é possível discutir a velocidade com que se pode espalhar uma *fake news*, ou então proponha uma nova atividade, por exemplo: uma pessoa mal-intencionada publicou uma notícia falsa e compartilhou com 2 pessoas no intervalo de tempo de 10 minutos. Supondo que, a cada 10 minutos, cada nova pessoa que sabe da notícia divulga para outras 2 que não sabem, pergunte aos estudantes: "Quantas pessoas saberão dessa notícia depois de 1 hora? E depois de 3 horas?". Comente que, depois de 3 horas, o número de pessoas que receberam a *fake news* será superior à população brasileira.

Solicite aos estudantes que façam uma pesquisa sobre notícias divulgadas na internet ou em redes sociais, anotem as fontes de consulta e tragam essas notícias para a aula. Em duplas, os estudantes podem avaliá-las seguindo os passos do guia prático para checagem de *fake news* sugerido no boxe ao final da seção.

Faça as atividades no caderno.

No caderno, faça o que se pede.

1. Na "corrente do bem" proposta no filme, cada um que recebesse algum favor deveria retribuir ajudando outras 3 pessoas. Suponha que você resolveu reproduzir a corrente e, em 10 dias, ajudou 3 pessoas. Após mais 10 dias, cada uma delas ajudou outras 3 pessoas diferentes. Considere que a corrente procedeu dessa maneira, com cada participante ajudando 3 pessoas após 10 dias.

origem da ajuda | após 10 dias | após 20 dias

Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

a) Verifique como a corrente se espalha e copie e complete o quadro até encontrar uma quantidade de pessoas maior do que 1 000. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Medida de tempo (em dias)	Quantidade de novas pessoas que receberam ajuda	Representação em forma de potência
10	3	3^1
20	$3 \cdot 3$	3^2
30	$3 \cdot 3 \cdot 3$	3^3
40	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	3^4
50	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	3^5
60	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	3^6
70	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	3^7

b) Quantas pessoas receberam ajuda até os primeiros 40 dias? 120 pessoas, pois: $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 3 + 9 + 27 + 81 = 120$.

c) Em quantos meses mais de 1 000 pessoas receberam ajuda? 2 meses (60 dias), pois: $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 = 1\,092$.

2. Carolina recebeu uma mensagem na qual estava escrito que ela deveria enviá-la, em 5 minutos, para outras 3 pessoas. Se cada pessoa que receber a mensagem enviá-la novamente para outras 3 pessoas em 5 minutos, após quantos minutos, no mínimo, mais de 100 pessoas terão recebido essa mensagem? 20 minutos, pois: $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$.

3. Você percebeu como uma notícia pode se espalhar rapidamente se o seu crescimento se der por meio de potência? Crie uma mensagem positiva e responda: Qual seria a medida de tempo necessária para que todos os colegas da turma tivessem conhecimento dessa mensagem se você a repassasse para 3 colegas em 5 minutos e cada um dos 3 demorasse 5 minutos para repassar para outros 3 colegas, e assim sucessivamente? Resposta pessoal; depende da quantidade de estudantes da turma.

4. Forme um grupo com 3 colegas e conversem sobre possíveis pequenas ações que vocês consideram que podem gerar grandes transformações. Justifique suas escolhas escrevendo um texto com suas argumentações. Resposta pessoal.

5. Nas questões anteriores, percebemos que uma mensagem pode chegar rapidamente a muitas pessoas. Ainda em grupo com os colegas, conversem sobre as consequências de vincular uma mensagem que contenha informações falsas e sobre como vocês podem evitar esse tipo de ação. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Prática de pesquisa

Para saber como identificar uma informação falsa, verificar sua veracidade ou, em casos mais extremos, denunciar a disseminação de notícias falsas, visite os *sites* (acesso em: 26 maio 2022):

- GOMES, Sheila Freitas; PENNA, Juliana Coelho Braga de Oliveira; ARROIO, Agnaldo Arroio. *Fake news* científicas: percepção, persuasão e letramento. *Ciência & Educação*, Bauru, v. 26, e20018, 2020. DOI: https://doi.org/10.1590/1516-731320200018. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/bW5YKH7YdQ5yZwkJY5LjTts/?format=pdf&lang=pt.
- CONSELHO NACIONAL DE JUSTIÇA. *Painel de checagem de fake news*: guia prático. Disponível em: https://www.cnj.jus.br/programas-e-acoes/painel-de-checagem-de-fake-news/guia-pratico/.

Proposta para o professor

Seguem referências para a discussão sobre a disseminação de *fake news*:

LISBOA, Vinícius. Disseminação de *fake news* sobre coronavírus preocupa especialistas. *Agência Brasil*, 2020. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/saude/noticia/2020-02/disseminacao-de-fake-news-sobre-o-coronavirus-preocupam-especialistas.

MONTEIRO, Ester. Liberdade de Imprensa: o Senado no combate às *fake news*. *Agência Senado*, 2021. Disponível em: https://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2021/06/07/liberdade-de-imprensa-o-senado-no-combate-as-fake-news.
Acesso em: 23 jun. 2022.

CAPÍTULO 4

Radiciação

NA BNCC
EF08MA02
EF08MA09

Raiz quadrada

A herança

Dois irmãos receberam de herança 2 terrenos com a mesma medida de área. O terreno de Pedro era retangular e media 40 m de comprimento da frente por 10 m de comprimento da lateral. O de Paulo era um terreno quadrado. Quantos metros de frente e de lateral tinha o terreno de Paulo?

As imagens não estão representadas em proporção.

Ilustrações: Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Terreno de Pedro
lateral: 10 m
frente: 40 m

Terreno de Paulo
lateral: x m
frente: x m

Como as medidas de área são iguais, precisamos ter:

$$x \cdot x = 40 \cdot 10$$

$$x^2 = 400$$

As medidas de comprimento da frente e da lateral do terreno de Paulo são, em metros, o número positivo que, elevado ao quadrado, resulta em 400.

O número que estamos procurando é a **raiz quadrada** de 400, representada por $\sqrt{400}$. Portanto:

$x = \sqrt{400} = 20$, porque 20 é positivo e $20^2 = 20 \cdot 20 = 400$.

Então, o terreno de Paulo tem 20 m de frente por 20 m de fundo.

> **Raiz quadrada** de um número positivo a, indicada por $\sqrt{a}$, é o número positivo que, elevado ao quadrado, resulta em a.

Em símbolos matemáticos, sendo $a > 0$:

$$\sqrt{a} = b \text{ se } b > 0 \text{ e } b^2 = a.$$

Orientações didáticas

Raiz quadrada

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA02** e **EF08MA09**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo a relação entre potenciação e radiciação e outros envolvendo equações quadráticas. Mobiliza com maior ênfase a **CG05** e a **CEMAT05**, por fomentar a utilização de processos matemáticos e tecnologias digitais, como a calculadora, para a obtenção da raiz quadrada de um número racional positivo. O boxe *Participe* do tópico “Fazendo aproximações” permite desenvolver os TCTs *Ciência e Tecnologia* e *Educação Ambiental*.

No início deste tópico é explorada uma situação para contextualizar a definição de raiz quadrada de um número racional positivo e a raiz quadrada de zero.

Antes de tratar dos textos e exemplos apresentados no livro, converse com os estudantes sobre potências de base racional e expoente 2, deixando que exponham os conhecimentos que já construíram sobre esse assunto. Pergunte aos estudantes: “Que número racional elevado ao quadrado resulta em 81?”; “Qual é o quadrado de −1?”; “E o quadrado de 1?”; “Você sabe dizer qual é a raiz quadrada de 1?”.

Embora −1 elevado ao quadrado também seja 1, a raiz quadrada de 1 é apenas o número 1, que é positivo. O número −1 é negativo e, portanto, não pode ser associado ao resultado de uma raiz quadrada.

Em seguida, discuta com os estudantes o texto do livro, fazendo um fechamento do assunto.

Orientações didáticas

Fazendo aproximações

O boxe *Participe* apresenta questões que ampliam a exploração do cálculo da raiz quadrada.

As atividades **I** e **II** mostram exemplos que sugerem a propriedade: $\sqrt{n^2} = \left(\sqrt{n}\right)^2 = n$, para n racional não negativo.

As atividades **III** e **IV** tratam do cálculo aproximado de raízes quadradas não exatas de números racionais, por meio da calculadora. Comente que no item **b** da atividade **III** o valor obtido pode ser outro, dependendo da quantidade máxima de dígitos da calculadora usada.

Exemplos

- $\sqrt{25} = 5$, porque $5 > 0$ e $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$.
- $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, porque $0{,}5 > 0$ e $(0{,}5)^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.
- $\sqrt{144} = 12$, porque $12 > 0$ e $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$.
- $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, porque $1{,}2 > 0$ e $1{,}2^2 = 1{,}2 \cdot 1{,}2 = 1{,}44$.

Como $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$, definimos:

$$\sqrt{0} = 0$$

Fazendo aproximações

Participe — Faça as atividades no caderno.

I. Rafaela extraiu a raiz quadrada de 784 (ou seja, calculou o valor dessa raiz) e registrou:

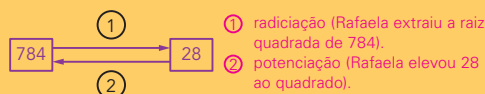
$$\sqrt{784} = 28$$

a) Que potência você deve calcular para conferir se ela acertou? 28^2

b) Ela acertou ou não? Por quê? Sim, porque 28 é positivo e $28^2 = 28 \cdot 28 = 784$.

c) As setas no esquema a seguir estão indicando quais operações realizadas por Rafaela?

784 → (1) → 28; 28 → (2) → 784

(1) radiciação (Rafaela extraiu a raiz quadrada de 784).
(2) potenciação (Rafaela elevou 28 ao quadrado).

d) Qual é o valor de $\sqrt{28^2}$? 28

e) Qual é o valor de $\left(\sqrt{784}\right)^2$? 784

f) Copie a frase a seguir substituindo ////////// pelos valores que a completam corretamente.
Como 14 é positivo e $14^2 =$ //////////, podemos concluir que $\sqrt{//////////} = 14$. 196; 196.

g) Qual é o valor de $\sqrt{14^2}$? 14

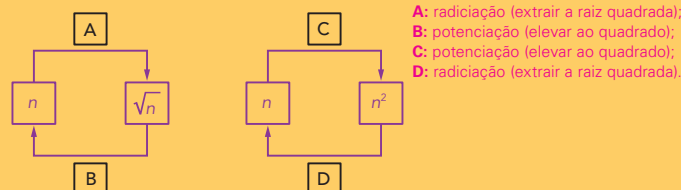
h) Copie a frase a seguir substituindo ////////// pelos valores que a completam corretamente.
$\sqrt{10\,000} =$ //////////, porque ////////// é positivo e $//////////^2 = 10\,000$. 100; 100; 100.

i) Qual é o valor de $\left(\sqrt{10\,000}\right)^2$? 10 000

II. Nas perguntas seguintes, n é um número positivo.

a) De acordo com a definição da raiz quadrada, quais operações estão representadas nos esquemas a seguir?

n → A → $\sqrt{n}$; $\sqrt{n}$ → B → n; n → C → n^2; n^2 → D → n

A: radiciação (extrair a raiz quadrada);
B: potenciação (elevar ao quadrado);
C: potenciação (elevar ao quadrado);
D: radiciação (extrair a raiz quadrada).

b) Qual é o valor de $\left(\sqrt{n}\right)^2$? n

c) Qual é o valor de $\sqrt{n^2}$? n

d) Podemos afirmar que $\left(\sqrt{n}\right)^2 = \sqrt{n^2} = n$? Quando $n \geqslant 0$, sim.

III. Nos itens a seguir faça o que se pede.

Você já viu uma calculadora científica? As calculadoras evoluíram muito com o passar dos anos. A calculadora científica, especificamente, é mais complexa do que a comum, capaz de realizar outras operações matemáticas, além das 4 operações básicas. Em geral, esse tipo de calculadora é usado como apoio em cursos de Ciências Exatas ou Engenharia, por ter na memória funções pré-programadas direcionadas a esse tipo de estudo.

Na cidade de São Carlos, interior de São Paulo, há o Museu de Computação Professor Odelar Leite Linhares, que conta com um acervo com réguas de cálculo dos anos 1960, máquinas de calcular mecânicas e eletromecânicas, ábacos, calculadoras científicas, entre outros equipamentos. Interessante, não é mesmo?

Caso não seja possível visitar o museu presencialmente, há exposições virtuais itinerantes. Acompanhe: UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Exposições Virtuais. *Museu da Computação Professor Odelar Leite Linhares*. Disponível em: https://mc.icmc.usp.br/exposi%C3%A7%C3%B5es-virtuais. Acesso em: 13 mar. 2022.

Do lado de fora, é possível visitar o Museu da Fauna e Flora, um ambiente com espécies arbóreas de grande, médio e pequeno porte e pequenos animais e pássaros não catalogados.

Museu de Computação Professor Odelar Leite Linhares e Museu da Fauna e Flora
Instituto de Ciências e Matemáticas e de Computação – ICMC
Universidade de São Paulo – USP
Avenida Trabalhador São-Carlense, nº 400, Centro.
CEP 13566-590 – São Carlos – SP

Reprodução/Praturista.com

Museu de Computação Prof. Odelar Leite Linhares e Museu da Fauna e Flora, São Carlos (SP). Foto de 2019.

a) Junte-se a 4 colegas. Pegue uma calculadora que tenha a tecla $\sqrt{\ }$ e digite o número 4 088 484 e, a seguir, a tecla $\sqrt{\ }$. Que valor aparece no visor? O que você calculou? 2022; $\sqrt{4\,088\,484}$.

b) Agora, digite o número 10 e, a seguir, a tecla $\sqrt{\ }$. Que número aparece no visor? Exemplo de resposta: 3,16227766.

IV. A resposta à questão anterior não é um valor exato e depende do número de dígitos fornecidos no visor da calculadora. Quando precisamos calcular o valor de raízes quadradas não exatas, podemos usar uma calculadora e fazer aproximações. Por exemplo, considere as seguintes aproximações de $\sqrt{10}$:

com duas casas decimais: $\sqrt{10} = 3{,}16$;

com três casas decimais: $\sqrt{10} = 3{,}162$;

com uma casa decimal: $\sqrt{10} = 3{,}2$.

Agora, use a calculadora e dê o valor das seguintes raízes quadradas com uma, com duas e com três casas decimais.

a) $\sqrt{50}$ 7,1; 7,07; 7,071. **b)** $\sqrt{500}$ 22,4; 22,36; 22,361. **c)** $\sqrt{5\,000}$ 70,7; 70,71; 70,711.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Conhecendo a medida de área de uma figura quadrada, podemos calcular a medida do comprimento do seu lado extraindo a raiz quadrada da medida de área. Qual é a medida do lado de cada uma das figuras quadradas a seguir? 2 cm; 2,5 cm; 3 cm.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4 cm² | 6,25 cm² | 9 cm²

2. Determine, no caderno, o valor das raízes quadradas a seguir.

a) $\sqrt{16}$; 4
b) $\sqrt{100}$; 10
c) $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\frac{1}{3}$
d) $\sqrt{225}$; 15
e) $\sqrt{2{,}25}$; 1,5
f) $\sqrt{0{,}25}$; 0,5
g) $\sqrt{1}$; 1
h) $\sqrt{0{,}01}$; 0,1
i) $\sqrt{0}$; 0
j) $\sqrt{900}$; 30
k) $\sqrt{1{,}69}$; 1,3
l) $\sqrt{\frac{1}{81}}$. $\frac{1}{9}$

Orientações didáticas

Participe

Leia com os estudantes o texto no boxe de sugestão de visita que descreve um pouco do acervo do museu de computação. Se possível, organize uma visita presencial para os estudantes conhecerem esse interessante museu, desenvolvendo assim um trabalho com o TCT *Ciência e Tecnologia*. O outro museu mencionado, da fauna e flora, pode ser explorado para um trabalho com o TCT *Educação Ambiental*, em parceria com o componente curricular **Ciências**.

Atividades

Nestas atividades, o estudante vai mobilizar seus conhecimentos sobre o cálculo da raiz quadrada. Elas podem ser feitas em duplas para o enriquecimento do aprendizado.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **4**, espera-se que os estudantes calculem a raiz quadrada (exata ou aproximada) do valor das medidas de área, obtendo como medida dos lados 1 m, 1,41 m e 1,73 m, que em centímetro equivalem, respectivamente, a 100 cm, 141 cm e 173 cm. Uma explicação possível para usar lajotas com essas medidas de lado é que teremos lajotas com as medidas de área desejadas.

Na atividade **8**, para o cálculo da medida de perímetro, os estudantes devem obter inicialmente a medida exata do lado dos quadrados que compõem o salão, calculando as raízes quadradas das medidas de área. Utilizando uma calculadora, os estudantes podem obter o valor aproximado 9,75 para $\sqrt{95}$ e, assim, o valor aproximado da medida de perímetro dada por 78,98 m é 79 m.

Expoentes racionais não inteiros

Neste tópico é ampliado o cálculo de potências com expoentes racionais não inteiros. Esse assunto é explorado no boxe *Participe*. As atividades desse boxe podem ser resolvidas em duplas ou trios de estudantes para o enriquecimento da discussão. Em seguida, promova uma roda de conversa para a socialização das estratégias e conclusões.

4. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Faça as atividades no caderno.

3. Calcule e indique no caderno os resultados com duas casas decimais.

a) Qual é o valor da raiz quadrada aproximada de 1 000? 31,62

b) Qual é o valor da raiz quadrada aproximada de 1 500? 38,73

4. A Matemática está presente em muitos aspectos da vida, entre eles a construção civil. Nesse campo, para garantir o melhor aproveitamento de materiais e a qualidade nos acabamentos das obras, é preciso calcular medidas de área e de abertura de ângulos, além de porcentagens.

Um fabricante de revestimentos está lançando novos tamanhos de lajotas no mercado; elas serão quadradas e oferecidas em três tamanhos: 1 m², 2 m² e 3 m², números esses que se referem às medidas de suas áreas. As trenas só medem comprimentos com a precisão de centímetros. Sendo assim, qual medida do lado de cada uma dessas lajotas você acha que o fabricante deveria utilizar? Use uma calculadora para fazer os cálculos e justifique a sua decisão.

5. Copie cada igualdade a seguir e descubra o número que deve ser colocado no lugar de ▨ para que a igualdade seja verdadeira.

a) $\sqrt{49}$ = ▨ 7

b) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ = ▨ $\frac{1}{2}$

c) $\sqrt{▨}$ = 11 121

d) $\sqrt{▨} = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$

e) $\sqrt{▨}$ = 0,4 0,16

f) $\sqrt{0,81}$ = ▨ 0,9

6. Classifique cada igualdade em verdadeira (V) ou falsa (F) e justifique sua resposta no caderno.

a) $\sqrt{625} = 25$ V, porque $25 > 0$ e $25^2 = 625$.

b) $\sqrt{62,5} = 2,5$ F, porque $2,5^2 = 6,25$.

c) $\sqrt{6,25} = 2,5$ V, porque $2,5 > 0$ e $2,5^2 = 6,25$.

d) $\sqrt{625} = -25$ F, porque $-25 < 0$.

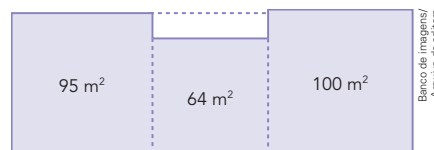
7. Calcule, no caderno, o valor de:

a) $3\sqrt{16} - \sqrt{25}$ 7

b) $\sqrt{3 \cdot 16 + 1}$ 7

8. Calcule o valor exato da medida de perímetro de um salão cuja planta é apresentada a seguir. Depois, use uma calculadora para obter o valor aproximado dessa medida. O espaço ocupado pelo salão é constituído de três partes quadradas justapostas cujas medidas de área reais estão indicadas na planta.

95 m² | 64 m² | 100 m²

Banco de imagens/Arquivo da editora

$40 + 4\sqrt{95}$ m; 79 m aproximadamente.

Expoentes racionais não inteiros

Participe

I. Vamos descobrir quanto é $4^{0,5}$. Para isso, vamos empregar propriedades das potências, que são válidas mesmo quando os expoentes não são inteiros (o que estudaremos no 9º ano). Preste atenção e, no caderno, faça o que se pede nas questões a seguir.

a) Entre quais inteiros consecutivos fica o número 0,5? 0 e 1

b) Calcule o valor da potência de base 4 e expoente igual ao menor desses inteiros. $4^0 = 1$

c) Calcule o valor da potência de base 4 e expoente igual ao maior desses inteiros. $4^1 = 4$

d) Podemos dizer que $4^{0,5}$ é um número compreendido entre quais números? Entre 1 e 4.

e) Uma das propriedades das potências é: $(a^m)^n = a^{▨}$. Qual é o expoente ▨? $m \cdot n$

f) Para descobrir o valor de $4^{0,5}$, vamos reescrever essa potência considerando que $4 = 2^2$. Portanto, $4^{0,5} = (2^2)^{0,5}$. Aplicando a propriedade da questão anterior, descubra o valor de $4^{0,5}$. $4^{0,5} = (2^2)^{0,5} = 2^{2 \cdot 0,5} = 2^1 = 2$

g) O valor encontrado está de acordo com a resposta do item **d**? Por quê? Sim, porque $1 < 2 < 4$.

II. Para descobrir o valor de $4^{0,5}$, podemos também empregar a propriedade do item **e** da questão **I** da seguinte maneira:

a) Que fração irredutível equivale a 0,5? $\frac{1}{2}$

b) Escreva $4^{0,5}$ na forma de 4 elevado a uma fração irredutível. $4^{\frac{1}{2}}$

c) Eleve a potência da questão anterior ao quadrado e calcule o resultado empregando a propriedade do item **e** da questão **I**. Qual é o resultado? $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 4^1 = 4$

d) Como se chama o número positivo que elevado ao quadrado dá a? Como se representa esse número? Raiz quadrada de a; $\sqrt{a}$.

e) Copie e complete:

No item **c** desta questão **II**, descobrimos que $4^{\frac{1}{2}}$ elevado ao quadrado dá ▨. Assim, descobrimos que: $4^{\frac{1}{2}}$ é a ▨ de 4. Simbolicamente, $4^{\frac{1}{2}}$ = ▨. 4; raiz quadrada; $\sqrt{4}$.

Raiz quadrada como potência

Considerando o que descobrimos no *Participe*, podemos escrever que $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}$. Analogamente, podemos escrever, por exemplo, que $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$, etc. Considere o caso de $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$:

- $\sqrt{5}$ é o número positivo que elevado ao quadrado dá 5.
- Elevando $5^{\frac{1}{2}}$ ao quadrado obtemos: $\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 5^1 = 5$.
- Como $5^{\frac{1}{2}}$ elevado ao quadrado dá 5, temos que: $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$.

Sendo $a \geqslant 0$, vale a igualdade $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

9. No caderno, escreva na forma de potência.

a) $\sqrt{6}$ $6^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt{10}$ $10^{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{2}$ $2^{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

10. Calcule o valor das potências no caderno.

a) $9^{\frac{1}{2}}$ 3

b) $64^{\frac{1}{2}}$ 8

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{2}$

d) $(0{,}16)^{0{,}5}$ 0,4

11. No caderno, escreva a raiz quadrada na forma de potência e então faça os cálculos, como no exemplo.

$$\sqrt{81} = 81^{\frac{1}{2}} = \left(9^2\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 9^1 = 9$$

a) $\sqrt{36}$ 6

b) $\sqrt{256}$ 16

c) $\sqrt{1{,}21}$ 1,1

d) $\sqrt{\frac{49}{4}}$ $\frac{7}{2}$

12. Exemplo de resposta: Daniela adora flores e fez um canteiro quadrado de 4 m^2 de medida de área com suas flores preferidas. Qual é a medida de cada lado desse canteiro?
Resposta: $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$. A medida de cada lado é 2 m.

12. No caderno, elabore e escreva um problema envolvendo cálculos com potências de expoente fracionário. Em seguida, troque-o com um colega.

Extração de raiz quadrada por decomposição em fatores primos

Todo número inteiro maior do que 1 ou é número primo ou é número composto. Os números compostos podem ser decompostos em produto de fatores primos. Usualmente, denomina-se **forma fatorada** a representação do inteiro composto como uma potência de um primo ou um produto de potências em que as bases são números primos diferentes colocados em ordem crescente e os expoentes são positivos. Por exemplo:

- A forma fatorada de 81 é 3^4.
- A forma fatorada de 600 é $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$, ou $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, sem a indicação do expoente 1.

Orientações didáticas

Raiz quadrada como potência

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA02** ao relacionar a potenciação e a radiciação para representar uma raiz como potência de expoente fracionário. Mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, ao favorecer a investigação e o desenvolvimento do raciocínio lógico; a **CEMAT03**, ao articular os campos da Matemática Números e Geometria; a **CEMAT05**, ao propor a utilização da calculadora e a **CEMAT06**, na utilização de diferentes registros e linguagens nas resoluções das atividades.

Neste tópico é ampliado o conteúdo das propriedades da potenciação para potências com expoentes racionais. A propriedade potência de potência é usada para expressar a raiz quadrada como potência. Amplie a discussão do assunto propondo mais exemplos na lousa.

Atividades

Neste bloco de atividades, os estudantes devem mobilizar os conhecimentos construídos sobre potência com expoente racional e raiz quadrada como potência. As atividades podem ser feitas individualmente para verificação do aprendizado de cada estudante. Caminhe pela sala e acompanhe os estudantes nessa tarefa, registrando dúvidas e avanços para serem discutidos na correção coletiva.

A atividade **12** pode ser realizada em duplas de estudantes. Depois, proponha a troca dos problemas elaborados, para que cada dupla possa resolver o que foi elaborado pela outra. Ao final, faça um fechamento discutindo os enunciados criados e as resoluções propostas.

Proposta para o estudante

Para complementar a exposição realizada no livro, pode-se indicar o vídeo do Centro de Mídias da Educação do Estado de São Paulo, em que são apresentadas propriedades da raiz quadrada e potência com expoente fracionário.
CMSP. 30/11 – 8º ano EF – Matemática – Raiz quadrada e potência com expoente fracionário. [*s. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (40 min). Publicado pelo canal 8º ano EF - CMSP. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=AFPnSZ4QcMQ. Acesso em: 26 maio 2022.

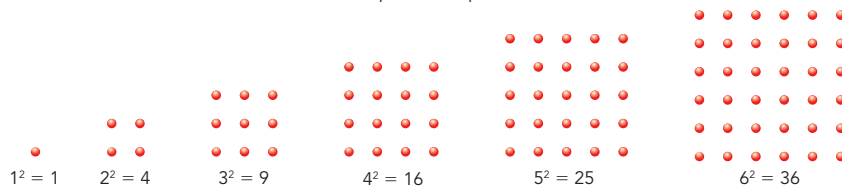
Orientações didáticas

Extração de raiz quadrada por decomposição em fatores primos

Neste tópico é retomado o conceito de número inteiro quadrado perfeito. Os estudantes devem compreender que tais números não podem ser negativos, pois o quadrado de qualquer número é positivo ou zero. Um número quadrado perfeito sempre tem raiz quadrada exata. Além disso, é abordada outra conclusão sobre os inteiros quadrados perfeitos: na decomposição em fatores primos desses números, todos os expoentes sempre são pares. Desse modo, fazendo a decomposição em fatores primos de um número inteiro positivo e não nulo, podemos concluir que ele é um quadrado perfeito se todos os expoentes nessa decomposição são pares e, assim, esse número tem raiz quadrada exata. Espera-se que os estudantes compreendam, então, que se um número inteiro não é um quadrado perfeito, a raiz quadrada dele não é exata, ou seja, a raiz quadrada dele não é um número inteiro.

Recordemos a sucessão de números inteiros quadrados perfeitos:

$1^2 = 1$ $2^2 = 4$ $3^2 = 9$ $4^2 = 16$ $5^2 = 25$ $6^2 = 36$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Denominamos números inteiros **quadrados perfeitos** aqueles cujas raízes quadradas são também números inteiros.

Note, a seguir, um quadro de inteiros quadrados perfeitos com as respectivas raízes quadradas:

n	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$\sqrt{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Vamos analisar as formas fatoradas de alguns inteiros quadrados perfeitos:

- $36 = 6^2 = (2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$ → os expoentes são números pares.
- $144 = 12^2 = (2^2 \cdot 3)^2 = 2^4 \cdot 3^2$ → os expoentes são números pares.
- $10\,000 = 100^2 = (2^2 \cdot 5^2)^2 = 2^4 \cdot 5^4$ → os expoentes são números pares.
- $22\,500 = 150^2 = (2 \cdot 3 \cdot 5^2)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ → os expoentes são números pares.
- $250\,000 = 500^2 = (2^2 \cdot 5^3)^2 = 2^4 \cdot 5^6$ → os expoentes são números pares.

Se o número inteiro n, maior do que 1, é o quadrado do número inteiro positivo p (isto é, se $n = p^2$), então, na forma fatorada de n, cada fator tem expoente par.

Reciprocamente, se a forma fatorada de um número inteiro n só apresenta expoentes pares, então n é um número inteiro quadrado perfeito. Por exemplo:

- se $n = 3^2 \cdot 5^4$, então $n = (3^1 \cdot 5^2)^2 = 75^2$.
- se $n = 2^8 \cdot 5^2 \cdot 11^2$, então $n = (2^4 \cdot 5^1 \cdot 11^1)^2 = 880^2$.

Note que n é o quadrado do número inteiro que se obtém dividindo cada expoente da forma fatorada por 2.

Um número inteiro positivo é **quadrado perfeito** quando, na sua forma fatorada, todos os expoentes são pares.

Vamos verificar se cada número a seguir é inteiro quadrado perfeito ou não.

Exemplo 1

O número 484 é quadrado perfeito?

484	2
242	2
121	11
11	11
1	

$\sqrt{484} = 2^2 \cdot 11^2$

Como os expoentes são pares, 484 é quadrado perfeito.

Qual é o valor de $\sqrt{484}$?

$\sqrt{484} = 484^{\frac{1}{2}} = (2^2 \cdot 11^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot 11^{2 \cdot \frac{1}{2}}$

Então, $\sqrt{484} = 2^1 \cdot 11^1 = 22$.

Ao calcular a raiz quadrada, cada expoente da forma fatorada foi multiplicado por $\frac{1}{2}$, logo, foi dividido por 2. Assim, para obter a raiz quadrada, basta copiar a forma fatorada, dividindo cada expoente por 2, e efetuar os cálculos: $\sqrt{484} = \sqrt{2^2 \cdot 11^2} = 2^1 \cdot 11^1 = 22$.

Exemplo 2

Para saber se o número 400 é quadrado perfeito, escrevemos a sua forma fatorada: $400 = 2^4 \cdot 5^2$.

Como os expoentes são pares, 400 é quadrado perfeito.

Vamos obter a raiz quadrada: $\sqrt{400} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2} = 2^2 \cdot 5^1 = 4 \cdot 5 = 20$.

Exemplo 3

Para saber se o número 288 é quadrado perfeito, escrevemos a sua forma fatorada: $288 = 2^5 \cdot 3^2$.

Como há um expoente ímpar, 288 não é quadrado perfeito. Logo, $\sqrt{288}$ não é número inteiro.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

13. Calcule decompondo em fatores primos e empregando propriedades das potências.

a) $\sqrt{324}$ 18 **b)** $\sqrt{1296}$ 36 **c)** $\sqrt{729}$ 27 **d)** $\sqrt{5\,625}$ 75

14. Verifique se os números inteiros a seguir são quadrados perfeitos. Responda sim ou não no caderno e justifique.

a) 256 Sim; $16^2 = 256$.

b) 392 Não, pois em sua forma fatorada há expoentes que não são pares.

15. Com uma calculadora, extraia a raiz quadrada de cada número a seguir e indique quais deles são inteiros quadrados perfeitos. Alternativas **a** e **b**.

a) 784 **b)** 11 664 **c)** 948 **d)** 9 966

16. O número A é o menor inteiro quadrado perfeito que é maior do que 600. O número B é o maior inteiro quadrado perfeito que é menor do que 600.

a) Descubra qual é o número A. 625

b) Descubra qual é o número B. 576

c) Mostre que a diferença $A - B$ é um inteiro quadrado perfeito. $A - B = 625 - 576 = 49 = 7^2$, logo $A - B$ é inteiro quadrado perfeito.

Raízes de frações

Quando os termos de uma fração são números inteiros quadrados perfeitos, podemos extrair a raiz quadrada da fração decompondo em fatores primos o numerador e o denominador. Para obter a raiz quadrada, dividimos cada expoente das formas fatoradas por 2.

Considere os dois exemplos a seguir.

- $\sqrt{\dfrac{625}{144}}$

$625 = 5^4$; $144 = 2^4 \cdot 3^2$

$$\sqrt{\frac{625}{144}} = \sqrt{\frac{5^4}{2^4 \cdot 3^2}} = \frac{5^2}{2^2 \cdot 3^1} = \frac{25}{4 \cdot 3} = \frac{25}{12}$$

- $\sqrt{20{,}25}$

$20{,}25 = \dfrac{2025}{100}$; $2\,025 = 3^4 \cdot 5^2$; $100 = 2^2 \cdot 5^2$

$$\sqrt{20{,}25} = \sqrt{\frac{2\,025}{100}} = \sqrt{\frac{3^4 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2}} = \frac{3^2 \cdot 5^1}{2^1 \cdot 5^1} = \frac{9 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{45}{10} = 4{,}5$$

Atividades

17. Calcule, na forma de fração ou decimal, o valor de cada raiz quadrada.

a) $\sqrt{\dfrac{225}{256}}$ $\dfrac{15}{16}$ **b)** $\sqrt{5{,}76}$ 2,4 **c)** $\sqrt{\dfrac{4}{1089}}$ $\dfrac{2}{33}$ **d)** $\sqrt{0{,}4225}$ 0,65

Orientações didáticas

Atividades

Este bloco de atividades explora o conceito de quadrado perfeito e o cálculo de raiz quadrada exata pela decomposição em fatores primos.

As atividades **13** a **15** podem ser feitas individualmente para a verificação do aprendizado de cada estudante. Faça a correção ao final de cada atividade resolvida, o que poderá auxiliar na resolução das próximas atividades.

A atividade **16** pode ser proposta para discussão em duplas de estudantes. Sabendo que um inteiro é quadrado perfeito quando ele é o resultado de um número inteiro não negativo elevado ao quadrado, os estudantes podem determinar os números solicitados nos itens **a** e **b** usando esse conceito e observando as condições dadas no enunciado. No item **c**, peça aos estudantes para compartilharem as resoluções e verifique as estratégias que eles usam para provar que $A - B$ é um quadrado perfeito.

Raízes de frações

Neste tópico é abordado o cálculo de raiz quadrada de um número racional positivo expresso na forma fracionária por meio da decomposição em fatores primos do numerador e do denominador. Também é apresentada a raiz quadrada de números racionais positivos expressos na forma decimal. Nesses casos, a ideia é transformar para a forma de fração e aplicar o que está sendo estudado aqui.

Proponha que cada estudante faça a leitura do texto e dos exemplos apresentados no livro com um colega, para depois discutirem com a turma. Registre na lousa as conclusões advindas dessa discussão.

Orientações didáticas

Atividades

Este bloco de atividades explora o conceito de quadrado perfeito e o cálculo da raiz quadrada de números racionais positivos em variados contextos.

As atividades **17** a **19** podem ser feitas individualmente e as atividades **20** a **24**, em duplas de estudantes, com a correção a cada atividade resolvida, a fim de que a discussão das dificuldades geradas em uma atividade possa contribuir para a ampliação de estratégias que podem ser usadas nas próximas.

Na atividade **23**, os estudantes podem perceber que, se o quadrado menor tem 36 cm² de medida de área, a medida do lado dele é 6 cm. Além disso, os 4 triângulos que junto desse quadrado compõem o quadrado maior são triângulos retângulos isósceles e idênticos.

Na atividade **24**, discuta com os estudantes cada problema elaborado e a resolução. Ao final, como um desafio, apresente na lousa outro problema que satisfaça as condições dadas para ser resolvido coletivamente.

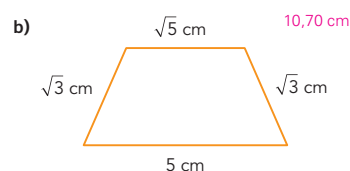
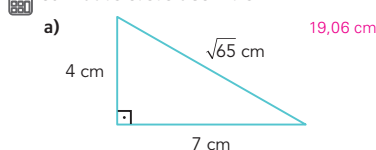
Faça as atividades no caderno.

18. Calcule mentalmente e indique as respostas no caderno.

a) $\sqrt{25}$ 5
b) $\sqrt{2\,500}$ 50
c) $\sqrt{100}$ 10
d) $\sqrt{10\,000}$ 100
e) $\sqrt{\frac{1}{400}}$ $\frac{1}{20}$
f) $\sqrt{\frac{49}{900}}$ $\frac{7}{30}$
g) $\sqrt{0{,}49}$ 0,7
h) $\sqrt{1{,}44}$ 1,2

19. Determine a medida de perímetro de cada polígono a seguir. Utilize uma calculadora para extrair as raízes com duas casas decimais.

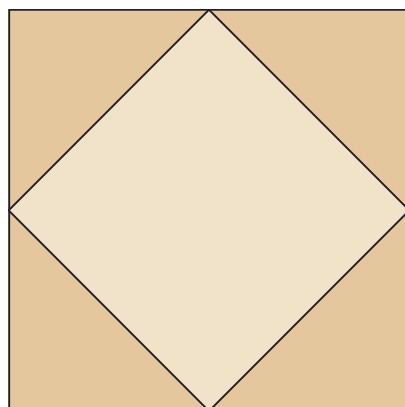
a) 19,06 cm

b) 10,70 cm

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

20. O bisavô de Marcelo nasceu no século XX, em um ano cujo número é um inteiro quadrado perfeito. Em que ano ele nasceu? 1936

21. Qual é o menor número inteiro positivo que devemos multiplicar por 3 000 para obter um inteiro quadrado perfeito? Explique no caderno, com suas palavras, como você encontrou esse resultado. 30; explicação pessoal.

22. Uma pizzaria atende aos pedidos de entrega em casa embalando as *pizzas* em uma caixa de base quadrada de medida de área igual a 1 764 cm². Quanto mede, em centímetros, o lado da base dessa caixa? 42 cm

23. Uma região quadrada de medida de área igual a 36 cm² tem os vértices nos pontos médios dos lados de outra região quadrada.

Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Qual é a medida de área dessa outra região quadrada? Qual é a medida, em centímetros, de seus lados? Use calculadora, se necessário. 72 cm²; 8,49 cm aproximadamente.

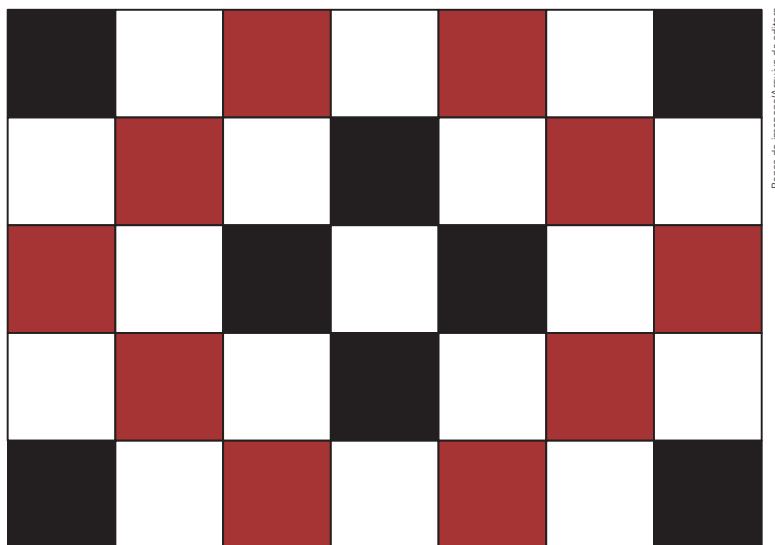
24. O piso de um escritório retangular com medida de área 6,93 m² está forrado com 77 lajotas quadradas. Elabore um problema que use esses dados e em cuja resolução seja necessário empregar conhecimentos de potenciação e de radiciação. Depois, resolva-o com o auxílio de uma calculadora.
Exemplo de resposta: O piso de um escritório retangular cuja medida da área é 6,93 m² está forrado com 77 lajotas quadradas, todas de mesmo tamanho. Qual é a medida do lado de cada lajota? Resposta: 0,3 m = 30 cm.

Equações quadráticas simples

A medida dos lados do azulejo

Um painel retangular constituído de 5 fileiras horizontais e 7 fileiras verticais de azulejos quadrados recobre 12,60 m^2 da superfície de uma parede plana.

Todos os azulejos têm medidas iguais; diferem apenas pela cor. Quanto mede o lado de cada azulejo?

Banco de imagens/Arquivo da editora

Para resolver esse problema, vamos representar por x a medida, em metros, do lado de cada azulejo.

Como $5 \cdot 7 = 35$, o painel tem 35 azulejos, cada um com medida de área igual a x^2 m^2. Sabemos, ainda, que o painel recobre 12,60 m^2 da superfície da parede; portanto, para calcular x precisamos resolver a equação: $35x^2 = 12{,}60$.

Uma equação como essa é chamada **equação quadrática simples**.

> Uma equação quadrática simples é uma equação da forma $ax^2 = b$, em que a e b são números conhecidos e a é diferente de zero.

Para resolver a equação, isolamos x^2 no primeiro membro, dividindo ambos os membros por 35:

$$35x^2 = 12{,}6$$

$$x^2 = \frac{12{,}6}{35} = 0{,}36$$

No problema, x é a medida, em metros, do lado do azulejo; portanto, é um número positivo. O número positivo que elevado ao quadrado resulta em 0,36 é a raiz quadrada de 0,36; logo:

$$x = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

Então, o lado do azulejo mede 0,6 m, ou 60 cm.

Orientações didáticas

Equações quadráticas simples

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA09** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo equações quadráticas. Mobiliza a **CEMAT03** ao articular os campos da Matemática Números e Geometria; e a **CEMAT05** ao propor a utilização da calculadora na resolução das atividades.

Neste tópico é explorada uma aplicação do cálculo da raiz quadrada, estudando as soluções possíveis de equações quadráticas simples, que são da forma $ax^2 = b$, em que a e b são constantes conhecidas. Discuta com os estudantes o fato de essa equação ter solução no campo dos números racionais apenas quando $\frac{b}{a}$ é positivo ou nulo e que a deve ser diferente de zero. Proponha outros exemplos na lousa para que os estudantes possam discutir coletivamente sobre as soluções.

Orientações didáticas

Atividades

Este bloco de atividades explora problemas e questões que envolvem raízes quadradas e equações do tipo $ax^2 = b$. Na correção as atividades, promova um momento de discussão entre os estudantes, pois isso possibilita a ampliação do repertório de estratégias deles e o enriquecimento do aprendizado.

Na atividade **27**, leia com os estudantes o texto sobre o jogo de xadrez e pergunte a eles se sabem jogar. Solicite que pesquisem as regras desse jogo e as tragam escritas para a discussão em aula. Se possível, promova um torneio de xadrez com a turma. Essa atividade, além de lúdica, traz muitos benefícios didáticos.

Na atividade **31**, peça aos estudantes que transcrevam o enunciado que fizeram em uma folha de papel avulsa. Depois, cada um deve trocar de problema com um colega e resolver o problema que o outro criou. Ao final, junto com toda a turma, analise os enunciados e as resoluções apresentadas.

Atividades

As imagens não estão representadas em proporção.

Faça as atividades no caderno.

25. Uma academia de judô dispõe de 5 tatames de tamanho oficial que ocupam uma área que mede 320 m². Os tatames têm formato quadrado. Qual é a medida do lado do tatame oficial? 8 m

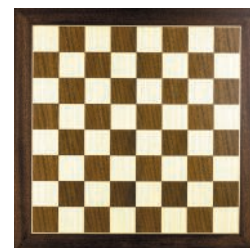
26. Um terreno retangular, cuja medida da frente é o triplo da medida da largura, tem medida de área de 675 m². Calcule as medidas da frente e da largura desse terreno. 15 m; 45 m.

27. [...]

O jogo de xadrez é disputado entre dois oponentes que movem peças alternadamente sobre um tabuleiro quadrado denominado 'tabuleiro de xadrez'. [...]

O tabuleiro de xadrez é composto de uma rede de 8 × 8 com 64 casas iguais alternadamente claras (as casas 'brancas') e escuras (as casas 'pretas').

[...]

LEI do xadrez da Fide. *Confederação Brasileira de Xadrez*, [*s. l.*], [20--?]. Disponível em: http://www.cbx.org.br/files/downloads/Xadrez_lei_da_FIDE.pdf. Acesso em: 11 mar. 2022.

KarSol/Shutterstock

Tabuleiro de xadrez em madeira.

Se um tabuleiro de xadrez, sem a moldura, tem medida de área igual a 2 304 cm², quanto mede, em centímetros, o lado de cada casa? 6 cm

28. Duas figuras geométricas planas são equivalentes quando têm medidas de área iguais. Determine a medida do lado da figura quadrada equivalente à figura de cada item.

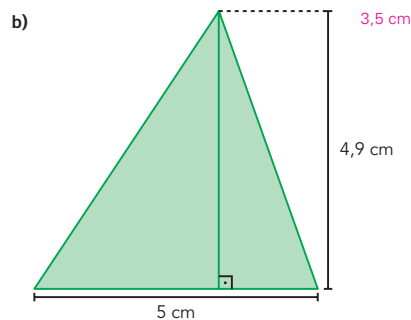
a) 3 cm

2,25 cm

4 cm

b) 3,5 cm

4,9 cm

5 cm

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

29. José Joaquim vai cercar os 4 lados de um terreno retangular de medida de área igual a 1 250 m², em que a medida da frente é o dobro da medida da largura.

x

$2x$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Quantos metros vai medir a cerca na parte da frente do terreno? 150 m

30. Maria Fátima fez um painel retangular de 120 cm por 80 cm justapondo 600 pastilhas quadradas coloridas, todas do mesmo tamanho, sem nenhuma quebra e recobrindo toda a superfície. Quanto mede, em centímetros, o lado de cada pastilha? 4 cm

31. Elabore um problema que possa ser resolvido por meio de uma equação quadrática simples. Desafie um colega a resolvê-lo e tente resolver o dele. Podem usar a calculadora, se necessário.
Exemplo de resposta: A metade da medida de área de um terreno quadrado é 72 m². Quanto mede o lado do terreno? Resposta: 12 m.

Proposta para o professor

Para conhecer os benefícios do jogo de xadrez na escola, segue o artigo:

GESSI, Fernando J. S.; SILVA, Marcelo S. da. A importância e benefícios do xadrez no processo de formação. *Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE*. v. 1, Curitiba, 2014. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_ufpr_edfis_artigo_fernando_jose_sanglard_gessi.pdf. Acesso em: 8 jun. 2022.

Na Unidade

Faça as atividades no caderno.

1. Os três primeiros algarismos de um número inteiro positivo de dez algarismos são iguais a 1 e os demais sete algarismos são iguais a 0. Escrito em notação científica, este número é: Alternativa **c**.

a) $111 \cdot 10^7$
b) $11,1 \cdot 10^8$
c) $1,11 \cdot 10^9$
d) $1,11 \cdot 10^{10}$

2. A linha do equador mede aproximadamente 40 000 km. Em metros, essa medida é: Alternativa **c**.

a) $4 \cdot 10^4$
b) $4 \cdot 10^5$
c) $4 \cdot 10^7$
d) $4 \cdot 10^9$

3. **(Enem)**

Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (10^7) de litros de água potável.

Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas *Veja* (ed. 2055), *Cláudia* (ed. 555), *National Geographic* (ed. 93) e *Nova Escola* (ed. 208) (adaptado).

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consumam 1 000 litros de óleo em frituras por semana. Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade? Alternativa **e**.

a) 10^{-2}
b) 10^3
c) 10^4
d) 10^6
e) 10^9

4. **(Fuvest-SP)** As células da bactéria *Escherichia coli* têm formato cilíndrico, com $8 \cdot 10^{-7}$ metros de diâmetro. O diâmetro de um fio de cabelo é de aproximadamente $1 \cdot 10^{-4}$ metros. Dividindo-se o diâmetro de um fio de cabelo pelo diâmetro de uma célula de *Escherichia coli*, obtém-se, como resultado: Alternativa **a**.

a) 125
b) 250
c) 500
d) 1 000
e) 8 000

5. Simplificando $\frac{4^6 \cdot 4^{-2}}{8^4}$, obtemos: Alternativa **d**.

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{1}{16}$

6. A raiz quadrada exata de 110,25 é: Alternativa **a**.

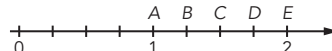
a) 10,5
b) 10,05
c) 10,25
d) 10,55

7. Indique no caderno o número que é inteiro quadrado perfeito: Alternativa **c**.

a) 2 104
b) 2 204
c) 2 304
d) 2 404

8. Na reta numérica, o número $\sqrt{1,96}$ deve ser representado num ponto situado entre: Alternativa **b**.

A B C D E
0 1 2

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) *A* e *B*.
b) *B* e *C*.
c) *C* e *D*.
d) *D* e *E*.

9. Qual dos números a seguir é representado na forma decimal por uma dízima periódica? Alternativa **d**.

a) $\sqrt{\frac{9}{4}}$
b) $\sqrt{\frac{49}{16}}$
c) $\sqrt{\frac{81}{64}}$
d) $\sqrt{\frac{25}{144}}$

10. O piso de um salão retangular de 9 m por 15 m está revestido com 240 lajotas quadradas iguais de um porcelanato. A medida do lado de cada lajota em metros, é: Alternativa **a**.

a) 0,75
b) 0,60
c) 0,50
d) 0,45

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades sobre principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

As atividades **1** a **4** abordam o conteúdo de potenciação e notação científica. Erros na resolução dessas atividades podem ser derivados do não entendimento em relação à representação em notação científica. Retome o conteúdo e dê alguns exemplos na lousa.

A atividade **5** aborda o conteúdo das propriedades da potenciação. Erros na resolução podem ocorrer devido ao não entendimento das propriedades ou à falta de atenção de que um expoente é negativo e, por esse motivo, os estudantes podem efetuar a adição dos expoentes, aplicando a propriedade, ao invés de efetuar a subtração.

A atividade **6** visa verificar se o estudante compreendeu o cálculo da raiz quadrada exata de um número racional com o uso de calculadora. Após obterem o resultado, peça que os estudantes façam a verificação, usando o conceito de raiz quadrada, ou seja, 10,5 é o número que elevado ao quadrado resulta em 110,25. Espera-se, então, que calculem $(10,5)^2$ para tal verificação. Para remediação de possíveis dificuldades, proponha atividades que envolvam cálculos similares para discussão em duplas ou trios. Ao final, solicite que um representante de cada dupla ou trio apresente a resolução de um desses cálculos, promovendo uma discussão da estratégia usada com toda a turma.

A atividade **7** aborda o conteúdo de quadrado perfeito. Se julgar necessário, solicite aos estudantes que a resolvam com o auxílio de uma calculadora.

Para a realização da atividade **8**, os estudantes devem utilizar o conceito de aproximação ao extrair a raiz quadrada e localizar o resultado na reta numérica. Se algum estudante tiver dificuldades nessa localização, oriente-o a localizar em qual ponto está o número 1,5 e pergunte se a raiz quadrada é menor ou maior do que 1,5.

Na atividade **9**, relembre como calcular a raiz quadrada de uma fração e o que é dízima periódica.

Na atividade **10**, o objetivo é verificar as estratégias que os estudantes utilizam na resolução de um problema com contexto geométrico que envolve cálculo da medida de área, operação com números racionais na forma decimal e cálculo de raiz quadrada. Caso haja dificuldade, como remediação, proponha uma releitura do enunciado feita em pequenos grupos. Ao final, cada grupo deve apresentar o que foi compreendido por seus integrantes. A troca de ideias favorece a interpretação do problema e o conhecimento de estratégias de cálculo diversas.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura desta Unidade permite mobilizar com maior ênfase a **CG04** ao explorar a temática da localização e da utilização de tecnologias por meio da análise de textos e imagens; a **CG05** ao propor que os estudantes compreendam a utilização das tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa e reflexiva e a **CG07** ao permitir que os estudantes debatam sobre a ameaça de extinção da onça pintada. Mobiliza, ainda, a **CEMAT05** ao verificar a aplicação de uma ferramenta tecnológica em situações diversas e a **CEMAT07** ao discutir sobre ações utilizadas para proteção da onça-pintada. Favorece o desenvolvimento dos TCTs *Ciência e Tecnologia*, uma vez que permite discutir acerca da funcionalidade do GPS em situações do cotidiano e *Diversidade Cultural* no trabalho com questões relacionadas à língua dos povos indígenas.

A abertura desta Unidade possibilita a realização de um trabalho amplo, uma vez que aborda questões relacionadas a diversas áreas do conhecimento, envolvendo a mesma temática.

Peça aos estudantes que, antes de ler o texto, analisem as imagens apresentadas. Pergunte a eles: "O que vocês acham que essas imagens significam?". Permita que eles respondam usando as próprias palavras e dê espaço para que debatam caso haja diferentes pontos de vista. Em seguida, peça que façam a leitura do texto e proponha que respondam a primeira pergunta do Livro do Estudante: "Que relação existe entre as três imagens da abertura da Unidade?".

Espera-se que os estudantes respondam que as três imagens se relacionam a utilização de dispositivos GPS. Esta é uma boa oportunidade para propor a realização de um trabalho interdisciplinar com as áreas de **Ciências Humanas**, **Ciências da Natureza** e **Linguagens**.

Solicite aos estudantes que se organizem em 5 grupos de modo que cada um execute uma etapa das atividades mostradas a seguir.

Peça ao primeiro grupo que analise a charge apresentada. Proponha que busquem informações sobre o gênero textual charge e quais são suas características. Após as pesquisas, os estudantes devem responder à seguinte pergunta: "A que podemos atribuir o humor presente na charge?". Os estudantes devem perceber que apesar dos personagens estarem num local em que são capazes de se localizar geograficamente usando um dispositivo GPS, ainda se sentem deslocados por não conhecerem o idioma oficial, fazendo-os se sentir deslocados.

---

3 UNIDADE

Triângulos

Ameaçada de extinção, onça-pintada será protegida por "coleira GPS" em MT

Eles afirmam que o nome da onça-pintada significa "menino bonito" no tronco linguístico dos povos indígenas Bororo e Guató [...]

CANDIDO, Marcos. Ameaçada de extinção, onça-pintada será protegida por "coleira GPS" em MT. *Ecoa UOL*, São Paulo, 27 mar. 2022. Disponível em: https://www.uol.com.br/ecoa/ultimas-noticias/2022/03/27/onca-pintada-ganha-coleira-com-gps-no-pantanal-veja-video.htm. Acesso em: 8 abr. 2022.

Sergey Uryadnikov/Shutterstock

Nosopyrik/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- identificar propriedades dos quadriláteros por meio da congruência de triângulos;
- construir ângulos com medida de 90°, 60°, 45° e 30°, retas específicas, como mediatriz e bissetriz, e polígonos regulares;
- resolver problemas aplicando os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos.

CAPÍTULOS

Reprodução do Livro do Estudante em tamanho reduzido.

Patryk Kosmider/Shutterstock

Um dispositivo eletrônico com *GPS* pode ajudar no traçados de rotas rodoviárias, na localização em uma cidade ou um país desconhecido, ou ainda no mapeamento de espécies em risco de extinção.

O GPS NÃO VAI RESOLVER NOSSO PROBLEMA DE "LOCALIZAÇÃO" LINGUÍSTICA.

Frank & Ernest, Bob Thaves © 2017 Thaves/Dist. by Andrews McMeel Syndication

Origem e funcionamento do GPS

O GPS se tornou uma ferramenta indispensável para motoristas localizarem rotas e, também, para cidades terem um controle mais fluido do tráfego. Mas de onde ele surgiu e como é o seu funcionamento?

GPS é a sigla em inglês de *Global Positioning System*, que significa Sistema de Posicionamento Global. Essa ferramenta foi criada nos Estados Unidos em 1978 pelo Departamento de Defesa do país, mas só foi declarada operacional em 1995.

O funcionamento do GPS depende de satélites, que fornecem informações sobre a localização do aparelho receptor na Terra. O aparelho, que pode ser um celular, por exemplo, recebe informações de pelo menos 3 satélites em um processo chamado **triangulação**. Os satélites estão posicionados de modo que em qualquer lugar do planeta um receptor sempre esteja ao alcance de pelo menos 3 deles.

No processo de triangulação, o receptor calcula a medida de tempo que o sinal de cada um dos 3 satélites levou para chegar até ele. Os satélites e receptores possuem um relógio interno que marca os horários com a precisão de 1 nanossegundo. Assim, levando em conta a medida de velocidade de propagação do sinal e as medidas de tempo, o receptor calcula a medida de distância entre os satélites e, situando-se na intersecção das 3 distâncias, identifica a sua localização exata na Terra. Vale ressaltar que essa localização é constantemente atualizada na velocidade da luz.

Fonte dos dados: GPS – O que é, como funciona. *Só Física*. Disponível em: https://www.sofisica.com.br/conteudos/curiosidades/gps.php. Acesso em: 8 dez. 2021.

Leia o texto da charge reproduzida ao lado e responda: Qual o efeito de humor apresentado nela? Depois, analise a notícia e pesquise o significado da expressão "tronco linguístico", presente na notícia apresentada. Converse com os colegas e o professor.

Reflita e discuta com os colegas e o professor: Que relação existe entre as três imagens da abertura da Unidade? Por que o processo de funcionamento do GPS se chama triangulação?

Os exemplos de resposta encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

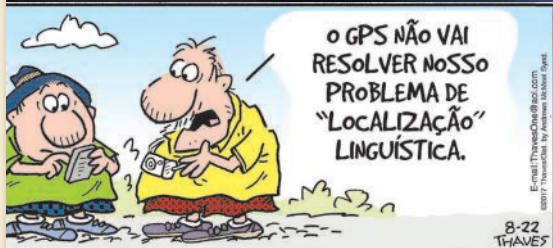
Abertura

O segundo grupo deve analisar a notícia da internet. Peça aos estudantes que pesquisem o significado da expressão "tronco linguístico", que é um conjunto de línguas que têm a mesma origem: uma língua mais antiga que não é mais falada na atualidade. Como essa língua de origem existiu há milhares de anos, as semelhanças entre as línguas que vieram dela são muito difíceis de serem percebidas (fonte dos dados: MIRIM. Povos indígenas do Brasil. *Troncos e famílias linguísticas*. Disponível em: https://mirim.org/pt-br/linguas-indigenas/troncos-familias. Acesso em: 7 jun. 2022).

O terceiro grupo deve fazer uma pesquisa sobre os povos indígenas citados na notícia da internet. Proponha a eles que acessem a notícia da íntegra e que pesquisem sobre os povos mencionados (*Bororo* e *Guató*).

O quarto grupo deve elaborar um cartaz, vídeo ou *podcast* explicando sobre a importância do desenvolvimento de ações que visam à proteção de animais em extinção. Este grupo, pode pesquisar também outras espécies de animais brasileiros que correm riscos de extinção.

O último grupo deve pesquisar acerca do funcionamento do GPS e procurar responder a terceira questão do Livro do Estudante: "Por que o processo de funcionamento do GPS se chama triangulação?".

Após a fase de pesquisas, disponha um tempo para que os estudantes apresentem os resultados para toda turma. Ao final das exposições, peça a eles que reflitam sobre as atividades propostas e os leve a perceber como as diversas áreas de conhecimento estão interligadas.

Proposta para o estudante

Este artigo pode ajudar na compreensão entre o funcionamento do GPS e a Matemática:

ALVES, Sérgio. A matemática do GPS. *Revista do Professor de Matemática*, n. 59, 2006. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/59/5.htm.

Para saber mais sobre o povo indígena Bororo:

POVOS indígenas do Brasil. *Bororo*. Disponível em: https://pib.socioambiental.org/pt/Povo:Bororo.

Para saber mais sobre o povo indígena Guató:

POVOS indígenas do Brasil. *Guató.* Disponível em: https://pib.socioambiental.org/pt/Povo:Guat%C3%B3. Acesso em: 7 jun. 2022.

Orientações didáticas

A ideia de congruência de triângulos

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao apresentar a ideia de congruência de triângulos. Em *Participe*, mobiliza-se com maior ênfase a **CEMAT02** ao propor que os estudantes realizem atividades experimentais envolvendo triângulos.

Este tópico é explorado por meio de experimentos que visam despertar o interesse dos estudantes pelo assunto que será abordado.

Participe

Para a realização dos experimentos propostos, sugerimos que providencie previamente réguas e transferidores.

Para introduzir o conceito de congruência de triângulos, resgate, oralmente, os conhecimentos prévios necessários por meio da questão: "Como podemos identificar quando um triângulo é equilátero, isósceles ou escaleno?". Em seguida, proponha a realização dos experimentos.

No experimento **1**, antes de os estudantes sobreporem os triângulos, questione-os sobre quais podem ter medidas iguais nos ângulos e nos comprimentos dos lados. Para este momento, os estudantes devem utilizar o transferidor e a régua para a verificação das medidas e obtenção de conclusões.

Esta é uma boa oportunidade de introduzir o conceito de semelhança entre os triângulos. Todos os triângulos equiláteros são semelhantes – os ângulos são todos congruentes e os pares de lados correspondentes são proporcionais.

CAPÍTULO 5

Congruência de triângulos

NA BNCC
EF08MA14

A ideia de congruência de triângulos

Participe

Faça as atividades no caderno.

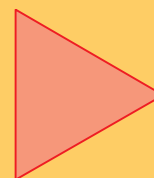
Vamos fazer alguns experimentos que envolvem triângulos. Para realizá-los, você vai precisar de: lápis de cor, transferidor, tesoura, régua e folhas de papel avulsas.

As imagens não estão representadas em proporção.

Experimento 1

Analise os triângulos a seguir.

Triângulo 1. Triângulo 2. Triângulo 3. Triângulo 4.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Todos eles são triângulos equiláteros. Com transferidor e régua, você pode verificar que:

- os ângulos internos desses triângulos medem 60°;
- os lados desses triângulos medem 3 cm (no triângulo 1); 2 cm (no triângulo 2); 1 cm (no triângulo 3); 3 cm (no triângulo 4).

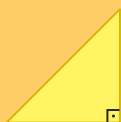
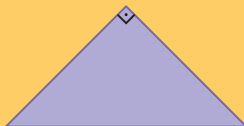
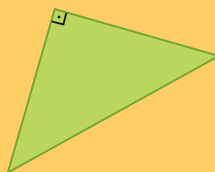
Agora, siga estes procedimentos:

1º) Em uma folha de papel avulsa, copie os triângulos e numere-os com os mesmos números que foram apresentados.
2º) Recorte os 4 triângulos.
3º) Sobreponha os triângulos e tente fazer com que dois deles coincidam exatamente, em forma e tamanho.

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

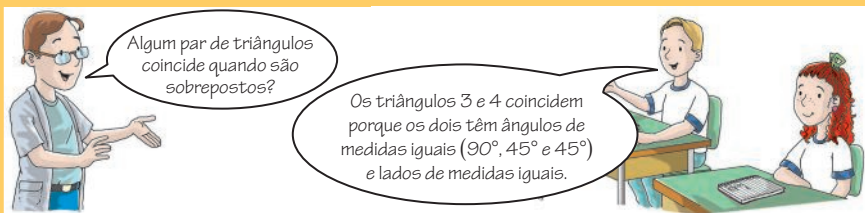
Os triângulos 1 e 4, que se sobrepõem, são **congruentes**.

Experimento 2

Agora, analise estes triângulos:

Triângulo 1. Triângulo 2. Triângulo 3. Triângulo 4.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Todos eles são triângulos retângulos e isósceles. Use transferidor e régua e verifique que:

- em cada triângulo, um ângulo interno mede 90° e dois ângulos internos têm medida de 45°.
- os lados que formam o ângulo reto medem: 2 cm (no triângulo 1); 1 cm (no triângulo 2); 3 cm (no triângulo 3) e 3 cm (no triângulo 4).

Repita os procedimentos descritos no Experimento 1, usando como modelo os triângulos retângulos e isósceles.

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

Por isso, os triângulos 3 e 4 são congruentes.

Experimento 3

Analise os triângulos a seguir.

Triângulo 1. Triângulo 2. Triângulo 3. Triângulo 4.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Eles são triângulos escalenos. Medindo seus lados e ângulos internos com régua e transferidor, notamos que:

- todos têm um lado medindo 3 cm e outro medindo 2 cm;
- a medida do ângulo interno formado por esses dois lados é: 90° (no triângulo 1); 60° (no triângulo 2); 120° (no triângulo 3); 20° (no triângulo 4).

Repita os procedimentos descritos no Experimento 1.

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

A resposta é não. Fazendo coincidir os lados de medida 3 cm de dois deles, os lados de medida 2 cm não coincidem, pois os ângulos têm medidas diferentes. Além disso, o terceiro lado em cada triângulo tem uma medida diferente da que há nos outros triângulos. Por isso, nesse conjunto não há dois triângulos congruentes entre si.

Orientações didáticas

Participe

No experimento **2**, são analisadas congruências entre triângulos retângulos e isósceles.

No experimento **3**, auxilie os estudantes a analisar as medidas dos triângulos escalenos apresentados, utilizando régua para as medidas dos lados e transferidor para as medidas dos ângulos. Pergunte: "O que esses triângulos têm em comum em relação às suas medidas?". Posteriormente, questione-os sobre a medida do ângulo indicada em cada um dos 4 triângulos. Espera-se que eles notem que são medidas diferentes.

Proposta para o estudante

Sugerimos a leitura do artigo a seguir, em que é apresentada uma proposta didática sobre o tema congruência de triângulos.

VIANA, Odalea A.; SILVA, Lucas R. P. Raciocínio geométrico e aprendizagem de congruência de triângulos. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 15, n. 1, p. 1-22, 2020. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/1981-1322.2020.e67627/43213/259465. Acesso em: 3 jun. 2022.

Orientações didáticas

Participe

No experimento **4**, oriente os estudantes a copiar os triângulos apresentados, anotando suas medidas e numerando-os. Retome com eles os triângulos do experimento **3** e pergunte: "Quais relações podem ser estabelecidas entre os triângulos de cada experimento?". Peça que registrem as hipóteses para consultá-las ao final do experimento. Posteriormente, oriente-os a sobrepor os triângulos para descobrir as congruências.

Conceito matemático de congruência de triângulos

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao apresentar o conceito formal de congruência de triângulos.

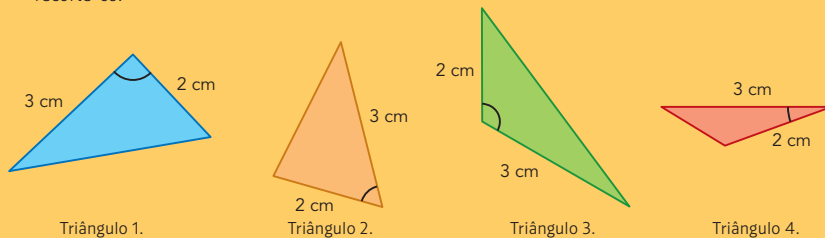
No livro são apresentados 2 triângulos: um azul e um vermelho. A proposta é realizar um deslocamento "cinemático" quadro a quadro para mostrar o triângulo azul sobrepondo exatamente a posição ocupada pelo triângulo vermelho. Reforce para os estudantes que a imagem do pé da página não trata de 5 triângulos distintos, e sim de várias "reproduções" do triângulo azul se deslocando no plano da folha na direção do triângulo vermelho.

Experimento 4

As imagens não estão representadas em proporção.

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

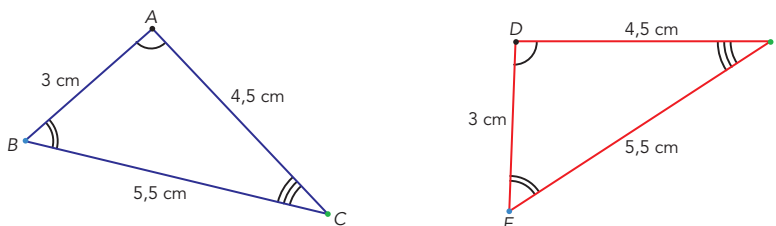
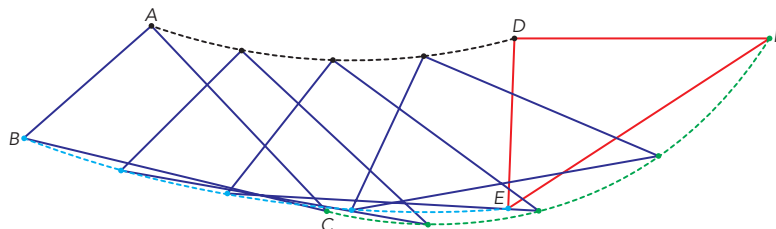
1º) Em uma folha de papel avulsa, copie os 4 triângulos escalenos apresentados a seguir, numere-os e, depois, recorte-os.

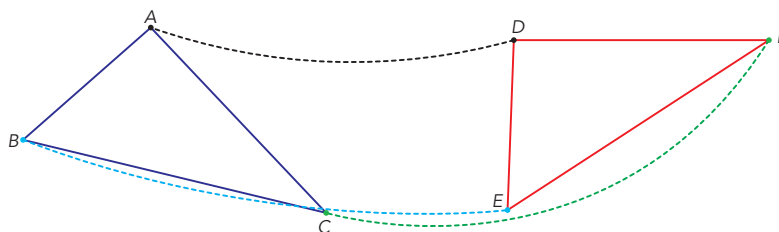
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2º) Agora, sobreponha-os aos triângulos do Experimento 3 para obter os pares congruentes.

Cada triângulo recortado pode ser sobreposto de modo a coincidir exatamente com o triângulo da mesma numeração do Experimento 3. Por isso, os triângulos numerados com o mesmo número nos Experimentos 3 e 4 são congruentes.

Conceito matemático de congruência de triângulos

Verifique os triângulos *ABC* e *DEF*:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

É possível "deslocar" o triângulo *ABC* até que seus lados coincidam com os lados do triângulo *DEF*:

Também é possível estabelecer uma correspondência entre os vértices (verifique as trajetórias descritas pelos vértices do triângulo *ABC* até coincidirem com os vértices do triângulo *DEF*).

A D F B E C

Banco de imagens/Arquivo da editora

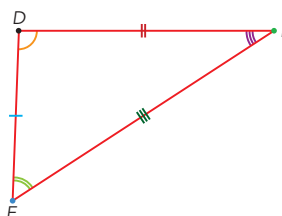
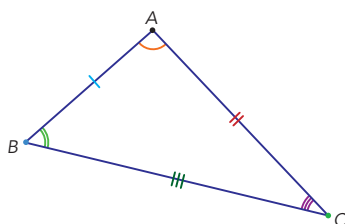
Note que:

- os lados correspondentes (ou homólogos) dos triângulos são congruentes. O símbolo ≅ indica congruência:
  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ $\overline{AC} \cong \overline{DF}$
- os ângulos internos correspondentes são congruentes:
  $\hat{A} \cong \hat{D}$ $\hat{B} \cong \hat{E}$ $\hat{C} \cong \hat{F}$

Quando isso ocorre, dizemos que os triângulos *ABC* e *DEF* são **congruentes**. Indicamos:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Para indicar as congruências nas representações dos triângulos, fazemos traços iguais para demarcar os lados congruentes e também fazemos arcos iguais para identificar os ângulos congruentes, conforme as figuras a seguir.

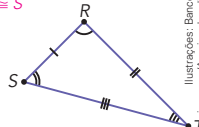
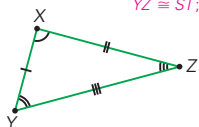
A D F B C E

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Dois **triângulos** são **congruentes** quando os lados e os ângulos de um deles são respectivamente congruentes aos lados e aos ângulos do outro.

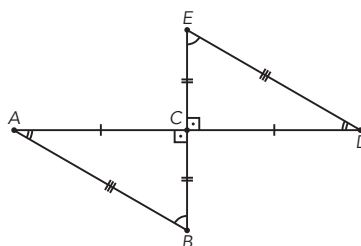
Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Sabendo que os triângulos *XYZ* e *RST* são congruentes, escreva no caderno as 6 congruências decorrentes: $\overline{XY} \cong \overline{RS}$; $\hat{X} \cong \hat{R}$ $\overline{ZX} \cong \overline{TR}$; $\hat{Z} \cong \hat{T}$ $\overline{YZ} \cong \overline{ST}$; $\hat{Y} \cong \hat{S}$

X Z Y R S T

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Na figura a seguir, o triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *DEC*. Sabendo que med$(\hat{A}) = 3x$, med$(\hat{B}) = y + 48°$, med$(\hat{E}) = 5y$ e med$(\hat{D}) = 2x + 10°$, determine *x* e *y*. $x = 10°$ e $y = 12°$

E A C D B

Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Conceito matemático de congruência de triângulos

Explique aos estudantes que os casos de congruência nos permitem decidir se 2 triângulos são congruentes a partir da congruência de lados e/ou ângulos correspondentes e que, para indicar que 2 triângulos são congruentes, é útil aplicar nos polígonos traços iguais para demarcar os lados congruentes e marcas de arcos iguais para identificar os ângulos congruentes.

Atividades

A atividade **1** solicita aos estudantes o registro simbólico das congruências entre cada elemento do par de triângulos. À medida em que as notações vão crescendo em complexidade, é importante fazer com que todos os estudantes estejam padronizados para facilitar a comunicação.

A atividade **2** se aproveita das congruências entre os elementos correspondentes para gerar equações do 1º grau com uma incógnita para os estudantes resolverem.

Orientações didáticas

Atividades

Para auxiliar no esclarecimento de dúvidas, retome as construções realizadas no boxe *Participe*. Utilizando os triângulos construídos e recortados, solicite aos estudantes que enumerem os lados e ângulos congruentes. Por meio desta retomada é possível compreender quando 2 triângulos são ou não congruentes.

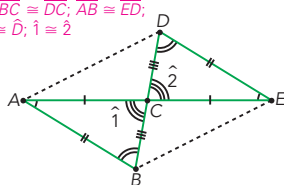
Casos de congruência

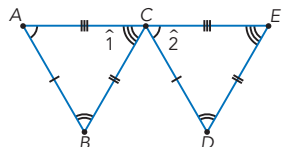
Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao apresentar aos estudantes os casos de congruência de triângulos.

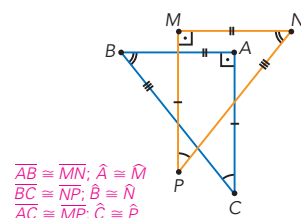
O conteúdo deste tópico retoma o conceito de congruência de triângulos e o amplia apresentando todos os casos de congruência.

3. Os triângulos *ABC* e *EDC* da figura a seguir são congruentes. No caderno, responda: Quais são os elementos de medidas respectivamente iguais?

$\overline{AC} \cong \overline{EC}$; $\overline{BC} \cong \overline{DC}$; $\overline{AB} \cong \overline{ED}$; $\hat{A} \cong \hat{E}$; $\hat{B} \cong \hat{D}$; $\hat{1} \cong \hat{2}$

Banco de imagens/Arquivo da editora

4. Os triângulos *ABC* e *CDE* da figura são congruentes. No caderno, responda: Quais são os elementos de medidas respectivamente iguais?

Banco de imagens/Arquivo da editora

$\overline{AC} \cong \overline{CE}$; $\overline{BC} \cong \overline{DE}$; $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\hat{B} \cong \hat{D}$; $\hat{A} \cong \hat{2}$; $\hat{1} \cong \hat{E}$

5. Os triângulos *ABC* e *MNP* são congruentes. No caderno, escreva as seis congruências decorrentes.

$\overline{AB} \cong \overline{MN}$; $\hat{A} \cong \hat{M}$
$\overline{BC} \cong \overline{NP}$; $\hat{B} \cong \hat{N}$
$\overline{AC} \cong \overline{MP}$; $\hat{C} \cong \hat{P}$

Banco de imagens/Arquivo da editora

6. Na figura, o triângulo *ABD* é congruente ao triângulo *CBD*. Sabendo que $AB = x$, $BC = 2y$, $CD = 3y + 8$ e $DA = 2x$, no caderno, calcule *x* e *y*. $x = 16$ e $y = 8$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Casos de congruência

O conceito de congruência de triângulos estabelece que 2 triângulos são congruentes quando:

- cada lado de um dos triângulos é congruente ao seu correspondente (ou homólogo) no outro;
- cada ângulo de um triângulo é congruente ao seu correspondente (ou homólogo) no outro.

Portanto, devem ocorrer 6 congruências:

- 3 congruências entre os lados correspondentes;
- 3 congruências entre os ângulos correspondentes.

Para concluir que 2 triângulos são congruentes, empregando o conceito de congruência, devemos constatar 6 congruências (3 congruências entre lados e 3 entre ângulos). Mas é possível reduzir esse trabalho devido aos **casos de congruência**.

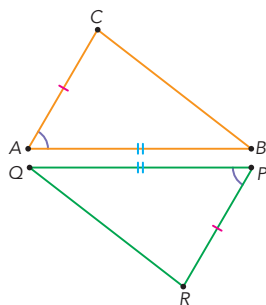
Os casos de congruência são 4 propriedades que permitem concluir que 2 triângulos são congruentes a partir de apenas 3 determinadas congruências (entre lados ou entre ângulos).

Caso LAL (Lado – Ângulo – Lado)

Nos Experimentos **3** e **4**, anteriores, o lado de medida 2 cm e o lado de medida 3 cm formavam ângulos internos de mesma medida no triângulo de mesma numeração. Esses 2 triângulos com a mesma numeração são congruentes, pois:

> Se 2 triângulos têm **2 lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes**, então os triângulos são congruentes.

Essa propriedade estabelece que, se um triângulo ABC e um triângulo PQR apresentam:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\overline{AB} \cong \overline{PQ},\ \hat{A} \cong \hat{P} \text{ e } \overline{AC} \cong \overline{PR},$$

então o terceiro lado e os 2 ângulos restantes também são respectivamente congruentes:

$$\hat{B} \cong \hat{Q},\ \overline{BC} \cong \overline{QR} \text{ e } \hat{C} \cong \hat{R};$$

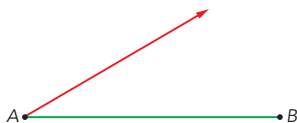
e, consequentemente, os triângulos são congruentes.

Indicamos assim: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

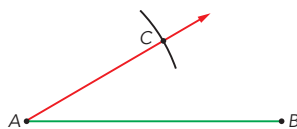
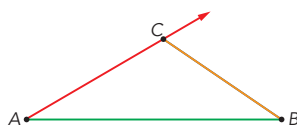
Construção de triângulo dadas as medidas de 2 lados e do ângulo formado entre eles

Usando régua, compasso e transferidor, vamos construir um triângulo ABC, conhecendo as medidas de 2 lados ($AB = 45$ mm e $AC = 28$ mm) e a medida do ângulo compreendido entre eles med$(\hat{A}) = 30°$.

1º) Traçamos o lado $\overline{AB}$ medindo 45 mm.

2º) Com o transferidor, construímos um ângulo com medida de 30° com vértice A e um dos lados em $\overline{AB}$.

3º) No outro lado do ângulo, marcamos o ponto C, de modo que $\overline{AC}$ meça 28 mm.

4º) Traçamos o segmento de reta $\overline{BC}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pelo caso LAL, qualquer outro triângulo que tenha lados medindo 45 mm e 28 mm formando um ângulo de medida 30° será congruente ao triângulo ABC que acabamos de construir.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

7. Com régua, compasso e transferidor, construa no caderno: As construções encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) um triângulo ABC, considerando $AB = 3$ cm, med$(\hat{B}) = 40°$ e $BC = 5$ cm;

b) um triângulo DEF, considerando $DE = 5$ cm, $DF = 3$ cm e med$(\hat{D}) = 40°$.

8. No caderno, responda: Os triângulos ABC e DEF que você construiu na atividade **7** são congruentes? Por quê? Sim, pelo caso LAL.

9. No caderno, responda: Nos triângulos ABC e DEF construídos na atividade **7**, quais são os pares de ângulos congruentes? $\hat{A} \cong \hat{F}$, $\hat{B} \cong \hat{D}$, $\hat{C} \cong \hat{E}$

Orientações didáticas

Caso LAL (Lado – Ângulo – Lado)

O primeiro caso de congruência de triângulos é apresentado, denominado caso LAL (iniciais de Lado – Ângulo – Lado). Para este caso, basta o estudante conhecer as medidas de 2 pares de lados correspondentes e do ângulo formado entre eles.

Construção de triângulo dadas as medidas de 2 lados e do ângulo formado entre eles

É detalhado um processo de construção de um triângulo com régua, compasso e transferidor, conhecendo-se as medidas de 2 lados e do ângulo formado entre esses lados. Realize o passo a passo em conjunto com a turma e verifique se os instrumentos estão sendo utilizados corretamente.

Atividades

As atividades **7** a **9** exploram o trabalho com congruência de triângulos. Proponha que os estudantes realizem as atividades individualmente e os auxilie em caso de dúvidas.

Orientações didáticas

Caso ALA (Ângulo – Lado – Ângulo)

Introduza o segundo caso de congruência, conhecido como ALA (iniciais de Ângulo – Lado – Ângulo). Neste momento, uma proposta de intervenção, com foco no esclarecimento de dúvidas, consiste em retomar o significado geométrico do termo adjacente. Para isso, construa na lousa um triângulo e apresente um lado e seus ângulos adjacentes como os ângulos que tem esse lado como parte da sua construção.

Construção de triângulo dadas as medidas de 1 lado e dos ângulos adjacentes a ele

É detalhada a construção, mediante uso de régua e transferidor, de um triângulo do qual se conhece a medida de 1 lado, e dos 2 ângulos adjacentes a ele.

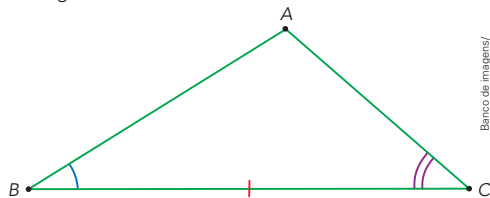
Também é aconselhável conduzir com a turma a construção passo a passo do exemplo mostrado no livro, destacando o que há em comum e o que é diferente em relação à construção mostrada no caso anterior de congruência.

Caso ALA (Ângulo – Lado – Ângulo)

No triângulo *ABC*, dizemos que:

- Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos adjacentes ao lado $\overline{BC}$.
  O lado $\overline{BC}$ é adjacente aos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.
- Os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{A}$ são os ângulos adjacentes ao lado $\overline{CA}$.
  O lado $\overline{CA}$ é adjacente aos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{A}$.
- Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são os ângulos adjacentes ao lado $\overline{AB}$.
  O lado $\overline{AB}$ é adjacente aos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

A
B C

Banco de imagens/Arquivo da editora

Agora, verifique um caso de congruência de triângulos envolvendo 1 lado e os ângulos adjacentes a ele:

> Se 2 triângulos têm **1 lado e os 2 ângulos adjacentes a ele respectivamente congruentes**, então os triângulos são congruentes.

Essa propriedade estabelece que, se um triângulo *ABC* e outro triângulo *RST* apresentam:

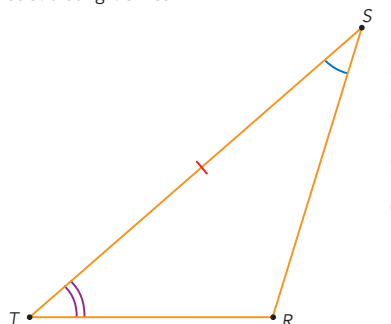
$$\hat{B} \cong \hat{S},\ \overline{BC} \cong \overline{ST} \text{ e } \hat{C} \cong \hat{T},$$

então o terceiro ângulo e os dois lados restantes também são respectivamente congruentes:

$$\overline{AB} \cong \overline{RS},\ \hat{A} \cong \hat{R} \text{ e } \overline{AC} \cong \overline{RT};$$

e, consequentemente, os triângulos são congruentes.

S
T R

Banco de imagens/Arquivo da editora

Indicamos assim: $\triangle ABC \cong \triangle RST$.

Construção de triângulo dadas as medidas de 1 lado e dos ângulos adjacentes a ele

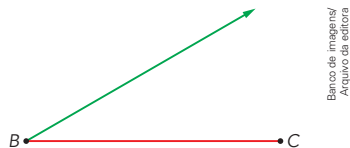
Com régua, compasso e transferidor, vamos construir um triângulo *ABC*, conhecendo a medida de um lado $(BC = 45 \text{ mm})$ e as medidas dos ângulos adjacentes a ele $\text{med}(\hat{B}) = 30°$ e $\text{med}(\hat{C}) = 45°$.

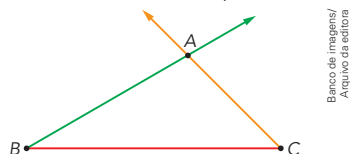
1º) Traçamos um segmento de reta $\overline{BC}$ medindo 45 mm.

B C

Banco de imagens/Arquivo da editora

2º) Construímos um ângulo com medida de 30° com vértice B e tendo em $\overrightarrow{BC}$ um dos lados.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

3º) Construímos um ângulo com medida de 45° com vértice C, tendo em $\overrightarrow{CB}$ um lado e outro lado de modo que os lados dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ diferentes de $\overline{BC}$ se cruzem no ponto A.

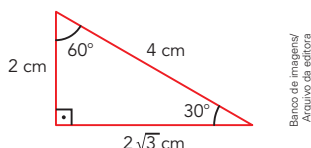
Banco de imagens/ Arquivo da editora

Pelo caso ALA, qualquer outro triângulo que tenha medida de lado de 45 mm e ângulos adjacentes a esse lado com medidas de 30° e 45° será congruente ao triângulo ABC que acabamos de construir.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

10. No caderno, responda: Quanto medem os ângulos adjacentes ao lado de 4 cm no triângulo a seguir? 30° e 60°

2 cm; 4 cm; 60°; 30°; $2\sqrt{3}$ cm

Banco de imagens/ Arquivo da editora

11. Quanto medem os lados adjacentes ao ângulo de 90° no triângulo da atividade anterior? 2 cm e $2\sqrt{3}$ cm

12. Com régua, compasso e transferidor construa no caderno: **a)** e **b)** As construções encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) um triângulo ABC, considerando $BC = 6$ cm, $med(\hat{B}) = 30°$ e $med(\hat{C}) = 60°$;

b) um triângulo RST, considerando $RS = 6$ cm, $med(\hat{R}) = 60°$ e $med(\hat{S}) = 30°$.

13. Os triângulos ABC e RST que você construiu na atividade **12** são congruentes? Por quê? Sim, pelo caso ALA.

14. Meça os outros lados dos triângulos ABC e RST construídos na atividade **12**. Em seguida, responda no caderno: Quais são os pares de lados congruentes? $\overline{BC} \cong \overline{RS}$, $\overline{BA} \cong \overline{ST}$, $\overline{AC} \cong \overline{TR}$; $AC = TR = 3$ cm; $BA = ST = 5{,}2$ cm

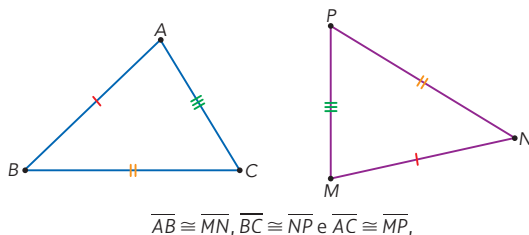
Caso LLL (Lado – Lado – Lado)

Há um caso de congruência envolvendo os 3 lados:

Se 2 triângulos têm os **3 lados respectivamente congruentes**, então os triângulos são congruentes.

Essa propriedade estabelece que, se um triângulo ABC e outro MNP apresentam:

$\overline{AB} \cong \overline{MN}$, $\overline{BC} \cong \overline{NP}$ e $\overline{AC} \cong \overline{MP}$,

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

Explore com os estudantes, nas atividades **10** e **11**, a identificação de quais ângulos são adjacentes a um lado de um triângulo. Esta identificação é preparatória para trabalhos posteriores envolvendo triângulos, além de possibilitar a identificação dos casos seguintes de congruência de triângulos.

Também é importante dar atenção à medida do lado horizontal do triângulo, que exprime um número irracional. Relembre que este é o modo mais preciso de registrar esta medida; porém, usando uma régua ou outro instrumento de medição deste comprimento, encontraríamos apenas uma aproximação racional a esse valor, limitada pela precisão do instrumento utilizado.

A construção proposta na atividade **12** possibilita a resolução das atividades **13** e **14**. Auxilie os estudantes na construção proposta. Se julgar necessário, proponha que escolham outras medidas diferentes das apresentadas e construam triângulos para analisar o caso de congruência ALA.

Caso LLL (Lado – Lado – Lado)

Após o trabalho da seção atividades, introduza o caso de congruência LLL (iniciais de Lado – Lado – Lado). Este caso de congruência também pode ser verificado experimentalmente a partir de construções, mediações e partilha das conclusões entre os estudantes para valorizar a pluralidade de ideias, possibilitar a aquisição de repertórios relacionados ao conceito de congruência e o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Orientações didáticas

Construção de triângulo dadas as medidas dos 3 lados

Construa com a turma um triângulo com régua e compasso, conhecidas as medidas dos 3 lados seguindo os passos apresentados no livro.

Caso LAA_0 (Lado – Ângulo adjacente – Ângulo oposto)

O boxe *Participe* prepara os estudantes para o caso de congruência LAA_0 (iniciais de Lado – Ângulo – Ângulo oposto). Explore, oralmente, o triângulo proposto analisando os ângulos adjacentes aos lados indicados e os lados opostos aos ângulos descritos. Além disso, retome com os estudantes a classificação do triângulo de acordo com as medidas dos lados e ângulos. Este trabalho possibilita a identificação de ângulos adjacentes e lados opostos a ângulos para auxiliar nos próximos casos de congruência.

então os 3 ângulos também são respectivamente congruentes:

$$\hat{A} \cong \hat{M},\ \hat{B} \cong \hat{N} \text{ e } \hat{C} \cong \hat{P};$$

e, consequentemente, os triângulos são congruentes.

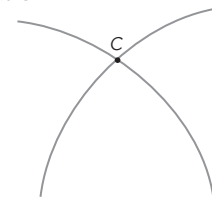
Indicamos assim: $\triangle ABC \cong \triangle MNP$.

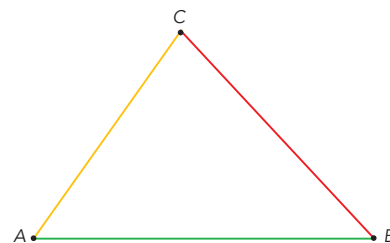
Construção de triângulo dadas as medidas dos 3 lados

Com régua e compasso vamos construir um triângulo *ABC*, conhecendo as medidas dos 3 lados ($AB = 60$ mm, $BC = 50$ mm e $CA = 45$ mm).

1º) Traçamos um segmento de reta $\overline{AB}$ medindo 60 mm.

2º) Com o compasso em *A* e com uma abertura de 45 mm traçamos um arco.

3º) Depois, com o compasso em *B* e com uma abertura de 50 mm, traçamos outro arco que deve intersectar com o primeiro arco traçado, encontrando o ponto *C*.

4º) Por último, traçamos os segmentos de reta $\overline{CA}$ e $\overline{BC}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pelo caso LLL, qualquer outro triângulo que tenha lados medindo 60 mm, 50 mm e 45 mm será congruente ao triângulo *ABC* que acabamos de construir.

Caso LAA_o (Lado – Ângulo adjacente – Ângulo oposto)

Participe

Faça as atividades no caderno.

Responda às perguntas considerando as medidas indicadas no triângulo.

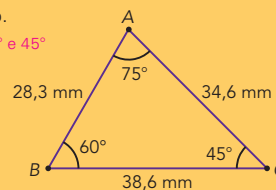
a) Quanto medem os ângulos adjacentes ao lado de medida 38,6 mm? 60° e 45°

b) Quanto mede o ângulo oposto ao lado de medida 38,6 mm? 75°

c) Quanto mede o ângulo oposto ao lado de medida 34,6 mm? 60°

d) Quanto mede o lado oposto ao ângulo de medida 45°? 28,3 mm

e) Quanto medem os lados adjacentes ao ângulo de medida 45°? 38,6 mm e 34,6 mm

Banco de imagens/Arquivo da editora

Há um caso de congruência envolvendo 1 lado, 1 ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado:

> Se 2 triângulos têm **1 lado, 1 ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes**, então os triângulos são congruentes.

Essa propriedade estabelece que, se dois triângulos *ABC* e *XYZ* apresentam:

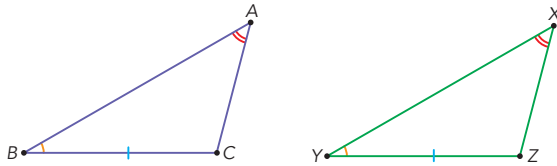
$$\overline{BC} \cong \overline{YZ}, \hat{B} \cong \hat{Y} \text{ e } \hat{A} \cong \hat{X},$$

o ângulo restante e os dois lados restantes também são respectivamente congruentes:

$$\hat{C} \cong \hat{Z}, \overline{AB} \cong \overline{XY} \text{ e } \overline{AC} \cong \overline{XZ};$$

e, consequentemente, os triângulos são congruentes.

Indicamos assim: $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.

A B C X Y Z

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Construção de triângulos dadas as medidas de 1 lado, de 1 ângulo adjacente e do ângulo oposto

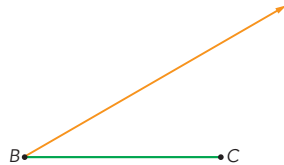
Usando régua, transferidor e compasso, vamos construir um triângulo *ABC*, conhecendo a medida de um lado $(BC = 40 \text{ mm})$ e as medidas de um dos ângulos adjacentes a esse lado $(\text{med}(\hat{B}) = 30°)$ e do ângulo oposto $(\text{med}(\hat{A}) = 45°)$.

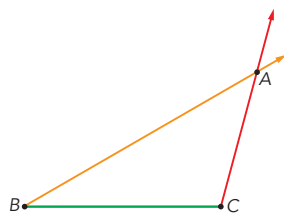
1º) Traçamos um segmento de reta $\overline{BC}$ medindo 40 mm.

B C

2º) Construímos um ângulo medindo 30° com vértice *B* e um dos lados em $\overrightarrow{BC}$.

B C

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

3º) Como $\text{med}(\hat{C}) = 180° - 30° - 45° = 105°$, construímos 1 ângulo medindo 105° com vértice *C*, 1 lado em $\overrightarrow{CB}$ e outro lado de modo que os lados dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ diferentes de $\overline{BC}$ se cruzem no ponto *A*.

A B C

Pelo caso LAA_o, qualquer outro triângulo que tenha um lado medindo 40 mm, um ângulo adjacente a esse lado medindo 30° e o ângulo oposto medindo 45° será congruente ao triângulo *ABC* que acabamos de construir.

Orientações didáticas

Construção de triângulos dadas as medidas de 1 lado, de 1 ângulo adjacente e do ângulo oposto

É apresentado um exemplo de construção de triângulo, conhecendo-se a medida de 1 lado e de 2 ângulos: um ângulo adjacente a este lado, e o outro oposto ao mesmo. Para realizar esta construção, bastam a régua e o transferidor.

Na realidade, o processo registrado no Livro do Estudante obteve primeiro a medida do terceiro ângulo, pela diferença ao total de 180°, e construiu o terceiro lado a partir dele. Alternativamente, construa com a turma primeiro o ângulo oposto a partir da semirreta do segundo lado; depois, observe se a direção obtida não está cruzando o primeiro lado no vértice – se for o caso, será preciso ajustar uma paralela a essa terceira semirreta que passe pelo vértice.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **15**, retome com os estudantes as construções feitas anteriormente para que eles possam construir os triângulos *ABC* e *MNP*. Dessa maneira, nas atividades **16** e **17**, é possível identificar o caso de congruência entre esses triângulos, ao perguntar o porquê da congruência. Utilize o momento para que eles formalizem que é o caso LLL.

Sugerimos construir os triângulos com régua e compasso na atividade **18**. Posteriormente, espera-se que os estudantes identifiquem o caso de congruência aplicado, além de explicitar as medidas de congruência para as atividades **18** a **20**.

Caso especial: triângulos retângulos

É mostrado um caso especial de congruência, que só é válido se o triângulo for retângulo. Aproveite para recordar o significado dos termos cateto e hipotenusa.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

15. Com régua, compasso e transferidor, construa no caderno: As construções encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) um triângulo *ABC*, considerando as medidas $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm e $CA = 4$ cm;

b) um triângulo *MNP*, considerando as medidas $MN = 5$ cm, $NP = 6$ cm e $PM = 4$ cm.

16. Os triângulos *ABC* e *MNP* que você construiu na atividade **15** são congruentes? Por quê? Sim, pelo caso LLL.

17. Quais são os pares de ângulos congruentes nos triângulos *ABC* e *MNP* construídos na atividade **15**? $\hat{A} \cong \hat{P}$, $\hat{B} \cong \hat{N}$ e $\hat{C} \cong \hat{M}$

18. Usando a régua, o compasso e o transferidor, construa no caderno: As construções encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) um triângulo *ABC*, sendo dados $AB = 5$ cm, $med(\hat{A}) = 70°$ e $med(\hat{C}) = 80°$;

b) um triângulo *PQR*, sendo dados $QR = 5$ cm, $med(\hat{R}) = 70°$ e $med(\hat{P}) = 80°$.

19. Os triângulos *ABC* e *PQR* que você construiu na atividade **18** são congruentes? Por quê? Sim, pelo caso LAA_o (ou ALA, calculando as medidas de $\hat{B}$ e $\hat{Q}$).

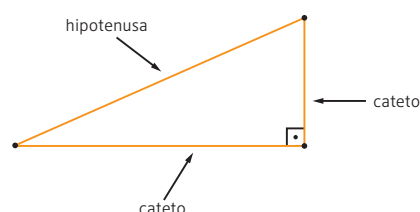
20. Quais são os pares de lados congruentes nos triângulos *ABC* e *PQR* construídos na atividade **18**? $\overline{AB} \cong \overline{RQ}$, $\overline{BC} \cong \overline{QP}$, $\overline{CA} \cong \overline{PR}$

Caso especial: triângulos retângulos

No triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa**, e os outros 2 lados (que formam um ângulo reto) são chamados **catetos**.

Vamos, agora, analisar o caso especial: cateto-hipotenusa.

hipotenusa
cateto
cateto

Banco de imagens/Arquivo da editora

Se 2 triângulos retângulos têm **um cateto e a hipotenusa respectivamente congruentes,** então os triângulos são congruentes.

Essa propriedade estabelece que, se 2 triângulos retângulos *ABC* (com $med(\hat{A}) = 90°$) e *DEF* (com $med(\hat{D}) = 90°$) apresentam:

$$\overline{AB} \cong \overline{DE} \text{ e } \overline{BC} \cong \overline{EF},$$

então o outro cateto e os 2 ângulos restantes também são respectivamente congruentes:

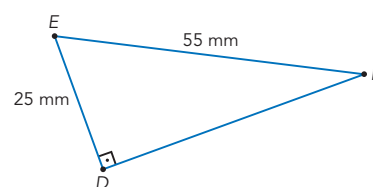
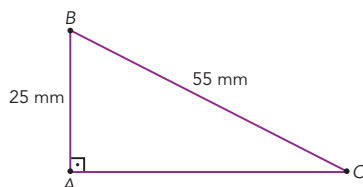
$$\overline{AC} \cong DF, \hat{B} \cong \hat{E} \text{ e } \hat{C} \cong \hat{F};$$

e, consequentemente, os triângulos são congruentes.

Indicamos assim: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

B
25 mm
55 mm
A
C

E
55 mm
F
25 mm
D

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Construção de um triângulo retângulo dadas as medidas de 1 cateto e da hipotenusa

Vamos construir, com régua, compasso e transferidor, um triângulo retângulo ABC, conhecendo as medidas de um cateto $(AB = 25 \text{ mm})$ e da hipotenusa $(BC = 55 \text{ mm})$.

1º) Construímos um ângulo reto de vértice A.

A

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

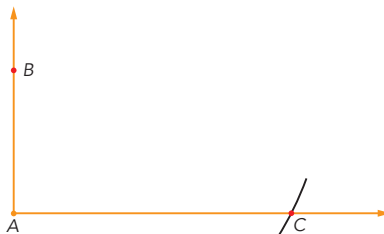
2º) Em um dos lados do ângulo, marcamos o ponto B de modo que $AB = 25$ mm.

B

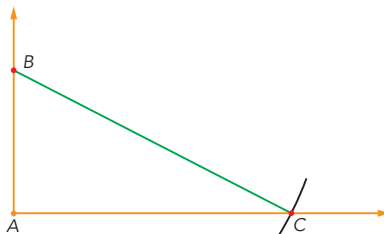
A

3º) Com a ponta-seca do compasso em B e abertura de 55 mm, traçamos um arco que intersecta o outro lado do ângulo $\hat{A}$, determinando o ponto C.

B

A C

4º) Traçamos o segmento de reta determinado pelos pontos B e C.

B

A C

Pelo caso especial cateto-hipotenusa, qualquer outro triângulo retângulo que tenha um cateto medindo 25 mm e hipotenusa medindo 55 mm será congruente ao triângulo ABC que acabamos de construir.

Orientações didáticas

Construção de um triângulo retângulo dadas as medidas de 1 cateto e da hipotenusa

Neste tópico é explorada a construção de um triângulo retângulo utilizando régua, compasso e transferidor. Questione os estudantes se qualquer triângulo retângulo é congruente a um triângulo retângulo dado, apenas pelo fato de eles possuírem um ângulo reto. Possibilite aos estudantes que partilhem conclusões para valorizar a pluralidade de ideias e ampliar o repertório de raciocínios relacionados a geometria.

O caso especial de congruência abordado aqui requer o conhecimento das medidas de 1 cateto e da hipotenusa do triângulo retângulo.

Não foi especificado se a construção inicial do ângulo reto foi realizada com o auxílio do transferidor, de um par de esquadros, ou de um processo apenas com o compasso. Realize os 3 processos em aula, para que os estudantes escolham o que preferem.

Orientações didáticas

Atividades

Nestas atividades, explore a construção de triângulos para investigação dos casos de congruência. Usando régua, compasso e transferidor, possibilite que os estudantes construam, em folhas de papel, triângulos que podem ser recortados e comparados.

Na atividade **25**, há triângulos retângulos para comparar e decidir qual par de triângulos é congruente; será o caso especial cateto-hipotenusa.

Na atividade **26**, existem 3 pares de triângulos congruentes em cada item. É preciso que cada estudante identifique os casos de congruência destes triângulos.

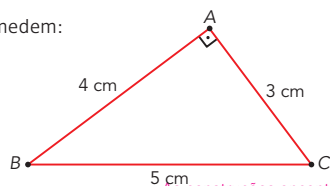
Atividades

Faça as atividades no caderno.

21. No triângulo retângulo a seguir, quanto medem:

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) o cateto maior? 4 cm

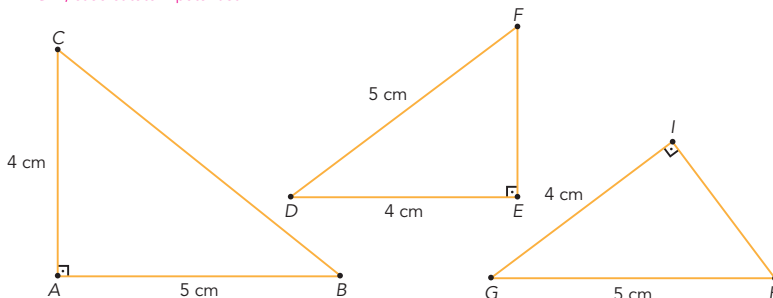
b) a hipotenusa? 5 cm

22. Com régua, compasso e transferidor, construa no caderno: As construções encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) um triângulo *ABC*, sendo med$(\hat{A}) = 90°$, $AB = 4{,}8$ cm e $BC = 6{,}0$ cm;

b) um triângulo *EFG*, sendo med$(\hat{F}) = 90°$, $GE = 6{,}0$ cm e $FG = 4{,}8$ cm.

23. No caderno, responda: Os triângulos *ABC* e *EFG* que você construiu na atividade **22** são congruentes? Por quê? Sim, pelo caso cateto-hipotenusa.

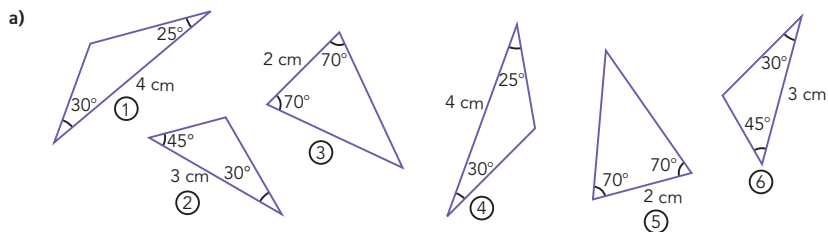
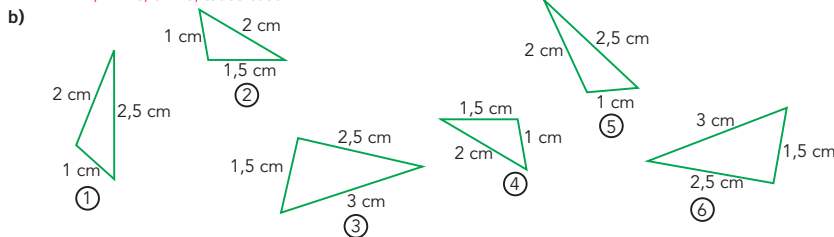
24. No caderno, responda: Quais são os pares de ângulos congruentes nos triângulos *ABC* e *EFG* construídos na atividade **22**? $\hat{A} \cong \hat{F}$, $\hat{B} \cong \hat{G}$, $\hat{C} \cong \hat{E}$

25. Considerando os triângulos a seguir, responda no caderno: Qual é o par de triângulos congruentes? Por quê? $\triangle DEF \cong \triangle GHI$; caso cateto-hipotenusa.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

26. Cada item a seguir apresenta seis triângulos. No caderno, indique os pares de triângulos congruentes e o caso que justifica a congruência.

a)

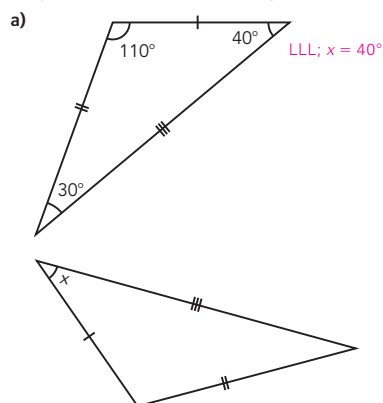
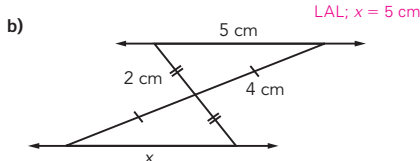
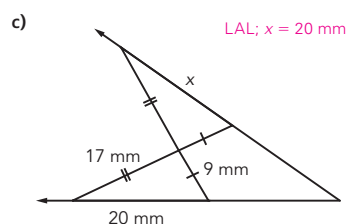
1 ≅ 4, 2 ≅ 6, 3 ≅ 5; todos caso ALA.

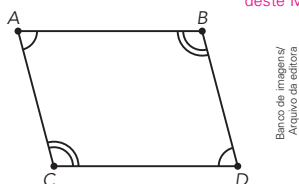
b)

1 ≅ 5, 2 ≅ 4, 3 ≅ 6; todos caso LLL.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c)

1 ≅ 5, 2 ≅ 4, 3 ≅ 6; todos caso LAA_o.

27. Os dois triângulos representados em cada item a seguir são congruentes. No caderno, indique o critério de congruência utilizado e, em seguida, determine *x*.

a) LLL; $x = 40°$

b) LAL; $x = 5$ cm

c) LAL; $x = 20$ mm

28. Dado o paralelogramo a seguir, demonstre, no caderno, por meio da congruência de triângulos, que os lados opostos são congruentes, assim como os ângulos opostos. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

29. Os dois triângulos representados em cada item a seguir são congruentes. No caderno, responda: Qual é o critério de congruência utilizado? Quanto vale *x*?

a) ALA; $x = 25$

b) ALA; $x = 15$

Orientações didáticas

Atividades

Neste conjunto de atividades, destacamos a atividade **27**. Questione os estudantes oralmente sobre qual o caso de congruência evidenciado em cada item. Instigue-os a resolver mentalmente cada item antes de descrever a resposta. Em seguida, se perceber que os estudantes apresentam dificuldades, leve-os a construir um esboço dos triângulos na mesma posição.

Na atividade **28**, os estudantes podem demonstrar que, no paralelogramo, os lados opostos são congruentes. Para isso, leve-os a concluir que é necessário traçar a diagonal do quadrilátero e identificar triângulos congruentes. Questione-os sobre qual o caso de congruência envolvido (LAA_0) neste processo de demonstração, em que se utiliza a propriedade de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. Por fim, possibilite que eles partilhem suas conclusões para valorizar a pluralidade de ideias e ampliar o repertório de raciocínios geométricos.

Proposta para o professor

A referência a seguir apresenta um conjunto de materiais desenvolvidos no GeoGebra que pode servir para nortear discussões complementares sobre congruência de triângulos.

CÁSSIO, Jorge. Por que ALL (ou LLA) não é caso de congruência entre triângulos? *GeoGebra*, [*s. l.*], [*s. d.*]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/tSNKZcPX. Acesso em: 7 jun. 2022.

Orientações didáticas

Ponto médio de um segmento de reta

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA15** ao explorar a construção da mediatriz com instrumentos e *softwares* específicos e **EF08MA17** ao utilizar o conceito de mediatriz na resolução de problemas. Em *Participe* mobiliza-se com maior ênfase a **CEMAT02** ao propor que os estudantes realizem algumas construções contribuindo para edificação dos conhecimentos. O contexto da atividade **6** permite mobilizar a **CG03** e a **CG09**, além de favorecer o desenvolvimento dos TCTs *Diversidade Cultural* e *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras* ao propor um trabalho envolvendo a cultura afro-brasileira e o desenvolvimento do espírito de empatia.

Para iniciar o trabalho com pontos notáveis do triângulo, é introduzida a noção de ponto médio, construindo um segmento de reta e determinando seu ponto médio de maneira a enfatizar a congruência dos 2 segmentos de reta gerados.

Mediatriz

Para auxiliar no entendimento do conceito de mediatriz, tem-se a construção geométrica dessa reta, utilizando régua e compasso. Para isso, oriente os estudantes previamente a levar e utilizar essas ferramentas. Os passos devem ser feitos em uma folha de papel avulsa.

No quarto passo, ao traçar a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, ressalte com os estudantes que o ponto M na intersecção é o ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$.

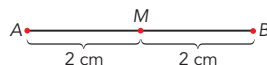
Também é feita a introdução do conceito de mediatriz como lugar geométrico, que pode ser construída a partir do ponto médio de um segmento de reta e tem a propriedade de que qualquer ponto pertencente tem a mesma distância em relação aos pontos A e B.

CAPÍTULO 6

Pontos notáveis do triângulo e propriedades

NA BNCC
EF08MA15
EF08MA17

Ponto médio de um segmento de reta

Verifique, na figura, a representação do segmento de reta $\overline{AB}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

O segmento de reta $\overline{AB}$ mede 4 cm e o ponto M pertence a ele. Os segmentos de reta $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ têm a mesma medida: 2 cm cada um deles. Os segmentos de reta $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são congruentes.

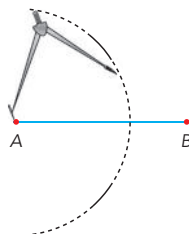
Nesse exemplo, M é chamado **ponto médio** do segmento de reta $\overline{AB}$.

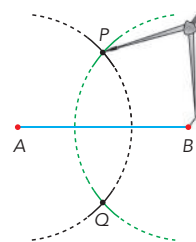
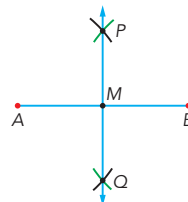
> **Ponto médio** de um segmento de reta é o ponto que pertence ao segmento e o divide em dois segmentos de reta congruentes.

Pelo ponto médio M de um segmento de reta $\overline{AB}$, podemos traçar a reta mediatriz, que é perpendicular a $\overline{AB}$, ou seja, uma reta cujos pontos equidistam de A e B.

Mediatriz

1º) Traçamos o segmento de reta $\overline{AB}$.

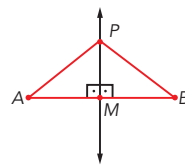
2º) Tomamos o compasso com abertura maior do que a metade de $\overline{AB}$, fixamos a ponta-seca em A e traçamos um arco.

3º) Mantendo a abertura do compasso, fixamos a ponta-seca em B e traçamos outro arco.

Assim, obtemos os pontos P e Q, que são as intersecções dos arcos.

4º) Traçamos a reta que une os pontos P e Q e chamamos de M o ponto em que $\overleftrightarrow{PQ}$ intersecta $\overline{AB}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Os pontos da mediatriz de um segmento de reta têm uma propriedade notável: eles distam igualmente das extremidades do segmento. Note:

Tomando um ponto qualquer P na mediatriz e ligando P com as extremidades A e B do segmento de reta, são formados dois triângulos, APM e BPM, congruentes pelo caso LAL, uma vez que:

$\overline{AM} \cong \overline{MB}$, $A\hat{M}P \cong B\hat{M}P$ e PM é lado comum, então $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

P
A
M
B

Banco de imagens/Arquivo da editora

A **mediatriz** de um segmento de reta é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente das extremidades do segmento de reta. Nenhum ponto fora da mediatriz tem essa propriedade.

Em Geometria, o termo **lugar geométrico** é atribuído a uma figura geométrica cujos pontos, e apenas eles, têm essa propriedade notável.

Construindo uma mediatriz

Participe

Faça as atividades no caderno.

No caderno, trace uma reta r. Marque os pontos R, S e T, nessa ordem. M é o ponto médio de $\overline{RS}$, e N é o ponto médio de $\overline{ST}$. O segmento de reta $\overline{RS}$ mede 4 cm, e $\overline{SN}$ mede 3 cm. Verifique quanto mede:

a) $\overline{RT}$ 10 cm

b) $\overline{MN}$ 5 cm

c) $\overline{MT}$ 8 cm

As construções encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Sobre uma reta r, marque os pontos A, B e C, nessa ordem, tais que $AB = 6$ cm e $BC = 10$ cm. Depois, responda: A construção encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Quanto mede o segmento de reta $\overline{AC}$? 16 cm

b) Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e N é o ponto médio de $\overline{BC}$, quanto mede $\overline{MN}$? $MN = 8$ cm

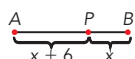
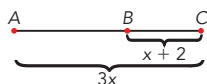
2. Considere $AB = 20$ cm e determine x em cada item:

a) $AP = (x + 6)$ cm $x = 7$

A P B
x + 6 x

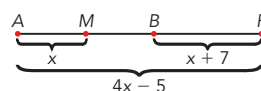
b) $AC = 3x$ cm $x = 11$

A B C
x + 2
3x

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Lembre-se de que AB representa "a medida do segmento de reta $\overline{AB}$".

3. Sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$, determine no caderno a medida AB. $AB = 24$

A M B P
x x + 7
4x − 5

Banco de imagens/Arquivo da editora

4. Nesta atividade, você vai precisar de régua e compasso. As construções encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) No caderno, construa um segmento de reta $\overline{PQ}$ com 5,4 cm de medida.

b) Seguindo os passos indicados no tópico "Ponto médio de um segmento de reta", obtenha a mediatriz de $\overline{PQ}$.

c) Chame de M a intersecção da mediatriz com $\overline{PQ}$. Qual é a medida de $\overline{PM}$? 2,7 cm

5. No caderno, utilizando régua e compasso, desenhe um triângulo retângulo isósceles ABC. Depois, utilizando régua e compasso, faça o seguinte:

a) construa a mediatriz de $\overline{AB}$ e a chame de r;

b) construa a mediatriz de $\overline{BC}$ e a chame de s;

c) chame de P a intersecção de r com s;

d) compare as medidas de distância PA, PB e PC.

d) As medidas são iguais.

As construções encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Construindo uma mediatriz

Este tópico favorece o desenvolvimento da **CEMAT02** ao propor que os estudantes construam mediatrizes.

Participe

Recomenda-se que os estudantes sejam divididos em grupos para resolver a atividade e ter a oportunidade de discutir e debater diferentes estratégias de resolução, valorizando o pluralismo de ideias.

Atividades

As atividades **2** e **3** partem do conceito de equidistância do ponto médio para estabelecer equações do 1º grau com uma incógnita.

As atividades **4** e **5** são eminentemente construtivas, aplicando o que foi mostrado anteriormente. Uma delas pede apenas para traçar a mediatriz de um segmento de reta. A outra, as mediatrizes relativas aos lados de um triângulo isósceles.

Aproveite para citar que todas as 3 mediatrizes construídas se interceptam num único ponto. E a partir desse ponto é possível construir uma circunferência circunscrita ao triângulo retângulo.

Proposta para o professor

A referência a seguir traz um vídeo para acompanhar a construção da mediatriz de um segmento de reta usando régua e compasso. Depois essa construção pode ser feita com as ferramentas do GeoGebra.

SILVA, André L. S. Mediatriz. GeoGebra. [*s. l.*: *s. n*], [*s. d.*]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/nkjbfrx8. Acesso em: 12 maio 2022.

Orientações didáticas

Atividades

Destacamos a atividade **6** que possibilita a oportunidade de se trabalhar os TCTs *Diversidade Cultural* e *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*. Para tanto, oriente os estudantes a realizar uma pesquisa prévia sobre a cultura afro-brasileira e a compartilhar os resultados da pesquisa com a turma. Essa é uma boa oportunidade para a realização de um trabalho interdisciplinar com a área de **Ciências Humanas**.

Na resposta do item **a**, espera-se que os estudantes obtenham os pontos de intersecção da mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$ com a circunferência.

No item **b**, espera-se que eles percebam que há 2 pontos de intersecção com a circunferência, pois a mediatriz traçada em relação aos pontos *A* e *B* tem 2 pontos de intersecção com a circunferência.

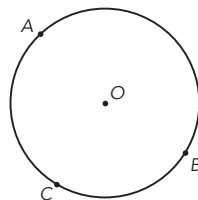
O boxe de sugestão de leitura indica um livro paradidático. Além de explorar o trabalho com as culturas afro-brasileiras e dos povos indígenas, o livro propicia uma reflexão, que permitirá aos estudantes reconhecer características comuns e identificações entre culturas aparentemente tão distintas. Trazemos aqui o trecho da 4ª capa do livro que traduz o que se pode esperar com a leitura desta obra:

> Encontro é quando a gente olha bem para o outro e também é visto. Reconhecido. Compreendido. O encontro torna-se mais encantador quando percebemos coisas em comum.
>
> CLARO, Regina G. C. S. *Encontros de histórias:* do arco-íris à Lua, do Brasil à África. 2. ed. São Paulo: Cereja, 2018.

c) O termo **afro-brasileiro** refere-se tanto ao descendente de africanos e brasileiros quanto a objetos culturais e materiais em que se observam as influências africana e brasileira.

Faça as atividades no caderno.

6. A escola do bairro está organizando uma feira cultural afro-brasileira e pretende disponibilizar espaços para a exposição, identificados pelos pontos *A*, *B* e *C* e localizados em um raio de 50 metros do pátio central da escola, indicado pelo ponto *O*, conforme mostra a figura a seguir. Também serão instaladas barracas para a venda de alimentos, à mesma medida de distância de 50 metros do pátio central.

A
O
B
C

Banco de imagens/Arquivo da editora

Com base nessas informações, faça o que se pede a seguir.

a), **b)**, **d)** As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Copie a figura no caderno e, com o auxílio de régua e compasso, determine os pontos em que as barracas para venda de alimentos deverão ser instaladas para que fiquem equidistantes de *A* e de *B*.

b) Quantos pontos satisfazem as condições do item **a**? Justifique.

c) O que significa o termo **afro-brasileiro**? Converse com os colegas e o professor antes de responder.

d) Como os povos africanos influenciaram a cultura que temos hoje no Brasil? Junte-se a um colega e façam uma pesquisa. Depois, compartilhem suas descobertas com os colegas da turma.

Que tal reconhecer semelhanças entre a cultura africana e a brasileira por meio de histórias? Este livro aborda o encontro entre essas duas culturas.

CLARO, R. G. C. S. *Encontros de histórias*: do arco-íris à Lua, do Brasil à África. 2. ed. São Paulo: Cereja, 2018.

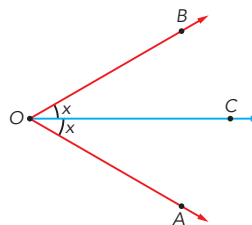
Reprodução/Cereja Editora

Bissetriz de um ângulo

Verifique a figura a seguir.

A semirreta $\overrightarrow{OC}$ é interna ao ângulo $A\hat{O}B$.

Os ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ são congruentes, pois ambos medem *x* graus.

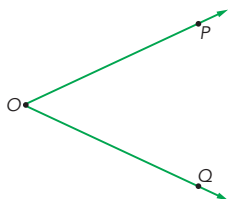
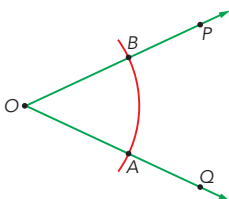
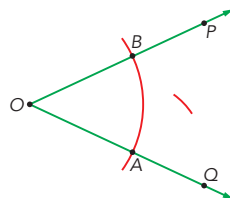
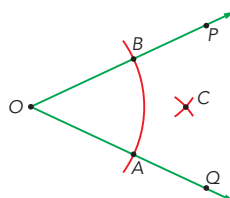
B
O
x
x
C
A

Banco de imagens/Arquivo da editora

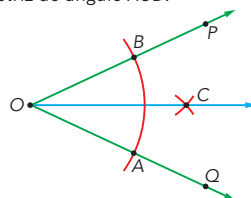
Dizemos que $\overrightarrow{OC}$ é a **bissetriz** do ângulo $A\hat{O}B$ ou, ainda, que $\overrightarrow{OC}$ divide o ângulo $A\hat{O}B$ ao meio.

A **bissetriz** de um ângulo é uma semirreta interna ao ângulo que o divide em outros 2 ângulos congruentes.

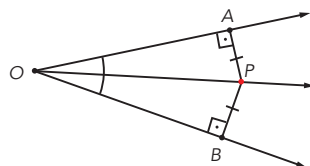
A seguir, vamos aprender como traçar a bissetriz de um ângulo dado.

Vamos obter a bissetriz do ângulo $P\hat{O}Q$ usando régua e compasso:

1º) Traçamos o ângulo $P\hat{O}Q$.

2º) Tomamos o compasso com uma abertura qualquer, fixamos a ponta-seca em O e desenhamos um arco. Chamamos de A a intersecção desse arco com $\overrightarrow{OP}$ e de B a intersecção com $\overrightarrow{OQ}$.

3º) Fixamos o compasso em A e, com abertura maior do que a metade de $\overline{AB}$, traçamos um arco na parte interna do ângulo.

4º) Usando a mesma abertura, fixamos o compasso em B e traçamos outro arco. Chamamos de C o ponto de intersecção dos arcos obtidos.

5º) Traçamos a semirreta $\overrightarrow{OC}$. A semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Os pontos da bissetriz de um ângulo têm uma propriedade notável: eles distam igualmente das semirretas que formam o ângulo. Note:

Tomando um ponto P qualquer na bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ e traçando por P as perpendiculares a $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, formamos dois triângulos, OPA e OPB, congruentes pelo caso especial de congruência LAA_o, uma vez que: $\overline{OP}$ é lado comum, $A\hat{O}P \cong B\hat{O}P$ (pois $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz) e $O\hat{A}P \cong O\hat{B}P$ (pois ambos são retos).

Banco de imagens/Arquivo da editora

A **bissetriz** do ângulo $P\hat{O}Q$ é o lugar geométrico dos pontos que distam igualmente de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Nenhum ponto fora da bissetriz tem essa propriedade.

Orientações didáticas

Bissetriz de um ângulo

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA17** ao aplicar o conceito de bissetriz como lugar geométrico na resolução de problemas. Em *Participe*, mobiliza-se com maior ênfase a **CEMAT02** ao propor que os estudantes realizem algumas construções envolvendo bissetrizes.

O conceito de bissetriz é retomado utilizando o conceito de congruência de triângulos. Neste momento, destaque para os estudantes que qualquer ponto da semirreta que forma a bissetriz do ângulo dado é equidistante aos lados do ângulo. Por essa razão, a bissetriz também é um lugar geométrico, já que seus pontos apresentam uma mesma propriedade.

Orientações didáticas

Construindo a bissetriz de um ângulo

Para explorar com os estudantes a construção da bissetriz de um ângulo, solicite a eles que providenciem previamente régua e compasso.

Participe

Peça aos estudantes que, em uma folha de papel avulsa, reproduzam cada etapa da construção da bissetriz de um ângulo. Explore a construção de bissetrizes de ângulos agudos.

Caso tenha possibilidade de utilizar um *software* para construir a bissetriz, peça para que os estudantes registrem os passos da construção realizada no *software*.

Atividades

Nas atividades propostas, espera-se que os estudantes utilizem procedimentos e conhecimentos relativos à construção da bissetriz de um ângulo para resolver problemas.

No caso das atividades **7** e **8**, a condição de haver semirretas bissetrizes nas imagens permite aos estudantes estabelecer uma relação entre as incógnitas, resultando em equação do 1º grau na primeira atividade, e um sistema de duas equações com duas incógnitas na segunda atividade.

A atividade **10** necessita de transferidor para estabelecermos os ângulos mencionados no enunciado.

As atividades **11** e **12** necessitam de construções com régua e compasso.

Construindo a bissetriz de um ângulo

Participe — Faça as atividades no caderno.

Use régua e compasso para construir no caderno o que se pede em cada item a seguir.

a) Desenhe um ângulo raso $A\hat{O}B$. As construções encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Seguindo os passos do tópico "Construindo a bissetriz de um ângulo", trace a bissetriz $\overrightarrow{OC}$ de $A\hat{O}B$.

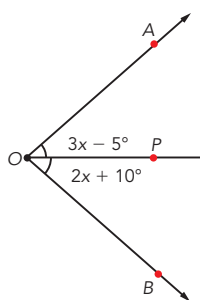
c) Quanto mede o ângulo $A\hat{O}C$? 90°

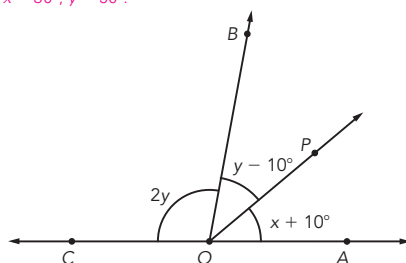
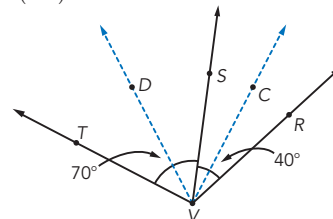
d) Qual é a medida do ângulo $C\hat{O}B$? 90°

e) Seguindo os mesmos passos indicados no item **b**, construa a bissetriz $\overrightarrow{OD}$ do ângulo $B\hat{O}C$.

Atividades

11. Distam igualmente de $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. A construção encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.
12. As construções encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

7. A semirreta $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$, $med(A\hat{O}P) = 3x - 5°$ e $med(B\hat{O}P) = 2x + 10°$. Qual é o valor de x? $x = 15°$

8. A semirreta $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$, $med(A\hat{O}P) = x + 10°$, $med(B\hat{O}P) = y - 10°$ e $med(B\hat{O}C) = 2y$. Determine x e y.

$x = 30°$; $y = 50°$.

9. Na figura, traçamos as semirretas $\overrightarrow{VR}$, $\overrightarrow{VS}$ e $\overrightarrow{VT}$, nessa ordem, tais que $med(R\hat{V}S) = 40°$ e $med(S\hat{V}T) = 70°$.

Responda no caderno:

a) Quanto mede o ângulo $R\hat{V}T$? 110°

b) Se $\overrightarrow{VC}$ é bissetriz de $R\hat{V}S$ e $\overrightarrow{VD}$ é bissetriz de $S\hat{V}T$, quanto mede $C\hat{V}D$? 55°

10. A semirreta $\overrightarrow{OY}$ é interna ao ângulo $X\hat{O}Z$. O ângulo $X\hat{O}Y$ mede 60° e $Y\hat{O}Z$ mede 100°. A semirreta $\overrightarrow{OR}$ é bissetriz de $X\hat{O}Z$. No caderno, represente esses ângulos e as semirretas em uma figura e calcule quanto mede $Y\hat{O}R$. 20° **10.** As construções encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

11. No caderno, com o auxílio de régua e compasso, construa um ângulo $A\hat{O}B$ com 60° de medida. Depois, construa a bissetriz $\overrightarrow{OX}$ desse ângulo. Qual é a propriedade que todos os pontos de $\overrightarrow{OX}$ têm?

12. Com o auxílio de régua e compasso, construa um triângulo ABC qualquer no caderno. Depois:

a) construa a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$;

b) construa a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$;

c) chame de P a intersecção das bissetrizes construídas;

d) compare as medidas de distância de P até cada lado do triângulo ABC.

Bissetrizes e incentro

Em um triângulo ABC, tracemos a bissetriz $\overrightarrow{AS_1}$, relativa ao ângulo $\hat{A}$, de modo que S_1 é o ponto de interseção da bissetriz com o lado $\overline{BC}$.

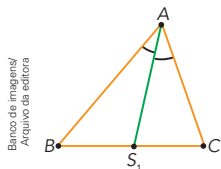
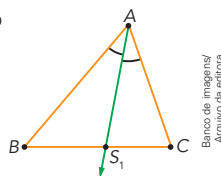
Destaquemos o segmento de reta $\overline{AS_1}$.

O segmento de reta $\overline{AS_1}$ é uma **bissetriz** do triângulo ABC.

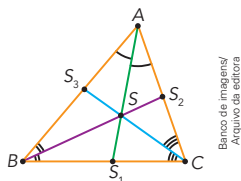
Verifique que:

- $\overline{AS_1}$ está contido na semirreta $\overrightarrow{AS_1}$ (bissetriz do ângulo $\hat{A}$);
- S_1 é a interseção do lado $\overline{BC}$ com a bissetriz do ângulo $\hat{A}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Banco de imagens/Arquivo da editora

Bissetriz de um triângulo é um segmento de reta com extremidades em um vértice e no lado oposto e que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.

Um triângulo tem 3 bissetrizes. Na figura, as 3 bissetrizes são:

- $\overline{AS_1}$, bissetriz relativa ao lado $\overline{BC}$ ou ao vértice A;
- $\overline{BS_2}$, bissetriz relativa ao lado $\overline{AC}$ ou ao vértice B;
- $\overline{CS_3}$, bissetriz relativa ao lado $\overline{AB}$ ou ao vértice C.

Banco de imagens/Arquivo da editora

As 3 bissetrizes de um triângulo encontram-se em um ponto chamado **incentro do triângulo**.

Nessa figura, S é o **incentro** do triângulo ABC.

Participe

Faça as atividades no caderno.

Construindo um canteiro

Na reforma de um jardim, foi construído um pequeno canteiro triangular unido pelas estacas A e B, A e C e B e C, como representado a seguir.

Flash Vector/Shutterstock

Para semear uma flor no canteiro, a jardineira pensou em duas opções:

- Opção 1: A flor deve estar à mesma medida de distância das estacas $\overline{AB}$; $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.
- Opção 2: A flor deve estar à mesma medida de distância das estacas A, B e C.

a) Com o auxílio de régua e compasso, copie no caderno o canteiro triangular e registre posição da flor nas duas opções de plantio. Qual das opções é a mais viável? Justifique.

b) Escreva as características do ponto que representa a posição em que a planta deve ser semeada.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Bissetrizes e incentro

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA17** ao aplicar os conceitos de bissetriz como lugar geométrico, além do conceito de incentro, para a resolução de problemas. Em *Participe*, mobiliza-se com maior ênfase a **CEMAT02** ao propor que os estudantes realizem algumas construções envolvendo incentro.

Sugerimos que o trabalho envolvendo bissetrizes e incentro seja realizado de maneira experimental, por meio de dobraduras. Para isso, oriente os estudantes a desenhar um triângulo ABC em uma folha de papel e dobrar a folha para obter o vinco que dá a ideia de bissetriz de cada um dos ângulos internos do triângulo representado. Por exemplo, dobrar a folha de modo que o lado AB fique sobreposto ao lado BC. Ao repetir esse procedimento para os outros dois ângulos internos do triângulo, deve-se obter, aproximadamente, o seu incentro, que deve ser a intersecção dos três vincos feitos.

Participe

Explore com os estudantes os passos da construção do incentro. Auxilie-os a concluírem que o incentro é o ponto de intersecção das três bissetrizes de um triângulo, e, como esse ponto é equidistante dos lados do triângulo, ele é a solução do problema.

Orientações didáticas

Matemática e tecnologias

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA15** ao propor a construção de um triângulo utilizando o *software* GeoGebra.

Se julgar necessário, apresente as ferramentas do GeoGebra antes de iniciar a execução das etapas da construção. Instigue os estudantes a manusear o *software* para se familiarizarem com as ferramentas necessárias para a realização da atividade.

Matemática e tecnologias

Construções geométricas no GeoGebra

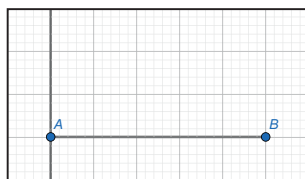
Agora, vamos utilizar o GeoGebra para construir triângulos a partir das medidas dos ângulos. O GeoGebra é um *software* gratuito de Matemática que pode ser utilizado em computadores (faça o *download* no *site* https://www.geogebra.org/download – acesso em: 23 mar. 2021); em *smartphones* (faça o *download* do aplicativo na loja oficial de aplicativos do sistema operacional do aparelho); ou virtualmente no *site* https://www.geogebra.org/geometry – acesso em: 23 mar. 2021).

No GeoGebra, para construir um triângulo a partir das medidas dos ângulos, siga estes passos:

1º) Na aba "Ferramentas", em "Ferramentas Básicas", selecione o ícone "Segmento" com o botão esquerdo do *mouse* e trace um segmento de reta qualquer na malha quadriculada.

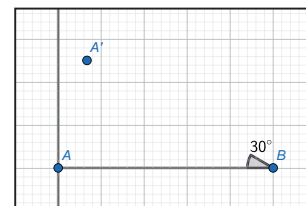
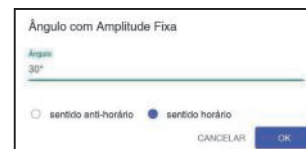
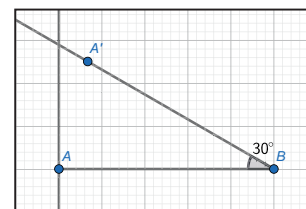
Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

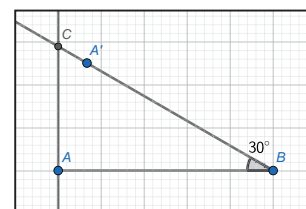
Tela do GeoGebra após o 1º passo.

2º) Ainda na aba "Ferramentas", em "Construções", selecione o ícone "Reta perpendicular" com o botão esquerdo do *mouse*, clique com o botão esquerdo do *mouse* no ponto *A* e, depois, no segmento de reta.

Tela do GeoGebra após o 2º passo.

3º) Agora, na aba "Ferramentas", em "Medições", selecione o ícone "Ângulo com Amplitude Fixa" com o botão esquerdo do *mouse*, clique com o botão esquerdo do *mouse* no ponto *A* e, depois, no ponto *B*. Na janela que abrir, digite 30° e selecione "sentido horário", obtendo o ângulo $A\hat{B}A'$.

Tela do GeoGebra após o 3º passo.

Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

4º) Na aba "Ferramentas", em "Retas", selecione o ícone "Semirreta" com o botão esquerdo do *mouse*, clique com o botão esquerdo do *mouse* no ponto *B* e, depois, no ponto *A'*.

Tela do GeoGebra após o 4º passo.

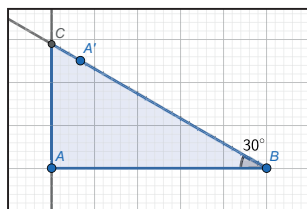
5º) Com o ícone "Ponto" selecionado na aba "Ferramentas", em "Ferramentas Básicas", marque o ponto *C* na interseção da reta perpendicular pelo ponto *A*, construída no 2º passo, com a semirreta construída no passo anterior.

Tela do GeoGebra após o 5º passo.

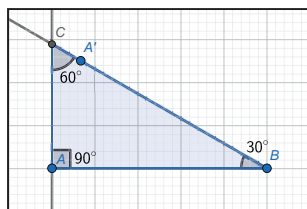
6º) Na aba "Ferramentas", em "Polígonos", selecione o ícone "Polígono" e clique nos pontos *A*, *B*, *C* e *A*, e obtenha o triângulo *ABC*.

Proposta para o professor

A tese a seguir mostra a utilização do GeoGebra no ensino de geometria.

ALVES, Wecsley Fernando Marçal. *Uso do GeoGebra no ensino de geometria plana no ensino básico*. 2017. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, PROFMAT – Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional – Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Jataí, 2017. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/8086. Acesso em: 23 jun. 2022.

Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

Tela do GeoGebra após o 6º passo.

7º) Para conferir a medida dos outros ângulos do triângulo, na aba "Ferramentas", em "Medições", selecione o ícone "Ângulo" e clique nos pontos *B*, *A* e *C*, nessa ordem, obtendo a medida de 90°. Depois, clique em *A*, *C* e *B*, nessa ordem, e obtenha a medida de 60°.

Tela do GeoGebra após o 7º passo.

1. Explique como seria possível determinar a medida do ângulo $A\hat{C}B$ sem utilizar nenhuma ferramenta do GeoGebra. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. A partir do triângulo construído anteriormente, no GeoGebra, trace a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$. Na aba "Ferramentas", em "Construções", usando o ícone "Bissetriz", clique nos pontos *A*, *C* e *B*, nessa ordem. Explique no caderno o que aconteceu com a figura. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Enquanto o GeoGebra considera a bissetriz como uma reta, nesta obra, consideramos a bissetriz do triângulo um segmento de reta e a bissetriz do ângulo uma semirreta.

3. A partir do triângulo construído no item **2**, no GeoGebra, trace a mediatriz do segmento $\overline{BC}$. Na aba "Ferramentas", em "Construções", usando o ícone "Mediatriz", clique nos pontos *B* e *C*. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

4. Descreva o passo a passo para construir, no GeoGebra, um triângulo cujas medidas dos ângulos sejam 90°, 45° e 45°. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

5. Utilizando o passo a passo que você descreveu no item **4**, faça as construções no GeoGebra. Depois, para determinar a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, na aba "Ferramentas", em "Construções", selecione o ícone "Mediatriz" e clique nos pontos *A* e *B*, nessa ordem. A construção encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

6. Utilizando os aprendizados desta seção, construa no GeoGebra um triângulo retângulo que tenha um ângulo medindo 60°. Depois, trace a bissetriz desse ângulo. A construção encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

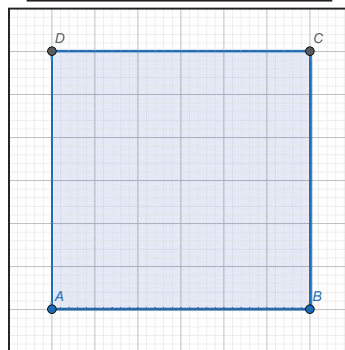
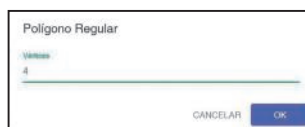
Construção de polígonos regulares

Para construir polígonos regulares no GeoGebra, siga este passo a passo:

1º) Na aba "Ferramentas", em "Ferramentas Básicas", com o botão esquerdo do *mouse*, selecione o ícone "Ponto". Depois, na malha quadriculada, marque os pontos *A* e *B* para determinar a medida do lado do polígono regular que deseja construir.

Tela do GeoGebra após o 1º passo.

2º) Na aba "Ferramentas", em "Polígonos", com o botão esquerdo do *mouse*, selecione o ícone "Polígono regular". Depois, selecione os pontos *A* e *B*. Na janela que abrir, digite o número de vértices que deseja que seu polígono tenha e clique em "OK".

Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

Tela do GeoGebra após o 2º passo.

7. No GeoGebra, construa um triângulo equilátero com lado medindo 3 unidades. A construção encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Matemática e tecnologias

As atividades de construção devem ser realizadas individualmente. Caso não haja computadores suficientes para toda a turma, proponha que os estudantes realizem as atividades alternadamente.

Destacamos a atividade **1** em que se espera que os estudantes respondam que o ângulo $A\hat{C}B$ pode ser determinado subtraindo os ângulos conhecidos de 180°, visto que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso. Esta atividade contribui ainda para o desenvolvimento da habilidade de argumentação matemática.

Na atividade **2**, espera-se que os estudantes respondam que um triângulo foi dividido em outros dois triângulos. Esta atividade contribui para o desenvolvimento da habilidade de argumentação matemática.

Orientações didáticas

Propriedades dos triângulos isósceles

Nesse momento, tem-se uma proposta de aplicação dos conceitos trabalhados anteriormente em triângulos classificados como isósceles. Dessa maneira, pode-se construir a bissetriz do ângulo oposto a base e pode-se deduzir a propriedade da congruência dos ângulos da base do triângulo isósceles.

Posteriormente, utilizando da congruência dos triângulos *ABP* e *ACP*, pode-se deduzir também que o ponto de intersecção da bissetriz com a base do triângulo é o ponto médio da base. E, por fim, pode-se deduzir também que as medidas dos ângulos $B\hat{P}A$ e $C\hat{P}A$ são iguais a 90°, ou seja, a bissetriz é também a altura relativa à base.

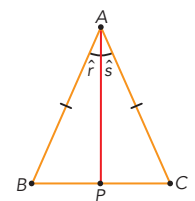
Propriedades dos triângulos isósceles

Em um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$, traçamos a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ (ângulo do vértice) e chamamos de *P* o ponto em que ela encontra a base $\overline{BC}$. Depois, decompomos o triângulo *ABC* em dois outros: o triângulo *ABP* e o triângulo *ACP*.

Como:

- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (porque $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$);
- $\hat{r} \cong \hat{s}$ (porque $\overline{AP}$ é bissetriz de $\hat{A}$);
- $\overline{AP}$ é lado comum aos dois triângulos;

os triângulos *ABP* e *ACP* são congruentes pelo caso LAL.

Da congruência $\triangle ABP \cong \triangle ACP$, podemos concluir que $\hat{B} \cong \hat{C}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Em qualquer triângulo isósceles, os **ângulos da base são congruentes**.

A primeira demonstração dessa propriedade é atribuída a Tales de Mileto (ver seção *Na História*, no final deste capítulo).

Da congruência $\triangle ABP \cong \triangle ACP$, também podemos concluir que $\overline{BP} \cong \overline{PC}$, ou seja, *P* é ponto médio do lado $\overline{BC}$ e, em consequência, $\overline{AP}$ é o segmento de reta com extremidade em um vértice do triângulo e no ponto médio do lado oposto a esse vértice. O segmento de reta $\overline{AP}$ é chamado de **mediana**.

Em qualquer triângulo isósceles, **a bissetriz do ângulo do vértice é também mediana relativa à base.**

Finalmente, da congruência $\triangle ABP \cong \triangle ACP$, podemos concluir que $B\hat{P}A \cong C\hat{P}A$. Como a soma das medidas desses dois ângulos é 180° (porque *B*, *P* e *C* estão alinhados), deduzimos que $B\hat{P}A \cong C\hat{P}A$ e que a medida desses ângulos é 90°. Dessa maneira, $\overline{AP}$ é perpendicular a $\overline{BC}$ e, em consequência, $\overline{AP}$ é uma altura.

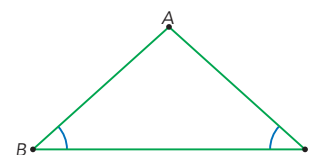
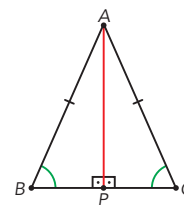
Em qualquer triângulo isósceles, **a bissetriz do ângulo do vértice é também a altura relativa à base.**

Em resumo, se o triângulo *ABC* é isósceles de base $\overline{BC}$ e *P* é o ponto médio da base, então:

- $\hat{B} \cong \hat{C}$;
- $\overline{AP}$ é mediana, altura e bissetriz desse triângulo.

Propriedade recíproca

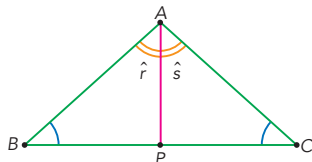
Vamos agora pensar em um triângulo *ABC* que tenha dois ângulos congruentes ($\hat{B} \cong \hat{C}$).

Tracemos a bissetriz $\overline{AP}$ do ângulo $\hat{A}$ para decompor o triângulo *ABC* em dois outros: $\triangle ABP$ e $\triangle ACP$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Como:

- $\overline{AP}$ é lado comum aos dois triângulos;
- $\hat{r} \cong \hat{s}$ (porque $\overline{AP}$ é bissetriz de $\hat{A}$);
- $\hat{B} \cong \hat{C}$ (hipótese admitida);

os triângulos ABP e ACP são congruentes pelo caso LAA_o.

Da congruência $\triangle ABP \cong \triangle ACP$, podemos concluir que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, ou seja, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Guy Christian/Hemis/AFP

As estruturas desta ponte em Millau, na França, lembram triângulos isósceles. Fotografia de 2021.

Se um triângulo tem **2 ângulos congruentes**, então ele é um **triângulo isósceles**.

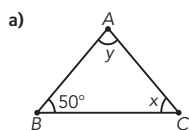
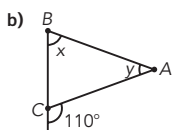
Atividades

Faça as atividades no caderno.

13. Em cada caso a seguir, o triângulo ABC é isósceles, com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Calcule x e y no caderno.

a) $x = 50°$ e $y = 80°$.

b) $x = 70°$ e $y = 40°$.

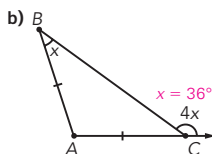
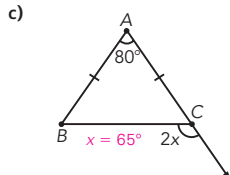
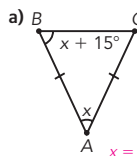
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

14. Um triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AC}$. Sabendo que $\hat{A}$ mede $x + 30°$ e $\hat{C}$ mede $2x - 20°$, determine x. $x = 50°$

15. O triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$. Determine o valor de x em cada caso.

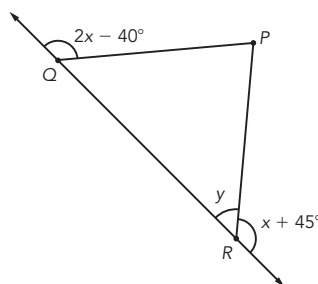
a) $x = 50°$

b) $x = 36°$

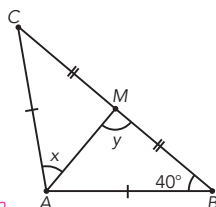
c) $x = 65°$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

16. Em um triângulo isósceles, a medida dos ângulos externos adjacentes à base é 130°. Determine as medidas dos ângulos do triângulo. 50°, 50° e 80°.

17. O triângulo PQR é isósceles de base $\overline{QR}$. Verifique a figura e determine x e y. $x = 85°$ e $y = 50°$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

18. Em um triângulo isósceles CDE, $\overline{DE}$ é a base e $\overline{CS}$ é uma bissetriz. Sabendo que $\overline{DS}$ mede 5 cm, determine ES e a medida de $C\hat{S}D$. $ES = 5$ cm, $C\hat{S}D$ mede 90°.

19. Em um triângulo isósceles ABC, com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{AM}$ é a mediana. Se $\hat{B}$ mede 40°, determine as medidas x e y, de $M\hat{A}C$ e de $A\hat{M}B$, respectivamente. $x = 50°$; $y = 90°$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

20. A resposta encontra-se na seção *Resolução* deste Manual.

20. Usando o caso ALA estudado no capítulo anterior, pode-se afirmar que as bissetrizes relativas aos vértices da base de um triângulo isósceles são congruentes? Responda no caderno, justificando por quê.

Orientações didáticas

Atividades

Na seção atividades, tem-se um momento de consolidação dos conceitos de bissetriz, triângulo isósceles, e mediana. Caso considere necessário, retome esses conceitos e suas relações. Além disso, enfatize o uso da álgebra como ferramenta para a resolução das questões que envolvem medidas de ângulos e/ou segmentos de reta.

Nas atividades **14** a **16**, o estudante resolve equações do 1º grau a partir da informação de que os triângulos são isósceles. E na atividade **16**, é possível retomar o conceito de ângulo externo.

Nas atividades **17** e **19** há duas incógnitas relacionadas nas imagens.

Na atividade **19**, a resolução passa por perceber que a mediana $\overline{AM}$ é ao mesmo tempo altura relativa ao lado $\overline{BC}$ e bissetriz do ângulo $C\hat{A}B$. Desse modo, o ângulo $\hat{y}$ mede 90°. Além disso, como o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, o ângulo $A\hat{C}B$ mede 40° e o ângulo do vértice $C\hat{A}B$ mede 100°. A incógnita x indica o ângulo do vértice bissectado. Ou seja, x mede 50°.

Orientações didáticas

Propriedades dos triângulos equiláteros

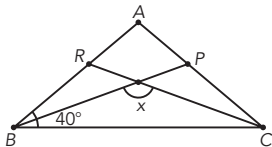
Ao explorar este tópico, sugerimos a construção de um triângulo equilátero e que seja feita a comparação com um triângulo isósceles. Comente também que equiângulo significa "que tem medidas de ângulos internos iguais". Uma questão para estimular os estudantes ao debate: "Quais as similaridades entre esses dois triângulos?".

Após as considerações deles e um encaminhamento das respostas mais comuns, trace todas as medianas, alturas, mediatrizes e bissetrizes do triângulo equilátero para concluir que, em um triângulo equilátero, o baricentro, o ortocentro, o circuncentro e o incentro coincidem no mesmo ponto.

Atividades

Nas atividades **24** e **25**, caso haja necessidade, retome as propriedades de triângulos equiláteros e isósceles. E, na atividade **24**, tem-se uma oportunidade para retomar o conceito de congruência de ângulos opostos pelo vértice, pois ela deve ser utilizada na resolução do item **b**.

Faça as atividades no caderno.

21. Em um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$, um dos ângulos da base mede 40°. Determine a medida do ângulo obtuso formado pelas bissetrizes $\overline{BP}$ e $\overline{CR}$. $x = 140°$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

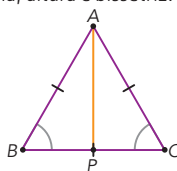
22. O triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, e $\overline{BP}$ é bissetriz. Calcule no caderno as medidas de x, y e z. $x = 80°$; $y = 20°$; $z = 60°$.

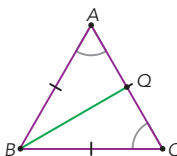
Banco de imagens/Arquivo da editora

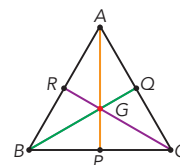
Propriedades dos triângulos equiláteros

Vamos considerar um triângulo equilátero ABC e chamar de $\overline{AP}$ e $\overline{BQ}$ duas de suas medianas.

Como $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, esse triângulo também é isósceles de base $\overline{BC}$; logo:

- $\hat{B} \cong \hat{C}$;
- $\overline{AP}$ é mediana, altura e bissetriz.

Como $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, esse triângulo também é isósceles de base $\overline{AC}$; logo:

- $\hat{A} \cong \hat{C}$;
- $\overline{BQ}$ é mediana, altura e bissetriz.

Em resumo, se o triângulo ABC é equilátero e os pontos médios de seus lados são P, Q e R, então:

- $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$;
- $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ e $\overline{CR}$ são medianas, alturas e bissetrizes;
- esses segmentos de reta se cruzam em um único ponto, G, chamado de **baricentro**.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Todo triângulo equilátero é equiângulo e isósceles.

Também vale a recíproca:

Todo triângulo equiângulo é equilátero e isósceles.

Atividades

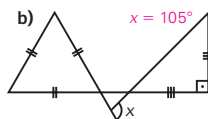
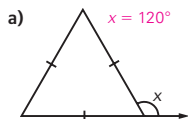
Faça as atividades no caderno.

23. Quanto medem os ângulos de um triângulo equilátero? Responda no caderno. Os três ângulos medem 60°.

24. Nas figuras a seguir, segmentos de reta com marcas iguais são congruentes. Determine x em cada item.

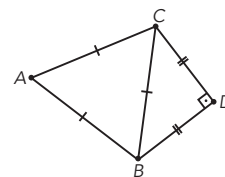
a) $x = 120°$

b) $x = 105°$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

25. Na figura, o triângulo ABC é equilátero e o triângulo CDB é isósceles. Calcule no caderno as medidas de $B\hat{C}D$ e $A\hat{B}D$. $B\hat{C}D$ mede 45° e $A\hat{B}D$ mede 105°.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Na História

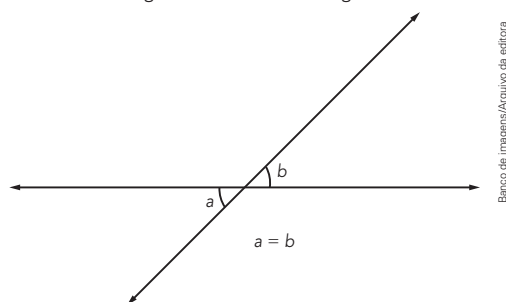
Faça as atividades no caderno.

Origens da Geometria

O ser humano sempre esteve cercado por uma rica variedade de formas de figuras geométricas na natureza e, desde a Antiguidade, tem a capacidade inata de perceber essas configurações e compará-las quanto à forma e ao tamanho.

Muitos séculos se passaram até que a humanidade começasse a estabelecer procedimentos gerais considerando características comuns em situações geométricas particulares, usando provavelmente um método indutivo rudimentar (baseado na observação e na experimentação). Os egípcios, por exemplo, sabiam que a medida de área de um retângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura. Por meio dessa propriedade, podiam calcular a medida de área de todos os terrenos retangulares, indistintamente.

Tales de Mileto (c. 585 a.C.) justificou alguns resultados já conhecidos na época, mas que, até então, não haviam sido demonstrados. São eles: ângulos opostos pelo vértice são congruentes (verifique a figura a seguir) e os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

b
a
$a = b$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Pitágoras de Samos (c. 532 a.C.) e os seguidores das ideias dele, os chamados pitagóricos, tentaram organizar a teoria das retas paralelas por meio de um encadeamento de resultados, que eram provados a partir de alguns conceitos e pressupostos básicos, mediante raciocínios lógicos. Acredita-se que Pitágoras e os pitagóricos teriam inaugurado, assim, o chamado **método dedutivo**, que hoje fundamenta toda a Matemática. Posteriormente, alguns matemáticos escreveram obras que visavam apresentar toda a Geometria pelo método dedutivo. Dessas obras, a mais antiga ainda preservada chama-se *Os Elementos* e é composta de 13 volumes. Seu autor, o grego Euclides, viveu por volta do século IV a.C.

A mais antiga cópia conhecida de *Os Elementos* é um manuscrito do ano 880 d.C., que atualmente se encontra na biblioteca da Universidade de Oxford, na Inglaterra.

No caderno, responda: As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

1. Em que, principalmente, as contribuições geométricas de Pitágoras e dos pitagóricos superou a de Tales?
2. Qual foi o grande avanço das contribuições geométricas de Euclides em relação às de Pitágoras e dos pitagóricos?
3. Como você explica o fato de a mais antiga cópia conhecida de *Os Elementos*, de Euclides, ser do ano 880 d.C. e esse autor ter vivido por volta do século IV a.C., ou seja, mais de um milênio antes?
4. Logo no início de *Os Elementos*, Euclides explicou o que eram **ponto**, **reta** e **plano**, entre outros conceitos. Entretanto, muitas de suas definições deixaram de ser adotadas. Por exemplo, esta que, segundo ele: "Ponto é aquilo que não tem partes". Hoje em dia, o enfoque inicial da Geometria é outro. Qual? Por quê?

Orientações didáticas

Na História

Na BNCC

Esta seção mobiliza com maior ênfase a **CG01** e a **CEMAT01** por promover o desenvolvimento de conjecturas e inferências que ajudam a compreender que conquistas científicas, em especial em Matemática, são fruto do trabalho de muitas pessoas e não de atos isolados.

Proponha uma leitura em grupo do texto "Origens da Geometria".

Destacamos que, na atividade **2**, a obra *Os Elementos*, de Euclides, contribui para o desenvolvimento do método dedutivo.

Na atividade **3**, espera-se que os estudantes argumentem que o registro foi compilado e publicado mais de um milênio depois de Euclides ter vivido.

E, para a atividade **4**, são esperadas respostas relacionadas à característica da Geometria tanto de modelagem de situações reais como oportunizar demonstrações de teoremas favorecendo, assim, o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo.

Proposta para o professor

No artigo a seguir são apresentados detalhes adicionais sobre a obra *Os Elementos*, de Euclides.

ÁVILA, Geraldo. Euclides, geometria e fundamentos. *Revista do professor de matemática*, v. 45, 2001. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/45/1.htm. Acesso em: 13 maio 2022.

O seguinte livro traz problemas, teoremas e demonstrações da geometria grega.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo muitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase as **CEMAT02** e **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

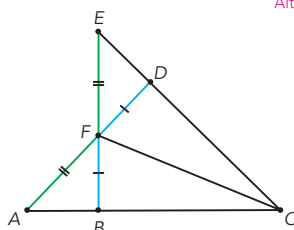
Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

Nas atividades **1**, **2** e **10**, é utilizado o conceito de congruência de triângulos para resolver problemas. Em caso de dúvidas, retome os tópicos “Conceito matemático de congruência de triângulos” e “Casos de congruência”.

Na Unidade

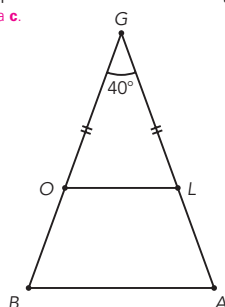
1. Na figura a seguir, são triângulos congruentes: Alternativa **c**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) $\triangle ACF$ e $\triangle BEC$.
b) $\triangle CEF$ e $\triangle BCF$.
c) $\triangle FDE$ e $\triangle FBA$.
d) $\triangle ACD$ e $\triangle ECF$.

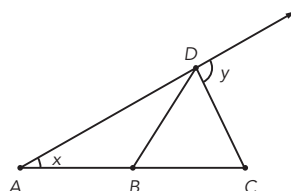
2. (PUC-SP) Dados os triângulos ABC e ADC, com $AB = CD$ e $AD = BC$, podemos concluir que o ângulo $A\hat{B}C$ é congruente ao ângulo: Alternativa **d**.

a) $B\hat{A}C$
b) $A\hat{B}D$
c) $A\hat{C}D$
d) $C\hat{D}A$
e) $D\hat{C}B$

3. Na figura, o triângulo isósceles GOL tem base $\overline{OL}$, e $\hat{G}$ mede 40°. No quadrilátero $BOLA$, os lados $\overline{OL}$ e $\overline{AB}$ são paralelos. A medida do ângulo $O\hat{B}A$ é: Alternativa **c**.

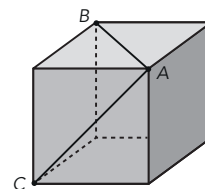
Banco de imagens/Arquivo da editora

a) 50°
b) 60°
c) 70°
d) 80°

4. (Fuvest-SP) Na figura, $AB = BD = CD$.

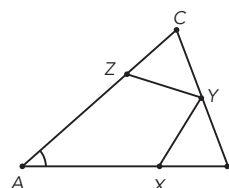
Banco de imagens/Arquivo da editora

Então: Alternativa **a**.

a) $y = 3x$
b) $y = 2x$
c) $x = y = 180°$
d) $x = y$
e) $3x = 2y$

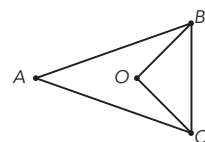
5. (Obmep) Na figura estão desenhadas diagonais de duas faces de um cubo. Quanto mede o ângulo $B\hat{A}C$ formado por elas? Alternativa **b**.

Reprodução/Obmep, 2016.org

a) 45°
b) 60°
c) 75°
d) 90°
e) 120°

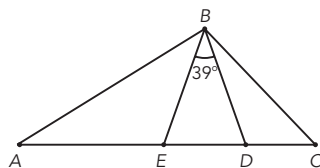
6. (Fuvest-SP) Na figura, $AB = AC$, $BX = BY$ e $CZ = CY$. Se o ângulo A mede 40°, então o ângulo $X\hat{Y}Z$ mede: Alternativa **d**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 90°

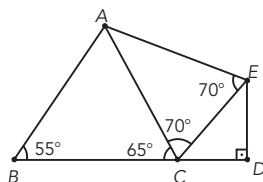
7. (Fuvest-SP) Na figura a seguir, $AB = AC$, O é o ponto de encontro das bissetrizes do triângulo ABC e o ângulo $B\hat{O}C$ é o triplo do ângulo $\hat{A}$. Então, a medida de $\hat{A}$ é: Alternativa **d**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) 18°
b) 12°
c) 24°
d) 36°
e) 15°

8. (FGV-EESP) A figura representa um triângulo ABC, com E e D sendo pontos sobre $\overline{AC}$. Sabe-se ainda que $AB = AD$, $CB = CE$ e que $E\hat{B}D$ mede 39°. Nas condições dadas, a medida de $A\hat{B}C$ é: Alternativa **a**.

B
39°
A E D C

a) 102°
b) 108°
c) 111°
d) 115°
e) 117°

9. (UFMG) Observe a figura.

A
E
70°
70°
55°
65°
B C D

Dado: Em um triângulo, ao maior ângulo opõe-se ao maior lado.

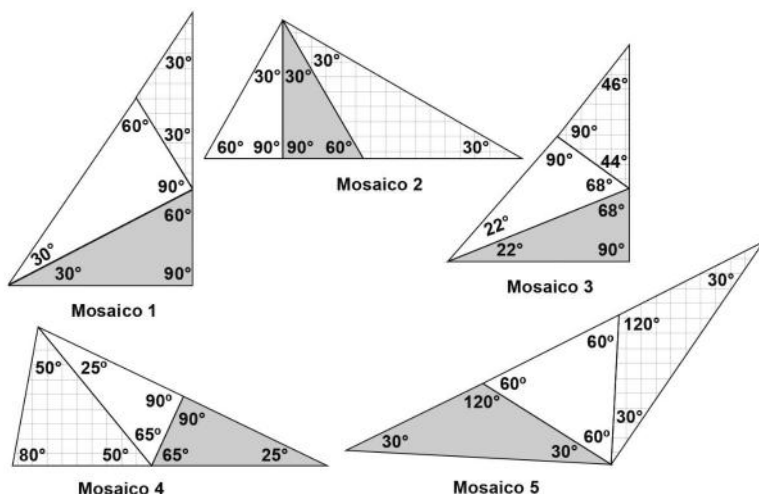
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Com base nos dados dessa figura, pode-se afirmar que o maior segmento é: Alternativa **a**.

a) $\overline{AB}$
b) $\overline{AE}$
c) $\overline{EC}$
d) $\overline{BC}$
e) $\overline{ED}$

10. (Enem) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.

Mosaico 1
Mosaico 2
Mosaico 3
Mosaico 4
Mosaico 5

Reprodução/ENEM, 2016.

Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o: Alternativa **b**.

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Orientações didáticas

Na Unidade

Para aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz na resolução de problemas, indicamos as atividades **3**, **4**, **6**, **7** e **8**.

Na atividade **3**, se o estudante estiver com dificuldades de identificar a justificativa de o ângulo da base medir 70°, comece pelo triângulo GOL, que pelo enunciado é um triângulo isósceles. Então, necessariamente o ângulo $G\hat{O}L$ deve medir 70°, pois $40° + 70° + 70° = 180°$. Pelo fato de os segmentos de reta $\overline{OL}$ e $\overline{BA}$ serem paralelos, eles cortam o segmento de reta $\overline{GB}$ em ângulos correspondentes de mesma medida. Daí, conclui-se que o ângulo $O\hat{B}A$ mede 70°.

A atividade **10** pode parecer ter maior grau de complexidade, no entanto, os estudantes têm plenas condições de resolvê-la embasados nos conteúdos estudados nesta Unidade. Em caso de dúvida, explore cada um dos mosaicos com a turma, mostrando a eles suas características.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da Unidade mobiliza com maior ênfase a **CG01**, a **CG02** e a **CEMAT02**, ao instigar a curiosidade intelectual e o raciocínio lógico dos estudantes, recorrendo à abordagem própria das ciências e valorizando o conhecimento construído sobre o mundo digital. Favorece ainda o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia.*

O pensamento algébrico possui uma estreita relação com o pensamento computacional. Desse modo, você pode considerar o texto de abertura da Unidade, que aborda a ideia de linguagem de programação, para promover atividades de pesquisa com os estudantes a fim de compreender como algumas ideias matemáticas, como a implicação ou a equivalência, são representadas nas diferentes linguagens de programação: “Qual é a simbologia utilizada para expressar ‘implica’ e ‘portanto’?”; “Como são representadas na linguagem de programação?”; “E em planilhas eletrônicas?”. Perguntas como essas podem auxiliar nesse debate e, ainda, aprofundar a discussão sobre os fluxogramas apresentados na teoria.

4 UNIDADE

Cálculo algébrico

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- resolver problemas que envolvem expressões algébricas aplicando as propriedades das operações;
- elaborar problemas que envolvem expressões algébricas;
- identificar a regularidade de sequências numéricas definidas por fórmulas recursiva e por fórmulas não recursiva;
- construir fluxogramas que permitam indicar os próximos números ou figuras de uma sequência definida por fórmulas recursiva e por fórmulas não recursiva.

CAPÍTULOS

Tela de *laptop* mostrando o trecho de um código em linguagem de programação que contém algoritmos.

86

BEST-BACKGROUNDS/Shutterstock

Linguagem de programação

Segundo o dicionário Oxford, **linguagem** é “qualquer meio sistemático de comunicar ideias ou sentimentos através de signos convencionais, sonoros, gráficos, gestuais, etc.”. A linguagem algébrica, por exemplo, comunica generalizações matemáticas por meio de letras, símbolos e números. O seu uso facilita a modelagem de situações que ocorrem na natureza ou na vida cotidiana.

A linguagem de programação não é muito diferente, ela serve para comunicar instruções a computadores por meio de símbolos específicos. Uma característica importante dessa linguagem é a necessidade de muita clareza e estrutura na comunicação das instruções, uma vez que um único símbolo errado é suficiente para o comando não ser executado. Existem diversas linguagens de programação diferentes, tais como Python, JavaScript, C, PHP, entre outras.

Para entendermos um pouco mais o funcionamento da linguagem de programação, vamos analisar o seguinte problema:

“Uma escola possui 4 *vans* com 12 lugares disponíveis para passageiros. Cada *van* precisa de, pelo menos, um professor para acompanhar nas viagens. Supondo que vão 4 professores e 48 estudantes, as *vans* da escola serão suficientes ou será necessário alugar mais *vans*?”

A resolução desse problema pode ser escrita com um passo a passo em língua natural, por exemplo:

1. Adicionar o número de professores com o número de estudantes.
2. Dividir a soma por 12.
3. Se o resultado for maior do que 4, significa que será preciso alugar mais *vans*.
4. Se o resultado for menor ou igual a 4, significa que as 4 *vans* são suficientes.

Esse mesmo passo a passo na linguagem Python seria assim:

```
num1 = int(input("Digite o número de professores: "))
num2 = int(input("Digite o número de estudantes: "))
soma = num1 + num2
div = soma/12
if div > 4:
        print("Será preciso alugar mais vans.")
else:
        print("As 4 vans são suficientes.")
```

O comando “int” informa ao computador de que será escrito um número inteiro; “input” pede a ele que leia uma informação teclada; “print”, que escreva algo na tela; “if”, que estabeleça uma condição; e “else”, que considere a condição contrária à anterior.

Fontes dos dados: OXFORD University Press. *Oxford Languages. Oxford University Press*, [*s. l.*], 2022. Disponível em: https://languages.oup.com/google-dictionary-pt/; BARRICHELLO, Leonardo. *Introdução ao pensamento computacional*. Livro Aberto de Matemática, [*s. l.*], [2021]. Disponível em: https://umlivroaberto.org/producao/pensamento-computacional/; CARVALHO, Flávia Pereira de. *Passo a passo para desenvolver um programa usando a linguagem Python*. FACCAT, [*s. l.*], [201-?]. Disponível em: https://fit.faccat.br/~fpereira/pagina/informatica/exemplos_trabalho_python/passo-a-passo_python_infeng2017-1.pdf. Acesso em: 20 maio 2022.

Você já conhecia a linguagem Python, citada no texto? Que outras linguagens você conhece? Junte-se a 4 colegas e façam uma pesquisa sobre alguma outra linguagem de programação, depois compartilhem com a turma os resultados da pesquisa. Você resolveria o problema anterior de um jeito diferente? Se sim, como você comunicaria a estratégia ao computador? No caderno, escreva um passo a passo em língua natural.
Respostas pessoais.

Prática de pesquisa

Orientações didáticas

Abertura

Aproveite o contexto de abertura para explicar o trecho de código Python em língua materna. É possível propor um exemplo elementar: “Determine a nota que cada estudante deve tirar em cada bimestre para ser promovido sem recuperação”. Caso julgue que esse exemplo não seja adequado por associar a promoção/reprovação a questões de autoestima dos estudantes, segue outro exemplo: “Defina o tema de uma festa na escola ou a música-tema de uma apresentação cultural por meio de um concurso ou uma seleção”.

Entender aspectos da computação, bem como saber onde aplicá-los, contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes, ao mesmo tempo que se utiliza o conhecimento matemático para o desenvolvimento tecnológico.

A construção do algoritmo em linguagem de programação, além de dar forma ao raciocínio lógico, promove a argumentação e contribui também para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Proposta para o professor

A tese a seguir traz uma proposta de trabalho para os anos finais do Ensino Fundamental envolvendo a linguagem Python.

PRESENTE, Guilherme M. *O ensino de matemática por meio da linguagem de programação Python*. 2020. 134 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2020. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/5020/1/ensinomatematicalinguagempython.pdf. Acesso em: 25 maio 2022.

Orientações didáticas

Expressões matemáticas que contêm letras

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade: **EF08MA06**, ao propor a resolução e elaboração de problemas que envolvem o cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações. Mobiliza a **CEMAT03** ao articular Álgebra e Geometria. O contexto apresentado favorece também o desenvolvimento do TCT *Trabalho.*

Neste tópico, são abordadas as expressões algébricas, inicialmente, como expressões que contêm letras. Pode ser um momento oportuno para apresentar aos estudantes o conceito de variável e, nesse sentido, dialogar com os estudantes em que situações precisamos recorrer a uma expressão que contenha letras (generalização) e em quais situações isso não se faz necessário.

O contexto sobre a fisioterapia esportiva possibilita uma discussão sobre o TCT *Trabalho*. Incentive os estudantes a realizar uma pesquisa sobre a atuação de um fisioterapeuta, sua formação acadêmica ou outros aspectos de interesse deles.

CAPÍTULO 7

Expressões algébricas

NA BNCC
EF08MA06
EF08MA10
EF08MA11

Expressões matemáticas que contêm letras

Fisioterapia esportiva

Paulo presta serviços de fisioterapia esportiva em uma clínica e recebe R$ 129,00 por hora trabalhada.

Você já pensou na carreira que deseja seguir no futuro? Como você imagina sua vida profissional daqui a alguns anos? Converse com os colegas e o professor e compartilhe suas expectativas. Respostas pessoais.

Entre as inúmeras possibilidades, a carreira de fisioterapia esportiva tem ganhado grande destaque. A procura pelo profissional que trabalha na prevenção e no tratamento de lesões de atletas de alto nível tem sido cada vez maior. Para saber mais desta profissão e os seus desafios, visite: FACULDADE DE MEDICINA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. *Fisioterapia esportiva*: conheça os desafios da profissão. Disponível em: https://eephcfmusp.org.br/portal/online/fisioterapia-esportiva/. Acesso em: 17 maio 2022.

BearFotos/Shutterstock

O fisioterapeuta especializado em esporte atende atletas e pessoas que praticam atividade física com frequência, atuando na prevenção e no tratamento de lesões.

Verifique na tabela a seguir o valor recebido por Paulo de acordo com a medida de tempo trabalhada.

Valores da fisioterapia esportiva

Medida de tempo trabalhada (em horas)	5	10	20	30
Valor recebido (em reais)	645	1290	2580	3870

Dados elaborados para fins didáticos.

Podemos indicar a medida de tempo trabalhada em horas por h e representar o valor recebido em reais pela expressão $129 \cdot h$.

Na resolução de muitos problemas, recorremos às letras para representar números e escrever simbolicamente expressões matemáticas. Construímos, assim, as chamadas **expressões algébricas**.

Expressões algébricas são formadas por letras, números e sinais de operações matemáticas. As letras que aparecem em uma expressão algébrica são denominadas **variáveis**.

Participe

Faça as atividades no caderno.

Para representar números desconhecidos, utilizamos letras: x, y, z, t, m, n, a, b, c, etc. Indique no caderno como podemos representar: Exemplos de resposta:

a) o triplo de um número. $3a$ (ou $3b$ ou $3c$ ou $3x$, etc.)

b) a soma de um número com seu quadrado. $x + x^2$

c) três quartos de um número adicionados a 5. $\frac{3}{4}x + 5$

d) a média aritmética de dois números. $\frac{a+b}{2}$

e) a medida da largura de um terreno mais 37 metros. $x + 37$

f) o suplemento do ângulo de medida de abertura x indicado na figura a seguir. $180° - x$

suplemento de x

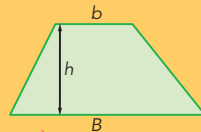
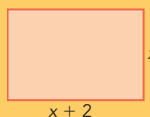
x

g) a medida de perímetro da região quadrada a seguir. $4x$

As imagens não estão representadas em proporção.

x

h) a medida de área das figuras poligonais a seguir.

x ; $x + 2$; b ; h ; B

$(x + 2) \cdot x$; $\left(\frac{B+b}{2}\right) \cdot h$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Jogo da Linguagem Algébrica

O objetivo desse jogo é auxiliar na leitura de expressões algébricas e na tradução, nessa linguagem, de informações apresentadas em situações-problema. Disponível em: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/eja/recurso-multimidia-professor/matematica/novaeja/m1u02/Jogo_da_Linguagem_Algebrica_Material_Anexo.pdf. Acesso em: 17 maio 2022.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Represente as expressões algébricas usando apenas símbolos matemáticos:

a) A terça parte do número a. $\frac{a}{3}$

b) A soma do dobro do número x com 5. $2x + 5$

c) O quadrado do número x. x^2

d) A soma do número x com sua raiz quadrada. **d)** $x + \sqrt{x}$

e) A diferença entre o quadrado e o quádruplo do número x. $x^2 - 4x$

f) O produto do inteiro n e seu sucessor. $n \cdot (n + 1)$

2. Represente por meio de expressão algébrica:

a) a soma do quadrado do número x com o triplo do número y; $x^2 + 3y$

b) a soma dos quadrados dos números x e y; $x^2 + y^2$

c) o quadrado da soma dos números a e b; $(a + b)^2$

d) a medida de área do triângulo de base medindo b e altura medindo h; $\frac{b \cdot h}{2}$

e) o complemento do ângulo de medida de abertura x; $90° - x$

f) a medida de perímetro do retângulo de base medindo x e altura medindo y. $2x + 2y$

3. Utilizando os comandos da linguagem Python introduzida no início desta Unidade, procure escrever, no caderno, o passo a passo a seguir de modo que um computador consiga executá-lo.

1. Insira um número inteiro que represente uma medida de tempo em minutos.
2. Divida o número por 60.
3. Se o resultado for maior do que 1, trata-se de mais de 1 hora.
4. Se o resultado for menor ou igual a 1, trata-se de 1 hora ou menos.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Você já ouviu falar sobre o Scratch? É uma comunidade *on-line* na qual você pode criar suas próprias histórias, jogos e animações interativas, além de compartilhar suas criações com pessoas do mundo todo. Interessante, não é mesmo? O Scratch é um *software* livre voltado para o público jovem, na faixa etária de 8 a 16 anos. Que tal conhecê-lo? Visite: SCRATCH. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 17 maio 2022.

Orientações didáticas

Participe

A atividade deste boxe articula Álgebra e Geometria. Nela, os estudantes têm a oportunidade de desenvolver a habilidade de representar situações utilizando a linguagem algébrica, inicialmente transformando expressões em linguagem materna para o uso de letras e, posteriormente, relembrando alguns contextos algébricos que recorrem ao uso de expressões algébricas.

No boxe de sugestão de acesso à internet, é sugerido o Jogo da Linguagem Algébrica, que, de maneira lúdica, aborda os conceitos explorados neste capítulo. A referência a seguir traz uma publicação na qual se encontram orientações sobre a aplicação desse jogo. CANAL CECIERJ. *Cálculo algébrico*. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/recurso/15163. Acesso em: 7 jun. 2022.

Atividades

A atividade **1** favorece a discussão sobre a necessidade de recorrer ao uso de letras e expressões algébricas para representar determinadas situações. É importante mostrar aos estudantes que as variáveis não precisam ser sempre x, y ou z, mas que são as mais recorrentes nos problemas matemáticos.

A atividade **2** permite a continuidade do trabalho feito no boxe *Participe* e na atividade **1**. Proponha aos estudantes que representem situações geométricas em linguagem materna para a linguagem algébrica.

Antes que os estudantes façam a atividade **3**, retome a leitura do texto de abertura da Unidade. Pergunte a eles se conhecem alguém que atue na área de programação ou que use a programação em seu trabalho. Ao propor a atividade, discuta com os estudantes as soluções encontradas e veja a possibilidade de criar com eles um fluxograma para ilustrar a lógica que embasa a solução.

Proposta para o professor

O trabalho com as atividades desta seção pode ser realizado em duplas para evidenciar a multiplicidade de soluções, principalmente por tratar de questões que necessitem de problematização, argumentação e raciocínio lógico, permitindo a heurística de resolução de problemas, contendo várias abordagens e vários registros de representação. É possível indicar leituras visando à formação continuada do professor:

DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano*: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de matemática*. São Paulo: Ática, 2007.

Orientações didáticas

Sequências numéricas

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA10** e **EF08MA11** ao explorar a regularidade de sequências numéricas ou figurais que podem ser representadas por fórmulas não recursivas, e de sequências numéricas que podem ser representadas por fórmulas recursivas, e a construção de fluxogramas para obter números ou figuras dessas sequências.

Neste tópico são abordadas as sequências numéricas, que podem servir de inspiração para retomar com os estudantes as noções de conjuntos numéricos (dos números naturais, por exemplo) e suas características. Ao abordar as sequências numéricas, as atividades propostas exigirão que os estudantes utilizem fórmulas recorrentes (recursivas) ou não recorrentes para determinar o valor numérico de uma expressão algébrica.

Sequências numéricas

Um triângulo numérico

Analise esta disposição triangular dos números naturais:

1					
2	3				
4	5	6			
7	8	9	10		
11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	21

Considerando essa disposição, podemos formar algumas sequências numéricas interessantes, como:

- a sequência (I) dos elementos da primeira coluna: $(1, 2, 4, 7, 11, 16, \ldots)$;
- a sequência (II) dos elementos da segunda coluna: $(3, 5, 8, 12, 17, \ldots)$;
- a sequência (III) dos últimos elementos de cada linha: $(1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots)$.

Tente descobrir os dois próximos termos de cada sequência sem utilizar o triângulo numérico apresentado anteriormente, apenas analisando alguma regularidade em cada uma delas.

Conforme já estudamos, costumamos representar algebricamente os elementos (ou termos) de uma sequência por uma letra com um índice relativo à posição do elemento na sequência:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

(leia-se: a um, a dois, a três, etc.) em que a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo, a_3 é o terceiro termo e assim por diante; a_n é o termo da posição n ou n-ésimo ou enésimo termo; a_{n-1} é o antecessor de a_n; e a_{n+1} é o sucessor de a_n.

Na sequência (I), temos, por exemplo, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 7$, $a_5 = 11$, $a_6 = 16$. Perceba a regularidade existente nessa sequência:

+1 +2 +3 +4 +5 ...

$$(1, 2, 4, 7, 11, 16, a_7, a_8, \ldots)$$

Continuando: $16 + 6 = 22$; $22 + 7 = 29$; então, $a_7 = 22$ e $a_8 = 29$.

Para descrever algebricamente essa sequência, note que:

+1 +2 +3 +4 +5 ...

$$(1, 2, 4, 7, 11, 16, \ldots)$$

$a_6 = a_5 + 5$

$a_5 = a_4 + 4$

$a_4 = a_3 + 3$

$a_3 = a_2 + 2$

$a_2 = a_1 + 1$

$a_1 = 1$

Cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo antecessor adicionado ao índice dele. Assim, se quisermos calcular um termo a_n para $n \geqslant 2$, adicionamos o termo antecessor, a_{n-1}, ao índice $(n - 1)$. Escrevemos:

$$a_n = a_{n-1} + (n - 1)$$

Como essa fórmula é válida para $n \geqslant 2$, para começar a sequência, precisamos saber que o primeiro termo é 1, isto é, que $a_1 = 1$. Então, algebricamente, a sequência é dada pela fórmula:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + (n-1), \text{ para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \text{ (logo, para } n \text{ natural, } n \geqslant 2) \end{cases}$$

Por exemplo, para $n = 9$ temos:
$a_9 = a_8 + 8 \Rightarrow a_9 = 29 + 8 \therefore a_9 = 37$.

Símbolo	Leitura
$\Rightarrow$	implica
$\therefore$	portanto

Notando que a_n é o termo antecessor de a_{n+1}, temos que $a_{n+1} = a_n + n$, agora para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ (logo, para n natural, $n \geqslant 1$). Assim, a fórmula para calcular os termos pode ser escrita de outro modo equivalente à fórmula anterior:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n, \text{ para } n \text{ natural, } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Nesse caso, é para $n = 8$ que obtemos $a_9 = a_8 + 8$.

Fórmulas assim, que permitem calcular um termo de acordo com os termos anteriores, são chamadas **fórmulas recorrentes** (ou **recursivas**).

Sequências que apresentam regularidades podem ser definidas por diferentes fórmulas, todas equivalentes.

Exemplos

- Qual é o quarto termo da sequência dada pela fórmula $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 6, \text{ para } n \geqslant 2 \end{cases}$?

Vamos aplicar a fórmula substituindo n sucessivamente por 2, por 3 e por 4.

Para $n = 2$: $a_2 = a_1 + 6 \Rightarrow a_2 = 5 + 6 \therefore a_2 = 11$.

Para $n = 3$: $a_3 = a_2 + 6 \Rightarrow a_3 = 11 + 6 \therefore a_3 = 17$.

Para $n = 4$: $a_4 = a_3 + 6 \Rightarrow a_4 = 17 + 6 \therefore a_4 = 23$. O quarto termo é 23.

Outro modo de chegar a essa conclusão:

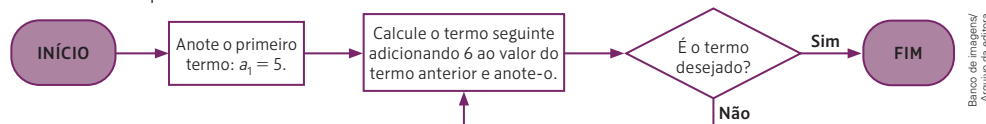
pela fórmula, $a_1 = 5$ e adicionando 6 a um termo (a_{n-1}) obtemos o termo seguinte (a_n);

então, formamos a sequência começando por 5, adicionando 6 obtemos o segundo termo, adicionando mais 6, o terceiro, e assim por diante.

A sequência é $(5, 11, 17, 23, \ldots)$. Então, o quarto termo é 23.

Vamos elaborar um fluxograma em língua natural para calcular um termo dessa sequência seguindo os passos do exemplo anterior:

INÍCIO → Anote o primeiro termo: $a_1 = 5$. → Calcule o termo seguinte adicionando 6 ao valor do termo anterior e anote-o. → É o termo desejado? → Sim → FIM
Não → (volta para "Calcule o termo seguinte adicionando 6 ao valor do termo anterior e anote-o.")

Banco de imagens/Arquivo da editora

- Quais são o vigésimo e o centésimo termo da sequência dada pela fórmula $a_n = 10 \cdot n + 1$?

Nesse caso, para calcular o vigésimo termo, a_{20}, basta substituir n por 20 na fórmula dada. Então:

$a_{20} = 10 \cdot 20 + 1 \Rightarrow a_{20} = 200 + 1 \therefore a_{20} = 201$.

No centésimo termo, a_{100}, temos $n = 100$. Então:

$a_{100} = 10 \cdot 100 + 1 \Rightarrow a_{100} = 1\,000 + 1 \therefore a_{100} = 1\,001$.

Orientações didáticas

Sequências numéricas

Leia e reproduza na lousa os exemplos apresentados no Livro do Estudante. Verifique se compreenderam o raciocínio apresentado.

A elaboração de fluxogramas ajuda no desenvolvimento do raciocínio lógico, favorecendo também o desenvolvimento de habilidades argumentativas.

Proposta para o professor

Segue a sugestão de uma coletânea de experiências com diferentes povos africanos e sua relação com a matemática. Em particular, há diferentes jogos locais que fazem o uso de sequências figurais; se julgar pertinente, adapte e conduza um desses jogos para suas aulas.

GERDES, Paulus. *Etnomatemática*: Reflexões sobre Matemática e Diversidade Cultural. Ribeirão, Braga, Portugal: Edições Húmus, LDA, 2007.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **4**, peça aos estudantes que registrem por escrito as características de cada sequência proposta. Auxiliá-los a perceber os respectivos padrões pode contribuir para resolver atividades futuras.

Antes de propor a atividade **5**, retome com os estudantes os principais elementos e a função de um fluxograma.

Nas atividades **6** a **9**, os estudantes devem elaborar fórmulas recursivas ou não recursivas às sequências propostas. Solicite a eles, inicialmente, que explorem as características de cada sequência, buscando evidenciar sua regularidade. O exercício de escrever a regularidade pode favorecer o processo de elaboração da fórmula.

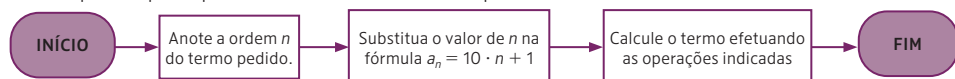
A atividade **10** pode ser proposta em conjunto com a atividade **5**.

Para solucionar o que é proposto nas atividades **11** e **12,** os estudantes precisam, inicialmente, identificar os elementos das sequências. Estimule-os a analisar cada uma antes de executar o que se pede.

O objetivo da atividade **13** é escrever em linguagem materna a regra de formação da sequência do item **b** da atividade **11**. É possível propor essa atividade em conjunto com a atividade **11**.

Um passo a passo para calcular um termo dessa sequência é:

INÍCIO → Anote a ordem n do termo pedido. → Substitua o valor de n na fórmula $a_n = 10 \cdot n + 1$ → Calcule o termo efetuando as operações indicadas → FIM

Banco de imagens/Arquivo da editora

Perceba que, para calcular qualquer termo dessa sequência pela fórmula dada, não precisamos calcular os termos anteriores. Essa é uma fórmula **não recorrente** (ou **não recursiva**).

Atividades

Faça as atividades no caderno.

As atividades **4** a **16** serão feitas em dupla. Cada integrante da dupla deve fazer uma atividade. Após o término de cada atividade, o estudante que a resolveu explica a estratégia utilizada para o colega, que pode copiar a resolução, caso esteja de acordo, ou propor outra estratégia em caso de discordância.

4. Determine uma regularidade para cada sequência e copie-as, escrevendo o próximo termo de cada uma.

I. $(11, 15, 19, 23, 27, \ldots)$ Exemplo de regularidade: Adicionar 4 ao termo anterior; próximo termo: 31.

II. $(3, 6, 12, 24, 48, \ldots)$ Exemplo de regularidade: Multiplicar o termo anterior por 2; próximo termo: 96.

5. Construa o fluxograma em língua natural para calcular um termo em cada sequência da atividade anterior. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

6. No caderno, escreva uma fórmula recursiva para cada sequência da atividade **5**. **I.** $a_1 = 11$ e $a_n = a_{n-1} + 4$, para $n \geq 2$. **II.** $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} \cdot 2$, para $n \geq 2$.

7. Descubra uma regularidade nas sequências II e III citadas no "triângulo numérico" do início deste estudo. No caderno, escreva uma fórmula recursiva para cada uma delas.

II. $(3, 5, 8, 12, 17, \ldots)$ **II.** $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + n$, para $n \geq 2$.

III. $(1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$ **III.** $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + n$, para $n \geq 2$.

8. Dada a sequência $(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots)$:

a) dê os valores dos termos a_9 e a_{10}; $a_9 = 512$ e $a_{10} = 1\,024$.

b) escreva duas fórmulas para calcular os termos;

c) essas fórmulas são recursivas ou não recursivas? Por quê?

b) Exemplos de resposta:
I. $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} \cdot 2$, para $n \geq 2$.
II. $a_n = 2^n$, para $n \geq 1$.
c) Exemplo de resposta: A primeira sim, porque, para calcular cada termo, deve-se conhecer o anterior; a segunda não, porque, para calcular cada termo, não é necessário conhecer o anterior.

9. Na sequência $\left(\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots\right)$:

a) qual é o décimo termo? $\frac{11}{10}$

b) escreva, no caderno, uma fórmula algébrica para calcular os termos. É fórmula recursiva ou não recursiva? $a_n = \frac{n+1}{n}$, para $n \geq 1$; não recursiva.

10. Construa um fluxograma para calcular um termo da sequência da atividade anterior. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

11. Calcule o sexto termo de cada sequência:

a) sabendo que $a_n = \frac{n+1}{n^2}$, para $n \geq 1$; $a_6 = \frac{7}{36}$

b) sabendo que $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n - 2n \end{cases}$, para n natural, $n \geq 1$. $a_6 = -20$

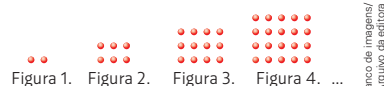
12. $\left(2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \frac{7}{36}, \ldots\right)$. Exemplo de resposta: Para calcular o n-ésimo termo dessa sequência, somamos 1 à sua posição (n) e dividimos o resultado pelo seu quadrado (n^2).

12. No caderno, escreva os seis primeiros termos da sequência da atividade anterior, item **a**, e descreva com suas palavras um padrão de formação dessa sequência.

13. No caderno, descreva com suas palavras um padrão de formação da sequência da atividade **11**, item **b**. Exemplo de resposta: O n-ésimo termo é igual à diferença entre o termo anterior e o dobro de $n - 1$.

14. Considere a sequência figural.

Figura 1. Figura 2. Figura 3. Figura 4. ...

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) No caderno, descreva a construção da próxima figura dessa sequência. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Se cada ponto representa 1 unidade, que sequência numérica é essa? $(2, 6, 12, 20, \ldots)$

c) Descreva com suas palavras um padrão de formação dessa sequência figural e escreva uma fórmula para calcular os termos da sequência numérica associada. Exemplo de resposta: A n-ésima figura é formada por bolinhas dispostas em n linhas e $(n + 1)$ colunas. Fórmula: $a_n = n(n + 1)$, para $n \geq 1$.

d) Verifique o fluxograma a seguir, com instruções para representar a figura **5** de acordo com a figura **4**.

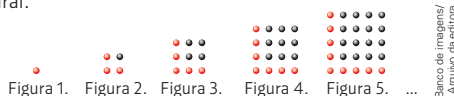
INÍCIO → **Passo 1** Adicione uma linha com 5 bolinhas à figura **4**. → **Passo 2** Adicione uma coluna com 5 bolinhas à figura obtida no passo **1**. → FIM

Banco de imagens/Arquivo da editora

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Construa um fluxograma com instruções para representar a figura $(n + 1)$ de acordo com a figura n.

15. Considere a sequência figural.

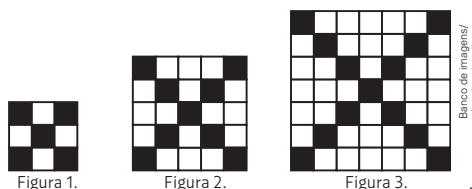
Figura 1. Figura 2. Figura 3. Figura 4. Figura 5. ...

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Quantas bolinhas tem a figura **6** da sequência? Quantas pretas e quantas vermelhas? 36 bolinhas; 25 bolinhas pretas; 11 bolinhas vermelhas.

b) E na figura n? n^2; $(n - 1)^2$; $n^2 - (n - 1)^2$.

c) Construa um fluxograma com instruções para representar a figura $(n + 1)$ de acordo com a figura n. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

16. Conservando a regularidade analisada nas primeiras figuras desta sequência:

Figura 1. Figura 2. Figura 3. ...

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) descreva, no caderno, um passo a passo para a construção da próxima figura; A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) quantos quadradinhos pretos e quantos brancos existem na próxima figura? 17 quadradinhos pretos e 64 quadradinhos brancos.

c) construa um fluxograma com instruções para representar a figura $(n + 1)$ de acordo com a figura n. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Valor numérico

Você deve se lembrar de que a medida de perímetro da região quadrada de lado medindo a é $4a$.

Portanto, quando $a = 5$, temos:

$4a = 4 \cdot 5 = 20$

Nesse caso, dizemos que 20 é o **valor numérico** da expressão $4a$ para $a = 5$.

Então, para $a = 5$, a medida de perímetro é 20.

a

Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos calcular agora alguns valores numéricos da expressão $x^2 - 2x + 2$.

- Para $x = -2$, temos:

$x^2 - 2x + 2 = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 2 = 4 + 4 + 2 = 10$

- Para $x = \frac{3}{5}$, temos:

$x^2 - 2x + 2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) + 2 = \frac{9}{25} - \frac{6}{5} + 2 = \frac{9 - 30 + 50}{25} = \frac{29}{25}$

Valor numérico de uma expressão algébrica é o número que se obtém após substituir as variáveis por números e efetuar as operações indicadas.

Utilize parênteses quando substituir variáveis por números negativos ou por frações.

Orientações didáticas

Atividades

Nas atividades **14** a **16**, é proposto aos estudantes que analisem sequências figurais. Após solucionarem essas atividades, organize-os em pequenos grupos e peça que cada grupo crie uma sequência figural para que outro grupo encontre os elementos ou responda às perguntas elaboradas. Socialize com a turma todas as sequências figurais elaboradas e discuta com eles as soluções. Caso identifique algum erro conceitual, retome com eles as definições ou os conceitos.

Valor numérico

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA06** ao propor a resolução e elaboração de problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações. Mobiliza a **CEMAT03** ao articular Álgebra e Geometria. O contexto das atividades permite desenvolver os TCTs *Trabalho* e *Educação Ambiental*.

Este tópico explora um conteúdo fundamental para o estudo algébrico, pois nele os estudantes terão a oportunidade de dar significado às expressões algébricas ao calcular o valor numérico delas.

Orientações didáticas

Atividades

Observe que as atividades **17** e **18** favorecem uma compreensão inicial de possíveis aplicações do que está sendo estudado em situações do cotidiano. Aproveite a temática da atividade **18** para conversar com os estudantes sobre limites de jornadas de trabalho e modelos de contratação (CLT, prestação de serviços, etc.), valorizando o TCT *Trabalho*.

As atividades **19** e **20** possibilitam a percepção da articulação entre Álgebra e Geometria. Promova uma discussão com os estudantes a fim de possibilitar que eles percebam essa conexão. Comente com eles sobre a decomposição do polígono em 1 quadrado e 1 retângulo na atividade **19**. Questione-os sobre o que eles percebem com isso. Diga que não importa em quantas partes um polígono seja decomposto, a área sempre terá a mesma medida.

Na atividade **21**, é possível fazer uma conexão com a discussão sobre as raízes de uma equação do 2º grau, assunto a ser estudado no ano seguinte.

Para a atividade **22**, sugira que os estudantes construam uma tabela para descrever o valor a ser pago por cada quilômetro rodado. Se possível, discuta com os estudantes os impactos ambientais que o uso de combustíveis gera no meio ambiente, o que colabora para a abordagem do TCT *Educação Ambiental*.

Na atividade **23**, após a elaboração do problema pelos estudantes, promova uma socialização dos enunciados criados.

Para solucionar a atividade **24**, seria importante retomar com os estudantes algumas propriedades de potenciação estudadas anteriormente. É possível solicitar, previamente, que os estudantes pesquisem sobre o tema e, posteriormente, discutir com eles e propor algumas situações para aplicação dos conceitos. Esse movimento caminha na direção da perspectiva da sala de aula invertida, que é uma estratégia do rol de metodologias ativas.

A atividade **25** é semelhante às atividades **19** e **20**, sendo mais uma oportunidade para explorar a articulação entre a Álgebra e a Geometria.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

17. Na figura, estão indicadas as medidas de um campo de futebol, em metros.

Medidas indicadas: $x + 37$; x

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual é a expressão algébrica que representa a medida de perímetro? $x + (x + 37) + x + (x + 37)$ ou $4x + 74$.

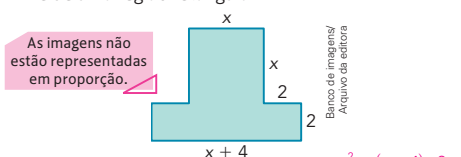
b) Calcule a medida de perímetro para $x = 74$ m. 370 m

18. Retomando a situação da "Fisioterapia esportiva" descrita no início deste capítulo, determine quantas horas Paulo teria de trabalhar para receber R$ 4.128,00. 32 horas.

19. A medida de área da figura poligonal a seguir é a soma das medidas de área de uma região quadrada e de uma região retangular.

As imagens não estão representadas em proporção.

Medidas indicadas: x; x; 2; 2; $x + 4$

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Escreva, no caderno, uma expressão algébrica que represente a medida de área dessa figura. $x^2 + (x + 4) \cdot 2$

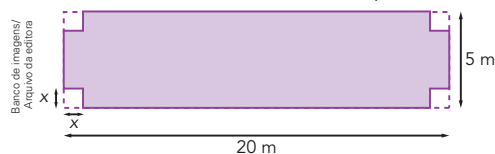
b) Calcule o valor numérico da medida de área para:

- $x = 3$ cm; 23 cm²
- $x = 6$ cm; 56 cm²
- $x = 9$ cm; 107 cm²
- $x = 4{,}5$ cm. 37,25 cm²

c) Escreva outra expressão algébrica que represente a medida de área, decompondo a figura em três regiões quadradas e uma retangular. $x^2 + 2x + 8$

d) Calcule o valor numérico da expressão do item **c** para $x = 3$ cm. 23 cm²

e) Compare os resultados calculados nos itens **b** e **d** para $x = 3$ cm. São iguais.

20. Pedro comprou um terreno retangular para construir uma casa térrea. Para os banheiros, ele reservou os cantos do terreno. Verifique.

Medidas indicadas: 5 m; 20 m; x; x

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Determine a expressão algébrica que representa a medida de área da casa sem os banheiros. $100 - 4x^2$

b) Determine a medida de área da casa sem os banheiros para $x = 1$ m. 96 m²

21. Sendo $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$, calcule o valor de x para $a = 1$, $b = 5$ e $c = 6$. $x = -2$

22. O preço de uma corrida de táxi é determinado pela expressão algébrica $p + q \cdot x$, sendo p o valor da bandeirada, q o preço por quilômetro rodado e x a quantidade de quilômetros rodados. No Rio de Janeiro (RJ), para corridas diurnas em táxis convencionais (ou comuns), a bandeirada é R$ 5,90, e o quilômetro rodado é R$ 2,90. Nessas condições, quanto se paga por uma corrida de 6 km? R$ 23,30

23. Elabore um problema que envolva cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica.

23. Exemplo de resposta: João fará uma horta em um terreno quadrado cujos lados medem $x + 2$.
a) Escreva a expressão que representa a medida de área do terreno dessa horta. Resposta: $x^2 + 4x + 4$.
b) Calcule a medida de área do terreno da horta sabendo que $x = 2$. Resposta: 16.

24. Copie os quadros no caderno e complete as ////////// calculando os valores numéricos das expressões.

Quadro A

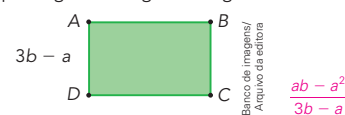
x	y	$(x + y)^2$	$x^2 + y^2$
3	4	49	25
−7	7	0	98
6	6	144	72
0	9	81	81
1,1	0,4	2,25	1,37

Quadro B

x	$(x + 1)^3$	$x^3 + 1$
0	1	1
1	8	2
2	27	9
−1	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{9}{8}$

25. Um terreno de medida de área $ab - a^2$ é representado pela figura retangular a seguir.

Figura: retângulo $ABCD$; medida indicada: $3b - a$

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Determine a expressão algébrica que representa a medida da base dessa figura. $\dfrac{ab - a^2}{3b - a}$

b) Determine o valor numérico da expressão para $a = 0{,}5$ e $b = 1{,}5$. 0,125

26. Calcule o valor das seguintes expressões:

a) $(ab - b + 1) \cdot (ab + a - 1)$ para $a = 4$ e $b = -2$ 25

b) $(a + b + c) \cdot (a - b + c) \cdot (a - b - c)$ para $a = 1$, $b = -1$ e $c = 1$ 3

c) $\dfrac{xy - x}{2y - 1}$ para $x = 1$ e $y = 1{,}5$ 0,25

d) $p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)$ para $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ e $p = \dfrac{a + b + c}{2}$ 36

e) $\dfrac{a + b}{1 - ab}$ para $a = \dfrac{2}{3}$ e $b = \dfrac{4}{5}$ $\dfrac{22}{7}$

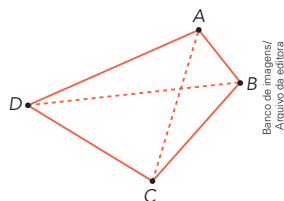
27. Existe o valor numérico de $\dfrac{a + b}{1 - ab}$ para $a = 4$ e $b = 0{,}25$? Por quê? Não. Porque não existe divisão por zero.

28. Para que valor de x não existe valor numérico de $\dfrac{x - 1}{x - 2}$? $x = 2$

Diagonal de um polígono

Vamos analisar agora uma aplicação de expressões algébricas para calcular o número de diagonais de um polígono.

Diagonal de um polígono é um segmento de reta cujas extremidades são vértices não consecutivos (não vizinhos) desse polígono. Na figura, os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diagonais.

A B C D

Banco de imagens/Arquivo da editora

Número de diagonais de um polígono convexo

Para traçar a diagonal de um polígono, partimos de um vértice e o conectamos a outro vértice não consecutivo.

Ao analisarmos um triângulo, verificamos que esse polígono possui 3 vértices.

Ao tentarmos traçar as diagonais desse polígono a partir de qualquer um de seus vértices, percebemos que os outros dois são consecutivos. Logo, conforme a definição de diagonal, conclui-se que o triângulo é um polígono que não possui diagonais.

E F G

Banco de imagens/Arquivo da editora

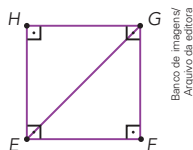
Vamos descrever o procedimento para traçar, e contar, as diagonais de um quadrilátero convexo. Por exemplo, no quadrado $EFGH$.

- A partir do vértice E, os vértices F e H são consecutivos.
- A partir do vértice F, os vértices E e G são consecutivos.
- A partir do vértice G, os vértices F e H são consecutivos.
- A partir do vértice H, os vértices consecutivos são E e G.

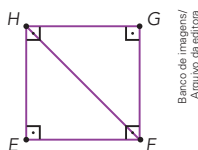
H G E F

Banco de imagens/Arquivo da editora

A partir de cada um desses 4 vértices, é possível traçar uma única diagonal, pois, quando temos 4 vértices e escolhemos um deles como referência, não podemos conectá-lo com ele mesmo nem com os dois vértices consecutivos. Isso significa que sobra apenas 1 vértice não consecutivo para traçar a diagonal. Então, vamos contar:

- a partir do vértice E, é possível traçar uma diagonal;
- a partir do vértice F, mais uma diagonal;

H G E F

Banco de imagens/Arquivo da editora

H G E F

Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **26** a **28** demandam que os estudantes realizem alguns cálculos para determinar o valor numérico de expressões algébricas. Desse modo, é importante promover um espaço de socialização das respostas para perceber as dificuldades que os estudantes ainda podem apresentar e, desse modo, propor ações e outras atividades complementares para sanar tais dificuldades.

Diagonal de um polígono

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA06** ao propor a resolução e elaboração de problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

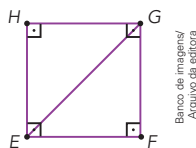
Como possibilidade de ilustração do movimento de generalização a ser mobilizado no estudo de Álgebra, é apresentada a situação de cálculo da diagonal de um polígono.

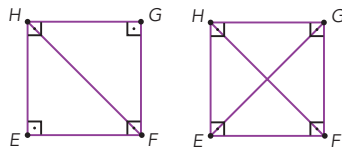
Orientações didáticas

Atividades

A atividade **29** contribui para a compreensão dos estudantes ao relacionar o nome dos polígonos de acordo com a quantidade de lados. Solicite que eles pesquisem na internet as figuras mencionadas no quadro. Se houver necessidade, discuta com eles sobre algumas características, como vértices, ângulos, lados e diagonais.

Para solucionarem a atividade **30**, os estudantes precisarão considerar a generalização que construíram anteriormente. Caso necessário, retome com eles a discussão sobre a generalização da expressão que determina o número de diagonais de um polígono de n lados.

- a partir do vértice G, uma terceira diagonal;

- a partir do vértice H, uma quarta diagonal.

Porém, se traçássemos as diagonais da forma apresentada, percorrendo todos os vértices, concluiríamos precipitadamente que o total de diagonais é igual a 4. No entanto, podemos perceber que não são 4, são apenas 2, pois diagonais são segmentos de reta, e, portanto, a diagonal que vai de E até G é a mesma diagonal que vai de G até E, e a diagonal que vai de F até H é a mesma que vai de H até F.

Isso vale para quaisquer polígonos, regulares ou não.

Generalizando:

Diante de um polígono convexo com n vértices, em que n é maior ou igual a 4, para traçar uma diagonal, cada um dos n vértices não pode ser conectado a ele mesmo nem a nenhum de seus 2 vértices consecutivos. Assim, a partir de cada um desses n vértices, é possível traçar $(n - 3)$ diagonais. É importante lembrar que a diagonal (segmento de reta) que conecta determinado ponto a outro é a mesma que liga esse outro ponto ao determinado.

Quando queremos saber quantas diagonais (D) possui o polígono, calculamos da seguinte maneira:

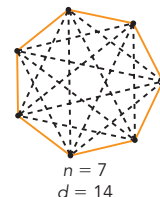
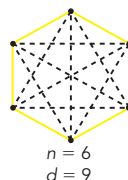
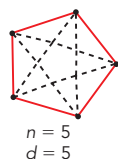
- primeiro multiplicamos o número de vértices n pelo número de diagonais que se projetam a partir dele, $(n - 3)$, ou seja, $n \cdot (n - 3)$;
- isso resultará no número de diagonais dobrado, mas, para compensar esse fato, basta dividirmos o resultado por 2, ou seja, $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$. Daí vem a fórmula algébrica:

$$D = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Exemplos

$n = 5$
$d = 5$

$n = 6$
$d = 9$

$n = 7$
$d = 14$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

29. De acordo com a explicação anterior, copie e complete o quadro a seguir considerando polígonos convexos.

Número de lados	Nome do polígono	Número de diagonais
9	▨ eneágono	$\frac{9 \cdot (9 - 3)}{2} =$ ▨ 27
▨ 10	decágono	$\frac{10 \cdot (10 - 3)}{2} =$ ▨ 35
▨ 11	undecágono	$\frac{11 \cdot (11 - 3)}{2} =$ ▨ 44
12	▨ dodecágono	$\frac{12 \cdot (12 - 3)}{2} =$ ▨ 54

30. Um robô precisa ser programado para desenhar um polígono convexo com 24 lados. Para isso, o programador precisará inserir em seus comandos o número de diagonais que esse polígono possui. Qual número que o programador inserirá? 252

Polinômios

Como já estudamos, **monômio** é uma expressão algébrica que possui multiplicação de números e variáveis, podendo a multiplicação dessas estar indicada como potência de expoente inteiro não negativo. O monômio possui a parte numérica, que é o coeficiente, e a parte literal (letras), composta das variáveis e seus expoentes.

São exemplos de monômios:

$8a$ → coeficiente 8 e parte literal a
$-2xy$ → coeficiente -2 e parte literal xy
$\frac{3}{4}x^2$ → coeficiente $\frac{3}{4}$ e parte literal x^2
a^2b^2c → coeficiente 1 e parte literal a^2b^2c
$-x$ → coeficiente -1 e parte literal x
10 → monômio sem parte literal
0 → monômio nulo

A soma algébrica de monômios é denominada **polinômio**, e cada monômio é chamado **termo**.

São exemplos de polinômios:

$5x$ → polinômio de 1 termo (ou monômio)
$ax + b$ → polinômio de 2 termos (ou binômio)
$3x^2 + 2x - 1$ → polinômio de 3 termos (ou trinômio)
$xy + yz + zx - x - y - z + 1$ → polinômio de 7 termos

mono: 1 tri: 3
bi: 2 poli: vários

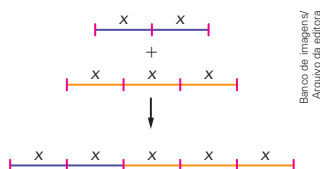
Num polinômio, quando dois ou mais termos têm partes literais idênticas (ou não têm parte literal), ou seja, quando possuem as mesmas variáveis com os mesmos expoentes, eles são chamados **termos semelhantes**.

Quando um termo não tem parte literal, é chamado **termo independente** ou **termo constante**, porque o valor dele é sempre o mesmo para quaisquer valores dados a cada variável do polinômio.

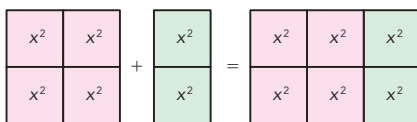
Dois ou mais termos semelhantes podem ser reduzidos a um só termo. Para isso, conservamos a parte literal e efetuamos a operação com seus coeficientes.

Verifique os exemplos a seguir.

- $2x + 3x = (2 + 3) \cdot x = 5x$

Uma **interpretação geométrica:** considere um segmento de reta com medida de comprimento x. Temos 2 vezes essa medida mais 3 vezes essa medida.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

- $4x^2 + 2x^2 = (4 + 2) \cdot x^2 = 6x^2$

Uma interpretação geométrica: considere um quadrado de lado medindo x, portanto, com medida de área x^2. Temos 4 vezes essa medida mais 2 vezes essa medida.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

- $7x^2 + 9x + 6x - 2x^2 + 5 - 4x =$
$= (7 - 2) \cdot x^2 + (9 + 6 - 4) \cdot x + 5 = 5x^2 + 11x + 5$

Marcelo Gagliano/ Arquivo da editora

- $2ab + 3a - 4b + 6 - 7ab - a + b - \frac{1}{2} =$
$= (2-7) \cdot ab + (3-1) \cdot a + (-4+1) \cdot b + \left(6 - \frac{1}{2}\right) =$
$= -5ab + 2a - 3b + \frac{11}{2}$

Orientações didáticas

Polinômios

Neste tópico é explorado o conceito de polinômio e a aplicabilidade dele em diversas situações. Aqui é feito um aprofundamento de todo o estudo de expressões algébricas iniciado neste capítulo.

Proposta para o professor

A referência a seguir traz um vídeo e um guia para, você, professor, sobre um exemplo de situação-problema cotidiana em cuja resolução são aplicados conceitos de Geometria, Grandezas e Medidas e Álgebra, em especial polinômios.

CAPELAS, Edmundo; AIUB, Mariana; MESQUIARI, Luiz A. *Embalagens*. Matemática Multimídia, Unicamp. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1094. Acesso em: 7 jun. 2022.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **31** demanda que os estudantes recorram às definições de monômio, binômio e trinômio para responder.

Na atividade **32**, retome com eles o que significa coeficiente de um monômio.

Antes de propor a atividade **33**, escreva na lousa algumas situações em que seja possível juntar termos semelhantes. Por exemplo: $4x + 8y - x + 2y$. Discuta com eles a noção de termos semelhantes e como podemos operar com eles.

Para solucionar a atividade **34**, os estudantes precisarão recorrer ao conceito de perímetro. Retome-o com eles antes de propor essa atividade.

A atividade **35** apresenta mais uma situação que pede para os estudantes exercitarem o movimento de generalização. Esse movimento é importante na transição do pensamento matemático elementar para o avançado. Explore com os estudantes outras situações como essa a fim de mobilizar tal habilidade.

Para solucionar a atividade **36**, os estudantes precisarão recorrer aos conceitos de área e perímetro. Essa atividade pode ser proposta em conjunto com a atividade **34**, de modo a favorecer uma retomada desses conceitos envolvidos.

Polinômio com uma variável

Se necessário, retome com os estudantes o conceito de variável para que eles consigam identificá-la nos polinômios apresentados na teoria. Se necessário, retome também o significado de coeficiente para que compreendam o conceito de polinômio nulo.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

31. Indique se cada expressão algébrica a seguir é monômio, binômio ou trinômio.

a) $ax + b$ Binômio.
b) $x^3 - 1\,000$ Binômio.
c) $3abc$ Monômio.
d) $ax^2 + bx + c$ Trinômio.
e) x^3 Monômio.

32. Qual é o coeficiente de cada monômio?

a) $6x$ 6
b) $-12m^2$ -12
c) $\frac{3}{5}ab$ $\frac{3}{5}$
d) x^3y^2 1
e) $-ab^2$ -1
f) $\frac{x}{4}$ $\frac{1}{4}$

33. Reduza cada expressão algébrica a um só termo.

a) $4x + 7x$ $11x$
b) $8y - 5y + y$ $4y$
c) $\frac{1}{2}xy - 2xy$ $-\frac{3}{2}xy$
d) $-2x^2 + x^2 + 9x^2$ $8x^2$
e) $4xy + 2yx$ $6xy$
f) $-\frac{3}{5}x + \frac{7}{2}x - \frac{15}{4}x$ $-\frac{17}{20}x$

34. Determine a expressão algébrica que representa a medida de perímetro de cada polígono. Depois, indique o termo independente de cada expressão.

a)

$3x + 3$; $+3$.

b)

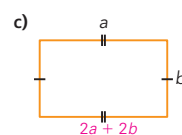
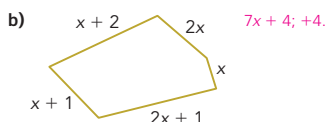
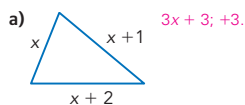
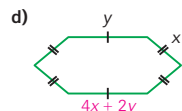
$7x + 4$; $+4$.

c)

Termo independente é igual a zero.

d)

Termo independente é igual a zero.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

35. Ubiratan tem três irmãs: Samantha, Luana e Natasha. Em relação à idade de Ubiratan, Samantha tem 5 anos a mais, Luana tem 2 anos a mais e Natasha tem 6 anos a menos. Considerando que Ubiratan tenha n anos, quantos anos terão os quatro juntos? $4n + 1$

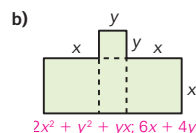
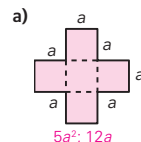
36. Quais são as expressões algébricas que representam as medidas de área destas figuras? E as medidas de perímetro? Considere que lados consecutivos de cada figura foram ângulos retos.

a)

$5a^2$; $12a$

b)

$2x^2 + y^2 + yx$; $6x + 4y$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Polinômio com uma variável

Podemos nomear os polinômios usando letras maiúsculas: A, B, C, D, P, Q, etc. Por exemplo:

$A = 4x + 3$ $\quad B = 6x^2 - x + \frac{1}{2}$ $\quad C = 3x + x^3 - 4 + 2x^2$ $\quad D = 1 - 3x^4 + 4x$

Todos esses são polinômios com uma só variável, a variável x.

Costuma-se apresentar os polinômios com uma variável ordenados segundo os expoentes decrescentes dessa variável. Nos exemplos apresentados, A e B estão ordenados. Vamos ordenar C e D:

$C = x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ $\quad D = -3x^4 + 4x + 1$

Perceba que, no polinômio D do exemplo, não é necessário escrever os termos em x^3 e em x^2, pois esses termos possuem coeficiente nulo, ou seja, $D = -3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 4x + 1$.

Quando todos os coeficientes de um polinômio são iguais a zero, temos um **polinômio nulo**, por exemplo, $P = 0x^2 + 0x + 0 = 0$.

Grau de um polinômio com uma variável

Quando os termos semelhantes estão reduzidos, denominamos **grau de polinômio não nulo** o maior expoente da variável nos termos não nulos.

Para facilitar, depois de estar com os termos semelhantes reduzidos, é conveniente ordenar o polinômio.

$P = 5x^2 - 4x + 2x - 5x^2 - 6$

$P = -2x - 6$

P é um polinômio de grau 1.

Na determinação do grau, só consideramos os termos de coeficientes diferentes de zero.

$Q = 0x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + x - 1$

$Q = 3x^4 - 2x^3 + x - 1$

Q é um polinômio de grau 4.

Para o polinômio nulo, não se define grau.

$R = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0$

R é um polinômio nulo, portanto, **não tem grau**.

$S = 0x^2 + 0x + 5$

$S = 5$

Já o polinômio S tem grau. O grau de S é zero.

Note que $S = 5 \cdot x^0$.

Verifique alguns exemplos a seguir.

Polinômio	Termo com maior expoente de x	Grau
$A = -53x^0$	$-53x^0$	0
$B = 4x + 3$	$4x$	1
$C = 6x^2 - x + \frac{1}{2}$	$6x^2$	2
$D = x^3 + 2x^2 + 3x - 4$	x^3	3
$E = -3x^4 + 4x + 1$	$-3x^4$	4

Atividades

Faça as atividades no caderno.

37. No caderno, reduza os termos semelhantes de cada polinômio, ordene-os e dê o grau de cada polinômio.

a) $4x^2 - 7x + 6x^2 + 2 + 4x - x^2 - 1$ $9x^2 - 3x + 1$; grau 2.

b) $6x + 1 - x^2 - 2 + 3x - 2x + x^2 - 3x$ $4x - 1$; grau 1.

c) $3x + 4 - 5x^2 + 7x - 3x^3 + 6x^2 - 7 + 2x + 8x^3$ $5x^3 + x^2 + 12x - 3$; grau 3.

38. No caderno, dê exemplos de:

a) um trinômio do segundo grau; Exemplo de resposta: $x^2 + 3x + 1$.

b) um binômio do segundo grau; Exemplo de resposta: $y^2 + 7y$.

c) um monômio de coeficiente par e grau 3; Exemplo de resposta: $10w^3$.

d) um binômio de grau 3 com termo constante não nulo. Exemplo de resposta: $9t^3 - 5$.

39. Determine o grau do polinômio $3x^5 - 2x^4 + 5x - 1$ e o termo independente. Grau 5; -1.

Orientações didáticas

Grau de um polinômio com uma variável

Se necessário, construa com os estudantes um quadro para que analisem os termos e o grau de cada polinômio apresentado na teoria.

Atividades

A atividade **37** pode ser proposta com a retomada da atividade **33** e, assim, favorecer uma maior compreensão sobre o que são termos semelhantes.

As atividades **38** e **39** demandam que os estudantes utilizem os conceitos abordados em sala de aula para solucionarem o que é proposto. Assim, é fundamental promover um espaço de socialização das respostas para identificar as dificuldades dos estudantes.

Orientações didáticas

Educação financeira

Na BNCC

O trabalho desta seção mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, ao instigar a investigação e a capacidade de argumentação, e a **CEMAT08**, quando os estudantes interagem entre si para desenvolver um material de divulgação para conscientização da comunidade escolar. Favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Financeira* e *Educação para o Consumo*.

Na Unidade **1**, os estudantes elaboraram uma pesquisa bibliográfica sobre o tem inflação. Esta seção dá continuidade a esse tema.

Informe que a deflação acontece quando os preços de produtos e serviços caem em determinado período. É um movimento contrário ao da inflação, quando os preços sobem. Uma das principais causas da deflação prolongada é a recessão (a economia em crise), quando os consumidores compram menos e forçam as empresas a reduzir preços. Quando os preços caem demais, sobra mais dinheiro para as pessoas, que passam a poupar, acreditando que o dinheiro valerá mais no futuro. Isso alimenta uma nova queda de preços, puxando a economia para baixo.

A atividade **3** pode ser adaptada de acordo com a realidade escolar da comunidade em que a escola está inserida. Incentive os estudantes a utilizar cartazes, elaborar vídeos em *softwares* gratuitos de captação e edição de vídeo e postar conteúdo em redes sociais. Atividades desta natureza oportunizam que os estudantes utilizem as tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa e reflexiva para se comunicar e disseminar informações.

Se considerar pertinente, converse com a direção da escola e proponha uma campanha de conscientização sobre educação financeira. Converse com os professores da área de **Ciências Humanas** e proponha um trabalho interdisciplinar para que os estudantes analisem como o comportamento da economia brasileira variou com o passar do tempo, por exemplo, antes e após o Plano Real.

Educação financeira

Faça as atividades no caderno.

Inflação

1. b) Exemplo de resposta: a inflação gera incertezas na economia, desestimulando o investimento e prejudicando o crescimento econômico.

Inflação: Veja cinco dicas de educação financeira para jovens driblarem a alta dos preços no orçamento

Investigação das despesas e revisão dos hábitos de consumo ajudam na organização das finanças

Os jovens entre 20 e 30 anos experimentam pela primeira vez o cenário de inflação alta, prolongada e dispersa entre os preços de vários produtos e serviços do cotidiano, dos transportes aos alimentos. [...]

Veja a seguir as principais dicas dos economistas para quem está começando a vida adulta em meio à inflação elevada:

1. Investigue despesas e elimine os gargalos

O primeiro passo recomendado por especialistas é identificar para onde vai o dinheiro. Vale usar a tecnologia e registrar gastos num *app* de finanças para acompanhar a evolução dos gastos. "É preciso saber quanto se gasta com cada coisa para identificar os gargalos e eliminá-los rapidamente. Às vezes a pessoa paga muita coisa no cartão de crédito ou no débito automático e não presta atenção na fatura. [...]"

2. Estabeleça suas prioridades

Depois de investigar seu orçamento, reveja seus hábitos de consumo e estabeleça prioridades para a alocação do seu dinheiro. "Coloque em ordem aquilo que é importante: alimentação, moradia, transporte e lazer. Para quem tem filhos, inclua a educação deles logo depois de alimentação e moradia." [...]

3. Pesquise em diferentes estabelecimentos

Pesquisar preços é a chave para o consumidor, principalmente em tempos de remarcações. "Não fica pensando que cinco reais a mais no preço do arroz é pouco porque é o somatório desse pouco que impacta no fim do mês. E se precisar comprar um remédio ou outro item que não estava previsto, nunca compre no primeiro lugar que encontrou." [...]

4. Invista em qualificação

Mesmo com o poder de compra reduzido, economistas reforçam que o investimento em educação é fundamental para o jovem aumentar a sua produtividade, conseguir melhores posições no mercado e aumentar sua renda. "É bom ficar de olho nas oportunidades de emprego que estão despontando no mercado e ver que tipo de curso é preciso fazer para se colocar melhor. A qualificação deve ser uma prioridade mesmo com a renda mais curta, porque é uma forma de o jovem crescer mais rapidamente." [...]

5. Planeje o seu futuro

É preciso deixar de lado a mentalidade imediatista e pensar no longo prazo. Economistas explicam que é importante que os jovens invistam parte do que ganham de olho no futuro, inclusive para complementar a aposentadoria. "Não deixe seu dinheiro parado, mesmo que seja pouco. [...]"

NALIN, Carolina. Inflação: Veja cinco dicas de educação financeira para jovens driblarem a alta dos preços no orçamento. *O Globo* [*s. l.*], 17 abr. 2022. Disponível em: https://oglobo.globo.com/economia/macroeconomia/inflacao-veja-cinco-dicas-de-educacao-financeira-para-jovens-driblarem-alta-dos-precos-no-orcamento-25477776. Acesso em: 18 abr. 2022.

Kondor83/Shutterstock

A alta dos preços dos alimentos contribui para o aumento da inflação.

1. Após a leitura do texto, junte-se a um colega e responda no caderno.
   - **a)** Você se lembra o que pesquisou sobre inflação e como medi-la? Explique com suas palavras.
   - **b)** Quais são as consequências da inflação?
2. Você já ouviu falar sobre deflação? Pesquise o significado do termo e, depois, com os colegas e o professor, respondam: A deflação pode ser um problema para a economia? Por quê? Respostas pessoais.
3. Com base nos dados do texto, elabore, em grupo com mais 4 estudantes, um material de divulgação que possa ser disponibilizado em sua comunidade escolar com as dicas para driblar a alta dos preços; para tanto podem ser elaborados cartazes, *posts* em redes sociais, vídeos em *softwares* gratuitos, entre outros. Respostas pessoais.

1. a) Exemplo de resposta: inflação é o aumento dos preços de bens e serviços. Ela implica diminuição do poder de compra da moeda. A inflação é medida pelos índices de preços (fonte dos dados: BANCO CENTRAL DO BRASIL. O que é inflação? Disponível em: https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/oqueinflacao. Acesso em: 18 abr. 2022).

CAPÍTULO 8

Operações com polinômios

Adição de polinômios

Os prédios da praia

Uma construtora planeja construir dois edifícios: o Edifício C e o Edifício D. Antes de elaborar os projetos, a construtora decidiu fazer uma pesquisa de mercado para estabelecer o número de apartamentos por andar de modo a conseguir vender grande parte deles ainda na construção.

Tendo em vista a localização dos terrenos e obedecendo ao planejamento municipal, um dos prédios deve ter 9 andares e o outro, 6 andares. Assim, o Edifício C terá os apartamentos distribuídos em 9 andares, além de um apartamento no piso térreo. Já o Edifício D terá somente 6 andares, mas com 4 apartamentos a mais por andar do que o Edifício C, além de um apartamento no térreo.

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

Se o Edifício C tiver n apartamentos por andar, quantos apartamentos serão construídos nos dois prédios?

No Edifício C serão $(9 \cdot n)$ apartamentos nos andares, mais o do piso térreo; portanto, $(9n + 1)$ apartamentos. O Edifício D terá 4 apartamentos a mais por andar, ou seja, serão $(n + 4)$ apartamentos por andar; portanto, $6(n + 4)$ apartamentos. Com o do piso térreo serão $6(n + 4) + 1$, que equivalem a $6n + 24 + 1$, ou seja, $(6n + 25)$ apartamentos.

Para determinar o número total de apartamentos que a empresa planeja construir nesses dois edifícios, precisamos adicionar $9n + 1$ a $6n + 25$.

Dados os polinômios $A = 9n + 1$ e $B = 6n + 25$, indicamos a soma $A + B$ como segue:

$$A + B = (9n + 1) + (6n + 25)$$

Para calcular essa soma:

- eliminamos os parênteses, indicando a soma de todos os termos de A com todos os termos de B:
  $A + B = 9n + 1 + 6n + 25$
- reduzimos os termos semelhantes:
  $A + B = (9 + 6) \cdot n + 1 + 25$ $\qquad$ $A + B = 15n + 26$

Assim, considerando os dois edifícios, serão construídos $(15n + 26)$ apartamentos.

Caso seja decidido que o Edifício C tenha 2 apartamentos por andar, temos $n = 2$ e o total de apartamentos nos dois prédios será $15 \times 2 + 26$, logo 56 apartamentos. Caso se opte por $n = 4$, os apartamentos serão menores, mas totalizarão $15 \times 4 + 26$, logo 86 apartamentos.

Um dispositivo prático para efetuar a adição dos polinômios é o seguinte:

A	$\rightarrow$	$9n + 1$
B	$\rightarrow$	$6n + 25$
$A + B$	$\rightarrow$	$15n + 26$

Os termos semelhantes devem ser dispostos um embaixo do outro.

Orientações didáticas

Adição de polinômios

Na BNCC

O contexto apresentado no início deste capítulo favorece a abordagem do TCT *Educação Ambiental*.

Questione os estudantes sobre os impactos ambientais que uma construção civil traz e como evitá-los. Neste momento, é possível falar de construções sustentáveis. Desenvolva estratégias de leitura que fomentem a realização de conjecturas e inferências, por exemplo: “Quais seriam as consequências para a natureza e a urbanização ao construir prédios numa praia?”. Essa reflexão gera uma boa articulação com o componente curricular **Geografia**.

Proposta para o professor

Nessa tese podem ser encontradas situações-problema em diversos contextos, as quais são resolvidas por meio da aplicação de conceitos de polinômios.

MORAIS, Rosilda dos Santos. *A aprendizagem de polinômios através da resolução de problemas por meio de um ensino contextualizado*. 2008. 251 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, 2008. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/2442/1780.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 27 maio 2022.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **1**, retome com os estudantes a noção de termos semelhantes estudada no capítulo anterior. Essa noção é importante para que os estudantes operem com monômios ou polinômios.

Na atividade **2**, explore com os estudantes a leitura e a compreensão do que está sendo solicitado no enunciado. Retome o que significa ser sucessor ou antecessor de um número e como podemos representar isso de maneira geral ($n + 1$ e $n - 1$). Da mesma maneira, explore as noções de dobro, triplo, metade, terça parte, etc., para que consigam fazer a transição da linguagem materna para a linguagem algébrica.

Na atividade **3**, verifique se ainda há estudantes com dificuldade em recordar o conceito de perímetro. Caso haja, retome com eles a definição e exemplifique.

As atividades **4** e **5** exploram a adição de polinômios. É importante realizar a correção coletiva dessas atividades com vista a evidenciar possíveis erros e retomar a explicação, caso seja necessário.

Denominamos **soma de dois ou mais polinômios** o polinômio que se obtém adicionando todos os termos semelhantes dos polinômios dados.

Verifique outro exemplo.

Dados os polinômios $A = x^2 - 2x + 1$, $B = 3x^2 - 1$ e $C = -2x + 3$, vamos calcular $A + B + C$:

$A + B + C = (x^2 - 2x + 1) + (3x^2 - 1) + (-2x + 3)$

$A + B + C = x^2 - 2x + 1 + 3x^2 - 1 - 2x + 3$

$A + B + C = (1 + 3)x^2 + (-2 - 2)x + (1 - 1 + 3)$

$A + B + C = 4x^2 - 4x + 3$

Cálculo da soma empregando o dispositivo prático:

A	→	$x^2 - 2x + 1$
B	→	$3x^2 \quad - 1$
C	→	$- 2x + 3$
$A + B + C$	→	$4x^2 - 4x + 3$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Uma corrida de táxi custa a quantia fixa de p reais mais a quantia de q reais por quilômetro rodado. Mário precisa pagar por duas corridas, uma de 10 km e outra de 12 km. Qual expressão representa a quantia que Mário vai pagar por corrida? E ao todo? $p + 10q$ e $p + 12q$; $2p + 22q$.

2. Verifique as informações **A** e **B** a seguir.

A. A soma do quadrado de um número inteiro n com o sucessor de n. $n^2 + n + 1$

B. O triplo do quadrado do número inteiro n adicionado ao antecessor de n. $3n^2 + n - 1$

No caderno:

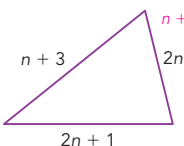
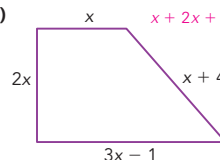
a) Represente as informações **A** e **B** na forma de polinômios na variável n.

b) Calcule a soma dos polinômios obtidos no item anterior e expresse o resultado em palavras. $4n^2 + 2n$. Exemplo de resposta: O quádruplo do quadrado de n mais o dobro de n.

3. Represente a expressão algébrica que determina a medida de perímetro de cada polígono.

a) $n + 3 + 2n + 2n + 1 = 5n + 4$

b) $x + 2x + x + 4 + 3x - 1 = 7x + 3$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4. Determine as somas de polinômios.

a) $(3x^2 + 2x - 1) + (-2x^2 + 4x + 2)$ $x^2 + 6x + 1$

b) $(x^2 - 2x + 1) + (3x^2 + 4x - 2) + (x^2 - 2x + 2)$ $5x^2 + 1$

5. São dados os polinômios:

- $A = 2x^2 - x - 1$
- $B = -3x^2 + 3x$
- $C = 4x^2 - 3$
- $D = x^2 + 7x + 1$
- $E = 2x + 3$

Calcule:

a) $A + B + C$ $3x^2 + 2x - 4$

b) $A + B + D$ $9x$

c) $B + C + E$ $x^2 + 5x$

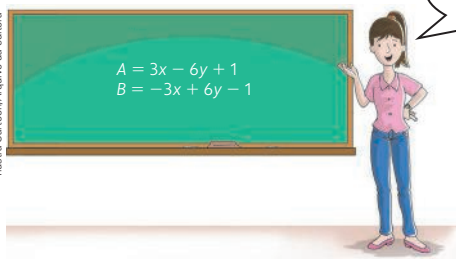
Subtração de polinômios

Oposto de um polinômio

Verifique a cena a seguir.

Quanto é $A + B$?

$A = 3x - 6y + 1$
$B = -3x + 6y - 1$

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

$A + B = 3x - 6y + 1 - 3x + 6y - 1 = 0$

Esta soma $A + B$ é o polinômio nulo. Dizemos, então, que B é o oposto de A e indicamos: $B = -A$.

> O **oposto do polinômio** A é o polinômio que, adicionado a A, resulta no polinômio nulo. Indica-se por $-A$.

Exemplos

- Se $A = x^2 + 3x - 5$, então $-A = -x^2 - 3x + 5$.
- O oposto do polinômio $2a - 6b - 7$ é: $-(2a - 6b - 7) = -2a + 6b + 7$.

Diferença de polinômios

Dados os polinômios A e B na lousa da cena a seguir, precisamos obter um polinômio C que torne verdadeira a igualdade $C + B = A$. Esse polinômio C é denominado **diferença entre A e B**, e indicamos $C = A - B$. Então:

$C = (10x + 9y + 8) - (2x + 3y + 5)$

Para obter C, adicionamos A ao oposto de B:

$C = (10x + 9y + 8) + (-2x - 3y - 5)$

$C = 10x + 9y + 8 - 2x - 3y - 5$

$C = 8x + 6y + 3$

Quanto é $A - B$?

$A = 10x - 9y + 8$
$B = 2x + 3y + 5$

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

> Denominamos **diferença de dois polinômios** o polinômio que se obtém adicionando o primeiro ao oposto do segundo.

Confira que, adicionando C a B, obtemos A.

Também podemos dizer que a diferença de dois polinômios é o polinômio que, adicionado ao segundo, resulta no primeiro.

Como exemplo, vamos calcular $A - B$, dados $A = 3x^2 + 4x - 1$ e $B = x^2 - 7x + 8$:

$A - B = (3x^2 + 4x - 1) + (-x^2 + 7x - 8)$

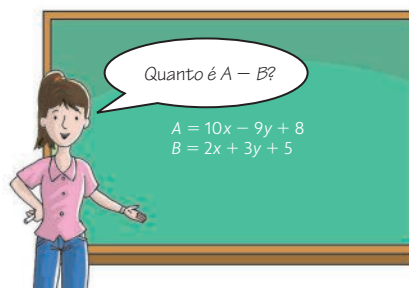
$A - B = 3x^2 + 4x - 1 - x^2 + 7x - 8$

$A - B = (3 - 1)x^2 + (4 + 7)x + (-1 - 8)$

$A - B = 2x^2 + 11x - 9$

Empregando o dispositivo prático, calculamos $A - B$ adicionando A com $-B$:

A	$\rightarrow$	$3x^2 + 4x - 1$
$-B$	$\rightarrow$	$-x^2 + 7x - 8$
$A - B$	$\rightarrow$	$2x^2 + 11x - 9$

> Lembre-se de trocar os sinais dos termos de B.

Orientações didáticas

Subtração de polinômios

Se necessário, retome a ideia de oposto de um número para explorar o conceito de oposto de um polinômio. Esse conceito é fundamental para que os estudantes consigam fazer as operações de subtração com polinômios.

Proposta para o professor

Este artigo apresenta o material manipulável Algeplan como auxiliar no ensino-aprendizagem de polinômios, mais especificamente nas operações de soma e subtração.

CASTRO, Vanessa Esteves de. Ensino-aprendizagem de polinômios no 8º ano do ensino fundamental em uma escola estadual de belo horizonte: uma proposta com a utilização do ALGEPLAN. *SAPIENS* - Revista de divulgação científica, UEMG Carangola, v. 1 n. 2, 2019. Disponível em: https://revista.uemg.br/index.php/sps/article/view/3790. Acesso em: 7 jun. 2022.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **6** a **8** são semelhantes às atividades **4** e **5**, que exploraram a adição de polinômios. Se necessário, reforce o conceito de oposto de um polinômio.

A atividade **9** explora o conceito de oposto de um polinômio de um modo diferente, como tratado nas atividades anteriores. Caso sinta a possibilidade, aprofunde essa discussão propondo um jogo da memória ou proponha alguma atividade em que os estudantes precisam ligar duas colunas, sendo uma o polinômio e a outra, os opostos.

Antes de solicitar que os estudantes resolvam a atividade **10**, explore a leitura e a compreensão da descrição do enunciado com a figura proposta. É importante que eles tenham clareza sobre o que está sendo solicitado na atividade.

A atividade **11** se apresenta como uma proposta de retomada da importância dos parênteses nas expressões algébricas, assunto abordado em anos anteriores em expressões numéricas. Após a resolução da atividade, discuta com os estudantes o papel dos parênteses nas expressões e os cuidados que precisamos ter com os sinais ($+$, $-$, $\cdot$ ou $:$) antes deles.

As atividades **12** e **13** representam um aprofundamento no nível de dificuldade e aplicação dos conceitos estudados nesta seção.

Multiplicação de polinômios

Para apresentar o assunto deste tópico, recorde com os estudantes as propriedades operatórias relacionadas com a potenciação. Recorde também os conceitos de coeficiente e variável.

O uso de representações geométricas associadas ao cálculo de medida de área pode favorecer a compreensão dos estudantes.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

6. Determine o oposto de cada polinômio.

a) $3x + 4y + 5$ $-3x - 4y - 5$

b) $a - 3b - c$ $-a + 3b + c$

c) $5x^2 - 3x + 1$ $-5x^2 + 3x - 1$

7. Calcule no caderno as diferenças.

a) $A - B$, sendo $A = 3x + 2y + 1$ e $B = 2x + y - 1$. $x + y + 2$

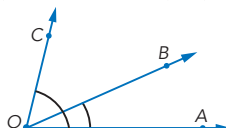
b) $C - D$, sendo $C = -x^2 + 5x - 1$ e $D = 2x^2 + 1$. $-3x^2 + 5x - 2$

8. Subtraia F de E, sendo $E = a + 2b - 3c$ e $F = 3a - b + c$. $-2a + 3b - 4c$

9. Qual é o polinômio que, ao ser adicionado a $P = -3x^2 - 2x + 1$, dá resultado $Q = x^2 - 5x - 10$? $Q - P = 4x^2 - 3x - 11$

10. Quanto mede a abertura do ângulo $B\hat{O}C$? Dados: $med(A\hat{O}B) = 2x + 30°$; $med(A\hat{O}C) = 6x + 20°$. $4x - 10°$

Banco de imagens/Arquivo da editora

C, B, O, A

11. Verifique os exemplos e responda às perguntas no caderno.

a) $(6x^2 - 2x + 5) + (4x^2 - 3x - 1) =$
$= 6x^2 - 2x + 5 + 4x^2 - 3x - 1$

Se eliminarmos os parênteses precedidos do sinal "+" (ou que não sejam precedidos de sinal), alteramos os sinais dos termos que estavam dentro dos parênteses? Não, conservamos todos os sinais.

b) $(6x^2 - 2x + 5) - (4x^2 - 3x - 1) =$
$= 6x^2 - 2x + 5 - 4x^2 + 3x + 1$

Se eliminarmos os parênteses precedidos do sinal "−", alteramos os sinais dos termos que estavam dentro dos parênteses? Sim, trocamos todos os sinais.

12. Calcule as diferenças indicadas eliminando os parênteses e reduzindo os termos semelhantes.

a) $(7x + 5) - (2x + 3)$ $5x + 2$

b) $\left(3x^2 - \frac{1}{3}\right) - \left(6x^2 - \frac{4}{5}\right)$ $-3x^2 + \frac{7}{15}$

c) $(2a - 3ab + 5b) - (-a - ab + 2b)$ $3a - 2ab + 3b$

13. Dados:

$A = x^2 + 3x + 3$

$C = -x^2 + x + 2$

$B = 3x^2 - 2x - 1$

Calcule no caderno:

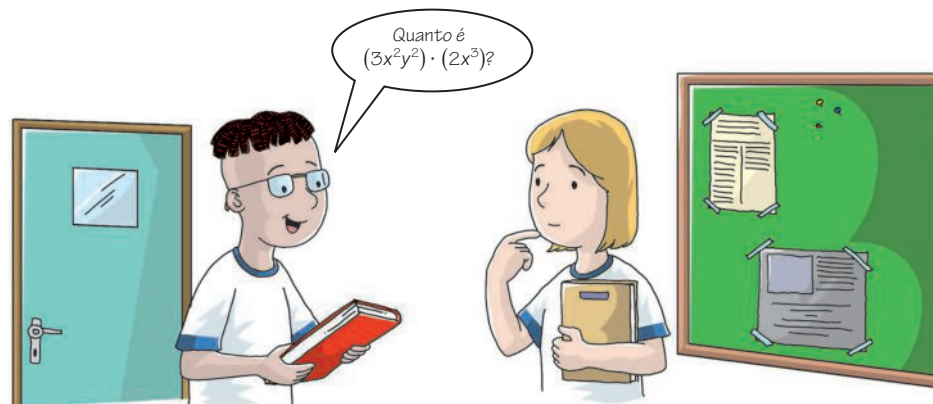
a) $A - B - C$ $-x^2 + 4x + 2$

b) $A - (B - C)$ $-3x^2 + 6x + 6$

Multiplicação de polinômios

Produto de monômios

Verifique a cena a seguir.

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

Nessa multiplicação, vamos usar uma propriedade da potenciação:

$$(3x^2y^2) \cdot (2x^3) = 3 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot y^2 = 6 \cdot x^{2+3} \cdot y^2 = 6x^5y^2$$

Para multiplicar dois monômios, construímos um terceiro monômio, desse modo:

- O coeficiente será o produto dos coeficientes dos monômios dados.
- A parte literal, que é a parte das variáveis (letras) e seus expoentes, será o produto das respectivas partes literais.

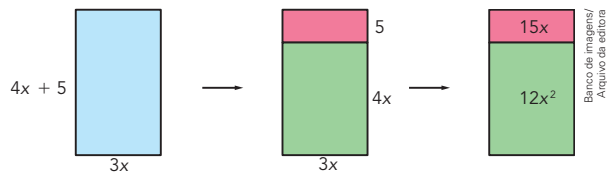
Jogo Jumping Aliens

Jogo *on-line* de multiplicações de dois monômios, no qual extraterrestres competem pulando em plataformas, escolhendo o produto correto. Disponível em: https://www.arcademics.com/games/jumping-aliens. Acesso em: 17 maio 2022.

Produto de monômio por polinômio

Você sabe calcular o produto $(3x) \cdot (4x + 5)$?

Podemos interpretar geometricamente essa multiplicação. Verifique:

Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de área da figura retangular azul é igual à medida de área da parte retangular verde mais a medida de área da parte retangular rosa.

$$(3x) \cdot (4x + 5) = 3x \cdot 4x + 3x \cdot 5 = 12x^2 + 15x$$

Note como multiplicamos um monômio por um polinômio:

- $(3x) \cdot (4x + 5) =$

  $= 3x \cdot 4x + 3x \cdot 5 =$

  $= 12x^2 + 15x$

- $-x^2 \cdot (x^2 - 3x + 4) =$

  $= -x^2 \cdot x^2 - x^2 \cdot (-3x) - x^2 \cdot 4 =$

  $= -x^4 + 3x^3 - 4x^2$

Na **multiplicação de um monômio por um polinômio**, aplicamos a propriedade distributiva: multiplicamos o monômio por todos os termos do polinômio e fazemos as operações entre os termos semelhantes.

Produto de polinômios

Você sabe calcular o produto $(2x + 3) \cdot (3x + 4)$?

Verifique a seguir a interpretação geométrica dessa multiplicação.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$$(2x + 3) \cdot (3x + 4) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 4 + 3 \cdot 3x + 3 \cdot 4 = 6x^2 + 8x + 9x + 12 = 6x^2 + 17x + 12$$

Orientações didáticas

Produto de monômio por polinômio

Reproduza na lousa o exemplo apresentado no Livro do Estudante e verifique se os estudantes compreenderam o passo a passo da resolução. Enfatize a leitura do boxe conceito da página que diz que "Na multiplicação de um monômio por um polinômio, aplicamos a propriedade distributiva...".

Produto de polinômios

Assim como foi feito no tópico "Produto de monômio por polinômio" reproduza o exemplo do Livro do Estudante na lousa e verifique se a turma tem alguma dúvida.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **14** pede aos estudantes que relembrem algumas propriedades de potenciação.

As atividades **15** e **16** são propostas de cálculo. Os estudantes podem resolvê-las em duplas e, posteriormente, socializarem suas respostas. É importante estar atento aos erros mais frequentes e propor outras atividades que possam contribuir com a superação dessas dificuldades.

A atividade **17** relaciona Álgebra com Geometria ao tratar de medida de área. Se necessário, retome esse conceito com os estudantes.

Agora, acompanhe como multiplicamos esses polinômios usando a propriedade distributiva.

$$(2x + 3) \cdot (3x + 4) =$$
$$= 2x \cdot 3x + 2x \cdot 4 + 3 \cdot 3x + 3 \cdot 4 =$$
$$= 6x^2 + 8x + 9x + 12 =$$
$$= 6x^2 + 17x + 12$$

Dispositivo prático para o cálculo do produto de dois polinômios:

$$\begin{array}{r} 3x + 4 \\ \times\ 2x + 3 \\ \hline \end{array}$$

1º passo

$$\begin{array}{r} 3x + 4 \\ \times\ 2x + 3 \\ \hline 6x^2 + 8x \end{array}$$

2º passo

$$\begin{array}{r} 3x + 4 \\ \times\ 2x + 3 \\ \hline 6x^2 + 8x \\ 9x + 12 \end{array}$$

Resultado

$$\begin{array}{rrrr} & 3x & + 4 & \\ \times & 2x & + 3 & \\ \hline & 6x^2 & + 8x & \\ + & & 9x & + 12 \\ \hline & 6x^2 & + 17x & + 12 \end{array}$$

Verifique outro exemplo.

$$(x^2 - 2)(x^2 + 3x - 1) = x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot 3x + x^2 \cdot (-1) - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot 3x - 2 \cdot (-1) =$$
$$= x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x^2 - 6x + 2 = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + 2$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & x^2 & + 3x & - 1 & & \\ \times & x^2 & - 2 & & & \\ \hline & x^4 & + 3x^3 & - x^2 & & \\ + & & & - 2x^2 & - 6x & + 2 \\ \hline & x^4 & + 3x^3 & - 3x^2 & - 6x & + 2 \end{array}$$

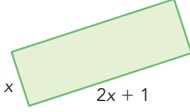
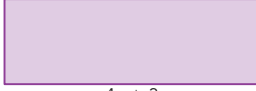
Para **multiplicar dois polinômios**, multiplicamos cada termo de um deles por todos os termos do outro e fazemos as operações entre os termos semelhantes. O polinômio obtido é denominado **produto dos polinômios** dados.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

14. Copie a frase no caderno e substitua cada ▨▨▨ pela palavra que a torna correta.

Na multiplicação de potências de mesma base, ▨▨▨ a base e ▨▨▨ os expoentes. conservamos; adicionamos

15. Calcule no caderno:

a) $6 \cdot (5x)$ $30x$

b) $(3a) \cdot (4a^2)$ $12a^3$

c) $(-2x^2) \cdot (2x)$ $-4x^3$

d) $(x^3y) \cdot (5xy)$ $5x^4y^2$

16. Efetue as multiplicações.

a) $2 \cdot (3x + 4)$ $6x + 8$

b) $3 \cdot (2x^2 - x - 3)$ $6x^2 - 3x - 9$

c) $4x \cdot (2x + 5)$ $8x^2 + 20x$

d) $-2x^2 \cdot (x^2 - x + 4)$ $-2x^4 + 2x^3 - 8x^2$

17. Determine a expressão algébrica que representa a medida de área de cada região retangular.

a)

b)

Banco de imagens/Arquivo da editora

Proposta para o estudante

Se julgar pertinente, proponha este jogo aos estudantes para contribuir com o entendimento das operações com polinômios.

WORDWALL. *Combinação*: polinômios. Disponível em: https://wordwall.net/pt/resource/18750576/polin%C3%B4mios. Acesso em: 27 maio 2022.

18. Calcule no caderno:

a) $(2x + 3) \cdot (4x + 1)$ $8x^2 + 14x + 3$

b) $\left(3x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x^2 + 4)$ $3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 12x - 2$

c) $(2a + 3b) \cdot (5a - b)$ $10a^2 + 13ab - 3b^2$

d) $(2x - 3) \cdot (x^2 - 3x + 5)$ $2x^3 - 9x^2 + 19x - 15$

19. Calcule $A \cdot B$ utilizando o dispositivo prático nos seguintes casos:

a) $A = 3x + 5$ e $B = 2x - 1$ $6x^2 + 7x - 5$

b) $A = 3x - 1$ e $B = x^2 + 4x + 8$ $3x^3 + 11x^2 + 20x - 8$

20. Pense em alguns exemplos antes de responder às perguntas a seguir.

a) Um polinômio tem grau 3 e outro tem grau 5. Qual é o grau da soma dos polinômios? E o grau do produto deles? 5; 8.

b) Dois polinômios têm grau igual a 3. Qual é o grau da soma dos polinômios? E o grau do produto deles? 0 ou 1 ou 2 ou 3 (ou não tem grau); 6.

Multiplicação de três ou mais polinômios

Para multiplicar três ou mais polinômios, devemos multiplicar os dois primeiros, depois multiplicar o resultado pelo polinômio seguinte, e assim por diante. Verifique o exemplo:

$$(x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (2x - 1) = (x^2 + x + 2x + 2) \cdot (2x - 1) =$$
$$= (x^2 + 3x + 2) \cdot (2x - 1) =$$
$$= 2x^3 - x^2 + 6x^2 - 3x + 4x - 2 =$$
$$= 2x^3 + 5x^2 + x - 2$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

21. Calcule no caderno $(x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x^2 + 9)$. $x^4 - 81$

22. Dados $A = 2x + 3$, $B = 3x - 1$ e $C = x^2 + 4$, calcule as expressões a seguir lembrando que as multiplicações devem ser efetuadas antes das adições e das subtrações.

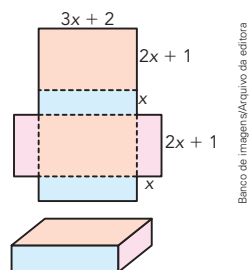
a) $3A + 2B$ $12x + 7$

b) $AB + C$ $7x^2 + 7x + 1$

c) $5C - 2AB$ $-7x^2 - 14x + 26$

23. Mariana desenhou num papel a planificação a seguir representada e, em seguida, a recortou. Depois, dobrou-a nas linhas tracejadas, juntando as faces com fita adesiva, formando uma caixa fechada com formato de bloco retangular.

3x + 2
2x + 1
x
2x + 1
x

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual expressão algébrica representa a medida de área total do papel usado na construção da caixa? $22x^2 + 20x + 4$

b) Qual expressão algébrica representa a medida do volume da caixa? $6x^3 + 7x^2 + 2x$

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **18** e **19** são propostas de cálculo. Como no capítulo foi sugerido o dispositivo geométrico, solicite aos estudantes que desenvolvam a atividade **18** usando essa estratégia de resolução.

A atividade **20** pode ser proposta como um debate com os estudantes. Solicite que eles expliquem suas interpretações e discuta com eles se essas soluções estão ou não corretas.

Multiplicação de três ou mais polinômios

Realize a multiplicação polinômio a polinômio do exemplo apresentado na teoria. Se necessário, relembre a propriedade distributiva da multiplicação.

Atividades

As atividades **21** e **22** podem ser propostas com a retomada das atividades **18** e **19**. Proponha aos estudantes se organizarem em grupos para solucionar as atividades e discutirem as soluções. Ao promover a socialização das respostas, observe se eles ainda apresentam alguma dúvida conceitual e, caso identifique, proponha outras atividades para auxiliá-los a saná-las.

A atividade **23** pode favorecer um diálogo com os estudantes sobre a confecção de caixas e o desperdício de papel. Pode-se refletir com eles sobre possíveis estratégias para minimizar as sobras de papel, bem como discutir a importância da reciclagem para diminuir o impacto ambiental associado ao consumo e descarte de papel.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **24** pode ser complementar às atividades **3** e **17**.

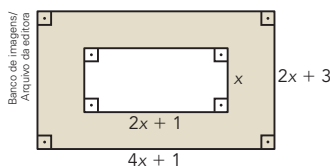
As atividades **25** e **26** exigem que os estudantes calculem algumas expressões, considerando as propriedades estudadas ao longo do capítulo. Se eles apresentarem alguma dificuldade, retome as propriedades e proponha mais alguns exemplos para avaliar se as dúvidas foram sanadas.

Divisão de polinômios

Refaça com os estudantes as simplificações apresentadas na teoria para que compreendam a divisão de monômio por monômio e de polinômio por monômio.

24. Determine a expressão algébrica que representa a medida de área da região colorida. $6x^2 + 13x + 3$

Banco de imagens/Arquivo da editora

x | $2x + 3$ | $2x + 1$ | $4x + 1$

25. Para $x = a$, qual é o valor da expressão $x^3 - (a + b + c) \cdot x^2 + (ab + ac + bc) \cdot x - abc$? 0

26. A potência $(2x + 5)^2$ é calculada assim:

$(2x + 5)^2 = (2x + 5) \cdot (2x + 5) =$

$= 4x^2 + 10x + 10x + 25 =$

$= 4x^2 + 20x + 25$

Agora, calcule estas:

a) $(3x + 1)^2$ $9x^2 + 6x + 1$

b) $(2a - 3b)^2$ $4a^2 - 12ab + 9b^2$

c) $(2a + b - 5)^2$ $4a^2 + 4ab - 20a + b^2 - 10b + 25$

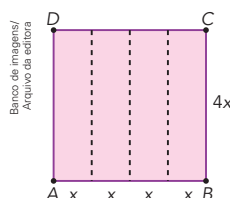
d) $(2x + 1)^3$ $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

Divisão de polinômios

Dividindo uma medida de área

Qual expressão algébrica determina a medida de área da figura quadrada *ABCD*? E a medida de área de cada parte retangular obtida na divisão da figura?

Banco de imagens/Arquivo da editora

D | C | 4x | A x x x x B

Medida de área da figura quadrada *ABCD*: $(4x)^2 = 16x^2$

Medida de área de cada parte retangular: $x \cdot 4x = 4x^2$

Monômio dividido por monômio

Anteriormente, a figura quadrada de medida de área $16x^2$ está dividida em 4 partes iguais. A medida de área de cada parte também pode ser assim calculada:

$$(16x^2) : 4 = \frac{16x^2}{4} = \frac{16}{4}x^2 = 4x^2$$

Verifique outras divisões de monômios:

- $9x^3 : 3x = \frac{9x^3}{3x} = \frac{9}{3} \cdot \frac{x^3}{x} = 3x^{3-1} = 3x^2$
- $12ab : 3a = \frac{12ab}{3a} = \frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}} = 4b$

Para **dividir dois monômios**, dividimos os respectivos coeficientes e partes literais.

Nem sempre a divisão de um monômio por outro resulta em um novo monômio.

Por exemplo, note os resultados destas divisões:

- $5x^2 : 3y = \frac{5x^2}{3y}$
- $2ab : c = \frac{2ab}{c}$
- $1 : x = \frac{1}{x}$
- $x^4 : y^2 = \frac{x^4}{y^2}$

Esses resultados não são monômios nem polinômios. São expressões que recebem o nome de **frações algébricas**.

Divisão de polinômio por monômio

Verifique como dividimos polinômio por monômio:

- $(3x^4 + 2x^3) : x = \frac{3x^4 + 2x^3}{x} = \frac{3x^4}{x} + \frac{2x^3}{x} = 3x^3 + 2x^2$
- $(x^5 - x^4 + 2x^3) : (2x^2) = \frac{x^5 - x^4 + 2x^3}{2x^2} = \frac{x^5}{2x^2} - \frac{x^4}{2x^2} + \frac{2x^3}{2x^2} = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$
- $(4a^2b^2 + ab) : (2ab) = \frac{4a^2b^2 + ab}{2ab} = \frac{4a^2b^2}{2ab} + \frac{ab}{2ab} = 2ab + \frac{1}{2}$

Para **dividir um polinômio por um monômio**, dividimos cada termo do polinômio pelo monômio e fazemos as operações entre os resultados.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

27. Copie a frase no caderno e substitua cada ▨ pela palavra que a torna correta.
Na divisão de potências de mesma base, ▨ a base e ▨ os expoentes. conservamos; subtraímos

28. Por qual monômio devemos multiplicar $4xy^2$ para obter como produto $20x^4y^4$? Indique no caderno. $5x^3y^2$

29. Calcule o quociente de cada item a seguir no caderno.

a) $81x^3 : 27x$ $3x^2$

b) $-63a^2b^3 : 9ab^3$ $-7a$

c) $-49xy^2 : (-7y)$ $7xy$

d) $\frac{32a^2b^5}{8ab^3}$ $4ab^2$

30. Efetue as seguintes divisões:

a) $\frac{4a^4 - 2a^3 + 8a}{2a}$ $2a^3 - a^2 + 4$

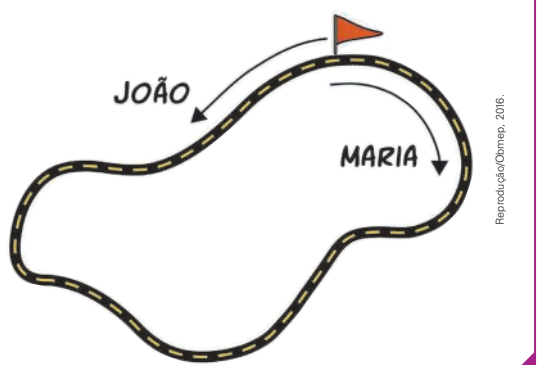
b) $(9x^6 - 12x^5 + 18x^3 - x^2) : (3x^2)$ $3x^4 - 4x^3 + 6x - \frac{1}{3}$

Na olimpíada

Quem corre mais?

(Obmep) João e Maria correm com velocidades constantes e em sentidos contrários a partir de um mesmo ponto da pista de 3 000 metros representada na figura. Depois de correr 1 200 metros, João encontra Maria pela primeira vez. Quando ele terminar a primeira volta, quantos metros ela terá corrido? Alternativa **d**.

a) 2 000
b) 2 500
c) 3 600
d) 4 500
e) 7 500

JOÃO
MARIA

Reprodução/Obmep, 2016.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **27**, assim como a atividade **14**, demanda que os estudantes relembrem algumas propriedades de potenciação. Se necessário, auxilie-os nessa retomada.

As atividades **28** a **30** demandam a aplicação direta dos conhecimentos abordados na teoria, isto é, que os estudantes coloquem em prática a operação de divisão de polinômios. É importante promover um espaço de correção de cada item valorizando a socialização e argumentação dos estudantes. Essa é mais uma oportunidade para identificar se os estudantes apresentam dúvidas ou ainda cometem erros conceituais.

Orientações didáticas

Na História

Na BNCC

O trabalho desta seção favorece o desenvolvimento da **CG01** e da **CEMAT01**, ao valorizar o conhecimento sobre álgebra ao longo da história, da **CG02** e da **CEMAT02**, ao promover a curiosidade intelectual e o desenvolvimento do raciocínio lógico para representar expressões algébricas.

O texto, além de mostrar que as conquistas científicas são fruto do trabalho de muitos agentes, pode gerar uma boa prática de pesquisa envolvendo História da Matemática. Sugira, por exemplo, que os estudantes organizem tópicos na ordem cronológica dos fatos descritos no texto e apontem avanços em relação a cada momento histórico.

As atividades **1** e **2** propostas nesta seção demandam a aplicação dos conteúdos abordados neste capítulo.

Na História

Faça as atividades no caderno.

Da Álgebra retórica à Álgebra literal

Acredita-se que o primeiro matemático a usar uma notação envolvendo letras para indicar a incógnita e suas potências (até a sexta) foi o grego Diofanto de Alexandria, que viveu possivelmente no século II ou III d. C., em *Arithmetica*, sua obra mais importante. O título dessa obra deriva da palavra grega *arithmetike* (de *arithmós*, que significa "número") e seu conteúdo é uma coleção de 189 problemas, na maioria indeterminados, dos quais ele se limitava a achar uma de suas soluções apenas, no universo dos números racionais positivos, em um caso particular.

Um desses problemas, em uma versão simplificada, é: "Dividir um quadrado perfeito em uma soma de dois quadrados". Depois de escolher o número 16 como quadrado perfeito a ser decomposto, com uma sucessão de raciocínios, ele encontrou uma solução:

$$16 = \frac{256}{25} + \frac{144}{25} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$$

Diofanto introduziu símbolos para a incógnita e para suas potências, até a de expoente 6. Mas seu estilo era híbrido: parte simbólico, parte retórico. A notação de Diofanto, apesar de constituir uma revolução na Álgebra, tinha uma deficiência séria: faltavam critérios gerais para exprimir tanto as quantidades conhecidas (constantes) quanto as potências da incógnita em geral.

O primeiro passo para superar essas limitações da Álgebra foi dado somente perto do fim do século XVI, pelo advogado francês François Viète (1540-1603), que foi também um notável matemático. Sua grande aptidão matemática pode ser avaliada por um episódio ocorrido na época em que ele era conselheiro do rei da França, Henrique IV, quando França e Espanha estavam em guerra. Os espanhóis usavam um código secreto, formado por mais de 500 caracteres, constantemente renovados, que julgavam indecifrável. Mas Viète conseguiu quebrá-lo, propiciando vantagem aos franceses na guerra durante cerca de dois anos.

Viète imaginou uma simbologia que se prestasse a um estudo teórico das equações, adotando a seguinte convenção: vogais maiúsculas indicavam quantidades incógnitas e consoantes maiúsculas, quantidades constantes (parâmetros). Por exemplo, a expressão $ax + by + c$ (notação moderna) poderia ter sido escrita assim por Viète: $BA + CE + D$.

A notação atual, consistindo em representar variáveis pelas letras x, y, z, etc. e as constantes por a, b, c, etc., assim como a atual notação exponencial (por exemplo, a^3, x^4, etc.), só foi introduzida na primeira metade do século XVII, pelo também francês e advogado René Descartes (1596-1650).

Fontes dos dados: BAUNGART, John K. *Álgebra*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática através dos tempos*. Tradução de Elza F. Gomide e H. Castro. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

KATZ, V. J.; PARSHALL, K. H. *Timing the Unknown*. Nova Jersey: Princeton University Press, 2014.

DERBYSHIR, J. *Unknown Quantity*. Washington, DC: Joseph Henry Press, 2006.

1. Quase nada se sabe da vida de Diofanto, salvo que viveu em Alexandria, talvez por volta do ano 250. Costuma-se atribuir a ele o seguinte problema, em forma de epigrama.

   A infância de Diofanto durou $\frac{1}{6}$ de sua vida; a adolescência, $\frac{1}{12}$; e o período posterior, até ele se casar, $\frac{1}{7}$. Seu filho nasceu 5 anos depois do casamento e viveu metade do intervalo de tempo de vida do pai. Quatro anos depois da morte do filho, Diofanto também morreu.

   Quantos anos viveu Diofanto? 84 anos.

2. Supondo que Diofanto tenha vivido x anos, escreva as expressões algébricas que representam:
   a) a medida de tempo que ele viveu até se casar;
   b) a medida de tempo que ele viveu depois que se casou. **a)** $\left(\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7}\right)$ anos. **b)** $\left(\frac{x}{2} + 9\right)$ anos.

3. Além da Matemática, em que outros campos do conhecimento Descartes se destacou? Pesquise. Resposta pessoal.

Na Unidade

Faça as atividades no caderno.

1. Na sequência dos inteiros quadrados perfeitos:

$$\underbrace{1}_{1º},\ \underbrace{4}_{2º},\ \underbrace{9}_{3º},\ \underbrace{16}_{4º},\ \underbrace{25}_{5º}\ \ldots,\ \underbrace{?}_{n\text{-ésimo}},\ \ldots$$

a expressão do n-ésimo termo é: Alternativa **b**.

a) $2n$
b) n^2
c) 2^n
d) n^n

2. A sequência numérica em que $a_n = 4n + 5$ para $n \geqslant 1$ também pode ser definida pela fórmula recursiva: Alternativa **c**.

a) $a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} + 4$ para $n > 1$.
b) $a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} + 5$ para $n > 1$.
c) $a_1 = 9$ e $a_n = a_{n-1} + 4$ para $n > 1$.
d) $a_1 = 9$ e $a_n = a_{n-1} + 5$ para $n > 1$.

3. O lucro de um fabricante na venda de x unidades de um produto é, em reais, calculado pela expressão $-10x^2 + 2\,800x$. Qual é o lucro na venda de 100 unidades desse produto? Alternativa **c**.

a) R$ 18.000,00
b) R$ 27.000,00
c) R$ 180.000,00
d) R$ 270.000,00

4. Em qual das alternativas o valor numérico de $\frac{a^4 - 5a^2 + 4}{a^2 - 1}$ é 0? Alternativa **d**.

a) $a = -1$
b) $a = 0$
c) $a = 1$
d) $a = 2$

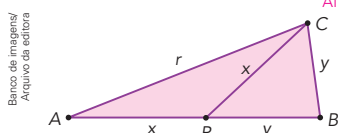
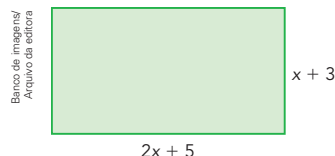
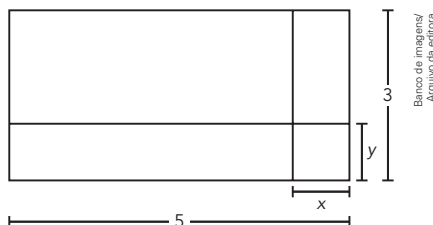
5. A diferença entre a medida de perímetro da figura triangular ABC e da figura triangular PBC é: Alternativa **b**.

a) x
b) r
c) y
d) $x + r$

Figura para os testes **6** e **7**:

6. A medida de perímetro da figura retangular é representada pela expressão: Alternativa **a**.

a) $6x + 16$
b) $6x + 8$
c) $3x + 8$
d) $3x + 16$

7. A medida de área da figura retangular é representada pela expressão: Alternativa **c**.

a) $2x^2 + 15$
b) $2x^2 + 8x + 15$
c) $2x^2 + 11x + 15$
d) $2x^2 + 13x + 15$

8. **(Enem)** Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento ($\boldsymbol{x}$) no comprimento e ($\boldsymbol{y}$) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$.

Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por: Alternativa **e**.

a) $2xy$
b) $15 - 3x$
c) $15 - 5y$
d) $-5y - 3x$
e) $5y + 3x - xy$

9. **(Saresp)** Considere as expressões:

$A = 2a + 4ba$ $\qquad B = 2a$

O resultado da divisão de A por B é: Alternativa **c**.

a) $4ba$
b) $4a + 4ab + b$
c) $1 + 2b$
d) 2

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

A atividade **1** retoma o conceito de sequências e a atividade **2** retoma o conceito de fórmula de recursividade de uma sequência. Erros de resolução nestas atividades podem indicar que os estudantes ainda não se apropriaram dos conceitos relacionados a sequências, sendo necessário retomar o tópico.

A atividade **3** propõe a resolução de um problema e a **4** é a aplicação direta para calcular o valor numérico de uma expressão algébrica. Os estudantes podem estar errando o passo a passo de resolução das expressões. Retome esses passos com a turma.

As atividades **5** a **9** abordam a resolução de problemas envolvendo operações com polinômios. Caso os estudantes sintam dificuldades nas resoluções, proponha a eles que retomem os tópicos relativos às operações com polinômios.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da Unidade mobiliza com maior ênfase a **CG03** e a **CEMAT03** ao propor que os estudantes analisem uma obra de arte, valorizando a arte e reconhecendo a relação da Matemática com outras áreas de conhecimento. Favorece ainda o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia* ao explorar o texto de abertura, que trata da utilização de *pixels*, em diversos contextos, inclusive na cinematografia.

Proponha que os estudantes analisem a imagem de abertura. Pergunte a eles: “Que figuras vocês conseguem identificar nesta imagem?”, “Que sensações vocês sentem ao observá-la?”. Essa é uma boa oportunidade para realização de um trabalho interdisciplinar com o componente curricular **Arte**.

Após essa conversa inicial, solicite aos estudantes que façam a leitura do texto e peça a eles que anotem as palavras que eventualmente desconheçam, pesquisando o significado em um dicionário.

Peça aos estudantes que digam em que contexto já ouviram a palavra *pixel* ser utilizada. Comente que a quantidade de *pixels* tem influência, por exemplo, na qualidade das fotos que tiram.

Ao explorar as questões da página de abertura, permita que os estudantes compartilhem as respostas da primeira e da segunda questão. Na terceira questão, sugerimos a realização de um trabalho interdisciplinar com **Ciências**, para tanto, sugerimos que apresente à turma os dois trechos de textos para motivar as discussões, conforme indicado a seguir.

5 UNIDADE

Quadriláteros

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- adquirir noções gerais sobre quadriláteros e associá-los ao cotidiano;
- reconhecer trapézios, paralelogramos, losangos, retângulos e quadrados como quadriláteros notáveis;
- utilizar a congruência de triângulos para demonstrar propriedades dos quadriláteros notáveis.

CAPÍTULOS

Reprodução do Livro do Estudante em tamanho reduzido.

Proposta para o professor

O artigo a seguir apresenta o conceito de imagem digital e alguns elementos do processamento digital de imagens fundamentais à compreensão de como elas são criadas, armazenadas e manipuladas, além de explorar algumas possibilidades de utilizá-las como recurso didático na Educação Básica.

ALMEIDA, Augusto R. de; MAGRINI, Luciano A. A Matemática das imagens digitais como recurso didático na Escola Básica. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v21a02-a-matematica-das-imagens-digitais.pdf. Acesso em: 8 jun. 2022.

Reprodução/Acervo do artista

Princesa Leia e R2-D2, de Adam Lister, 2014 (aquarela de 17,78 cm × 17,78 cm).

A história e uso dos *pixels* em obras artísticas

No nosso dia a dia, estamos familiarizados com muitas telas, por exemplo, as de celulares, computadores, *tablets* e relógios. Você já parou para pensar em como essas telas reproduzem as imagens? Faz parte do funcionamento da tela um elemento bem pequeno chamado *pixel*.

A palavra *pixel* surgiu na década de 1960 pela junção das palavras de língua inglesa *picture* (que significa imagem) e *element* (que significa elemento). Não há informações oficiais sobre a primeira utilização do *pixel*, entretanto, considera-se que tenha sido criado com o primeiro monitor, no mesmo ano em que surgiu a palavra.

Você já deve ter percebido que a maioria das telas dos aparelhos tecnológicos tem formato retangular. Para se ajustarem a esse formato, as imagens costumam ser programadas em dois parâmetros: altura e largura. Para facilitar a composição dessas imagens, o *pixel* assume formato quadrado.

As medidas dos lados de um *pixel* não são fixas, podem variar de acordo com a tela e com a quantidade de *pixels* presentes em uma polegada. Entretanto, uma medida aproximada adotada em alguns lugares é 0,026 cm, que corresponde a 96 *pixels* por polegada. Imagens formadas por *pixels* fora de telas, como fotografias ou outras imagens impressas, são chamadas de *bitmap*.

O artista contemporâneo Adam Lister, inspirado pelo avanço tecnológico das últimas décadas, criou obras de arte formadas por retratos pixelados, muitos deles com personagens da cultura *pop* e cinematográfica, como se vê na imagem de abertura com personagens do filme *Star Wars* [Guerra nas estrelas]. Suas obras levam o observador a refletir a respeito do armazenamento de informações a que somos expostos diariamente.

Fontes dos dados: Pixel em centímetro. *Converter-unidades.info*, [*s. l.*], c2005-2022. Disponível em: https://www.converter-unidades.info/Converter+Pixel+de+cm.php.
JORDÃO, Fabio. Por que os pixels são quadrados e outras curiosidades. *Tecmundo*, [*s. l.*], 30 set. 2013. Disponível em: https://www.tecmundo.com.br/pixel/45102-por-que-os-pixels-sao-quadrados-e-outras-curiosidades.htm.
CROFFI, Flávio. Pixels surrealistas e aquarela compõem a obra de Adam Lister. *Nerdizmo*, [*s. l.*], 16 maio 2016. Disponível em: https://nerdizmo.uai.com.br/pixels-surrealistas-e-aquarela-compoem-a-arte-de-adam-lister/.
JACOB, Paula. Artista recria obras de arte icônicas em pixels. *Casa Vogue*, [*s. l.*], 20 set. 2017. Disponível em: https://casavogue.globo.com/LazerCultura/Arte/noticia/2017/09/artista-recria-obras-de-arte-iconicas-em-pixels.html.
Acesso em: 10 dez. 2021.

Em um dia, com quantas telas, aproximadamente, você tem contato? Qual é o formato delas? Na sua opinião, quais são as vantagens e as desvantagens do contato constante com as telas?

Resposta pessoal. Exemplo de resposta:
As vantagens do contato com as telas podem ser relacionadas ao acesso rápido e fácil às informações. As desvantagens podem ser relacionadas à saúde física e emocional.

113

Reprodução do Livro do Estudante em tamanho reduzido.

Orientações didáticas

Abertura

Os excertos a seguir alertam sobre o uso excessivo de dispositivos eletrônicos por crianças e adolescentes. Promova uma roda de conversa sobre o assunto incentivando boas práticas no uso desses dispositivos.

Exposição contínua à tela do computador pode afetar crianças e jovens

[...] A exposição às telas de computadores, celulares e *tablets* por crianças e adolescentes pode afetar o sono, a atenção, o aprendizado, o sistema hormonal (com risco de obesidade), a regulação do humor (com risco de depressão e ansiedade), o sistema osteoarticular, a audição, a visão. Também há riscos de exposição a grupos de comportamentos de risco e a contatos desconhecidos, com possibilidade de acesso a comportamentos de autoagressão, tentativas de suicídio e crimes [...]

O alerta é da Sociedade Brasileira de Pediatria (SBP), que lançou nesta semana a publicação *Uso saudável de telas, tecnologias e mídias nas creches, berçários e escola* com o objetivo de compartilhar conhecimento científico com pedagogos, professores e educadores sobre o uso correto da tecnologia para o desenvolvimento neuropsicomotor satisfatório na infância e na adolescência. [...]

SOUZA, Ludmila. Exposição contínua à tela do computador pode afetar crianças e jovens. *Agência Brasil*. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/saude/noticia/2019-06/exposicao-continua-tela-do-computador-pode-afetar-criancas-e-jovens. Acesso em: 8 jun. 2022.

O uso do *smartphone* por adolescentes: a percepção dos pais

A tecnologia e a *internet* estão a cada dia mais presentes na vida das pessoas, principalmente na vida dos adolescentes. [...] "A tecnologia vem se inserindo cada vez com mais facilidade na vida de seus usuários, por motivos que se referem à agilidade, facilidade de se comunicar, e a rapidez para resolver pequenos problemas".

[...]

O desenvolvimento dos recursos tecnológicos em rede facilitou a disseminação das informações, e a forma como as pessoas interagem com elas. [...] o desenvolvimento tecnológico na área das telecomunicações e tecnologia da informação mudou não só como as pessoas se comunicam, mas, também como elas se relacionam com os recursos tecnológicos e com outras pessoas.

A revolução da tecnologia traz facilidades para o acesso à *internet* por meio de aparelhos tais como *tablets*, *smartphones* e computadores. Os computadores mais usados atualmente para fins de acesso à *internet* são os *notebooks*, também conhecidos como computadores portáteis. Os *tablets*, que também são portáteis, estão sendo mais usados do que os computadores pela praticidade e mobilidade na questão de acesso [...].

Quanto aos *smartphones*, o acesso se tornou preferencial para uso por ser de fácil manuseio, muito mais portátil do que computadores e *tablets*, com o custo e benefício relativamente acessível, tornando-o com isso, o preferido pela maioria dos usuários no quesito acesso à *internet*. Em virtude desta facilidade e comodidade de uso, falando-se de aparelho para acesso à *internet*, os usuários, através do *smartphone*, estão cada vez mais conectados; aumentando o tempo de permanência *on-line* [...]

COSTA, Marsiel E.; PIVA, Solange Z. *O uso do smartphone por adolescentes: a percepção dos pais*. Disponível em: https://repositorio.animaeducacao.com.br/bitstream/ANIMA/10440/1/Marisel%20Artigo.pdf. Acesso em: 8 jun. 2022.

Orientações didáticas

Reconhecendo quadriláteros

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao explorar o reconhecimento de quadriláteros. Mobiliza com maior ênfase a **CEMAT03** ao propor que os estudantes relacionem a Matemática com outras áreas do conhecimento e a **CEMAT08** ao promover a interação entre pares na construção de alguns conceitos.

Tendo como apoio a fotografia da sala decorada, chame a atenção dos estudantes para a composição do tapete. Peça aos estudantes que verifiquem se o padrão adotado na estampa é composto de quadriláteros e, se forem, de quais tipos. Peça também que notem o formato do tapete (imagem em perspectiva): quadrado.

Além da exploração dessa fotografia, é possível apresentar outras aos estudantes, como o ladrilhamento com polígonos apresentado na segunda fotografia do tópico. Retome com os estudantes o que são polígonos e a classificação deles em simples e não simples.

Após a retomada dos conceitos básicos acerca de polígonos, outros conceitos, tais como os elementos que definem um quadrilátero, serão compreendidos de maneira mais fácil. Permita que os estudantes utilizem as próprias palavras ao retomar os conceitos. Essa abordagem mobiliza a competência específica **CEMAT08** ao incentivar a busca de aspectos consensuais nas falas dos colegas, além de trabalhar a argumentação matemática.

O contexto do tópico ajuda a perceber aplicações da Matemática na vida cotidiana, inclusive nas profissões, ao longo dos séculos, mobilizando a **CEMAT03**. Em especial, destaca a articulação da Matemática com as artes, favorecendo assim uma abordagem interdisciplinar do tema.

CAPÍTULO 9

Quadriláteros: noções gerais

NA BNCC
EF08MA14

Reconhecendo quadriláteros

As imagens não estão representadas em proporção.

Quadriláteros no dia a dia

Desde a Idade da Pedra, há mais de sete mil anos, que seres humanos decoram com figuras geométricas as paredes de suas habitações e os objetos que os cercam no dia a dia. Paredes de cavernas e utensílios de cerâmica pré-históricos dão testemunho da antiguidade dessa fascinação pelo geometrismo que acompanha o homem até hoje em móveis, tapetes, luminárias, objetos de decoração e no *design* de interiores. [...]

Na Antiguidade, culturas ficaram marcadas por determinado tipo de uso decorativo e artístico da Geometria. A Grécia antiga consagrou, por exemplo, as faixas de padronagem que ficaram conhecidas como "gregas", e os romanos desenvolveram geometrismos marcantes em seus mosaicos. [...]

SAMPAIO, Antonio. Geometria é usada em decoração desde a época das cavernas. *UOL*, [*s. l.*], 15 abr. 2010. Disponível em: https://www.uol.com.br/universa/noticias/redacao/2010/04/15/geometria-e-usada-em-decoracao-desde-a-epoca-das-cavernas-veja-pecas-contemporaneas-para-a-casa.htm. Acesso em: 9 abr. 2022.

Photographee.eu/Shutterstock

Tapete com estampa geométrica.

taewafeel/Shutterstock

Piso de área externa com peças no formato de polígonos.

Sala com tapete e almofadas em padrões geométricos, são exemplos das muitas formas de figuras geométricas que podem ser notadas em nosso dia a dia.

Na imagem do piso colorido, é possível ver peças no formato de polígonos. Você sabe quais delas têm o contorno que lembra quadriláteros? As peças brancas.

Dos polígonos a seguir, quais têm exatamente 4 lados?

1 2 3 4 5 6 7

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Os polígonos 1 a 5 são polígonos simples; os polígonos 6 e 7 são não simples (ou entrelaçados). Os polígonos 2, 4 e 6, que têm exatamente 4 lados, são chamados **quadriláteros**.

Vamos aprofundar nosso conhecimento sobre os quadriláteros.

Proposta para o professor

O *site* indicado a seguir tem um acervo muito interessante sobre ladrilhamentos com polígonos, contendo algumas imagens e a sugestão de outros *sites* e seus *links* para ampliação dos estudos e exploração visual. Há informações interessantes e que podem ser exploradas com os estudantes, tal como uma que se refere à possibilidade de se usar qualquer quadrilátero para fazer um ladrilhamento do plano.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Instituto de Matemática e Estatística. Ladrilhamento. *Matemateca*. Disponível em: https://matemateca.ime.usp.br/acervo/ladrilhamentos.html.

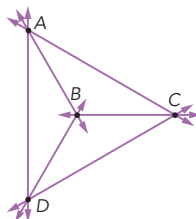
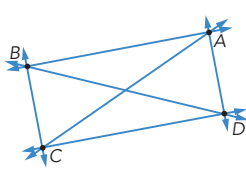
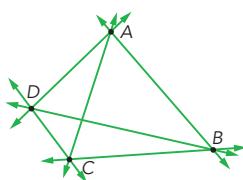
Outra possibilidade de aprofundamento sobre o ladrilhamento com quadriláteros é a exploração utilizando o *software* GeoGebra. Há *hiperlinks* específicos sobre ladrilhamentos já elaborados e propostos no *site*.

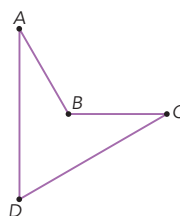
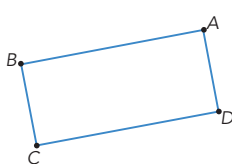
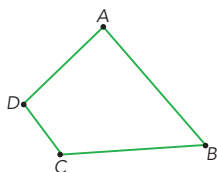
GEOGEBRA. *Ladrilhamentos do plano*. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/uqemfkhp.

GEOGEBRA. *Ladrilhamentos com quadriláteros*. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/uqemfkhp#chapter/523319.

Acesso em: 8 jun. 2022.

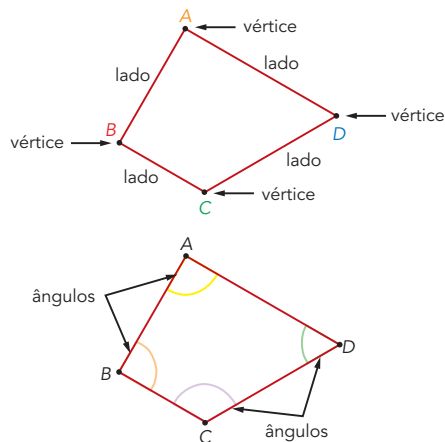
Conceito e elementos

Considere quatro pontos, A, B, C e D, distribuídos de modo que 3 deles não estejam alinhados. Assim, cada uma das 6 retas determinadas por esses pontos contém apenas 2 deles.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Nessas condições, se considerarmos os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, teremos formado uma linha poligonal fechada, com 4 lados, também chamada **quadrilátero** $ABCD$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados quatro pontos, A, B, C e D, entre os quais não há 3 colineares, chama-se **quadrilátero** $ABCD$ a reunião dos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

Agora, vamos concentrar nosso estudo nos polígonos simples. Na figura a seguir, que mostra o quadrilátero simples $ABCD$, podemos destacar os seguintes elementos:

- os pontos A, B, C e D são os **vértices** do quadrilátero;
- os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ são os **lados** do quadrilátero;

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- os ângulos $D\hat{A}B$ (ou $\hat{A}$), $A\hat{B}C$ (ou $\hat{B}$), $B\hat{C}D$ (ou $\hat{C}$) e $C\hat{D}A$ (ou $\hat{D}$) são os **ângulos do quadrilátero** (ou **ângulos internos**);

Orientações didáticas

Conceito e elementos

Para abordar de maneira mais contextualizada e dar maior visibilidade aos componentes de um quadrilátero, sugere-se desenhar na lousa a representação dessa figura e, à medida que a figura for sendo construída/desenhada por você, é possível envolver os estudantes nesse processo instigando seus saberes prévios. Peça que apontem vértices, lados, diagonais, vértices opostos, ângulos internos e ângulos externos do quadrilátero.

O termo "consecutivo" aparece com recorrência na teoria, por exemplo, ao tratar de ângulos consecutivos e lados consecutivos, por isso, talvez seja necessária uma breve explicação para revisar o significado.

Uma opção para a representação desse quadrilátero *ABCD* pode ser o uso do GeoGebra ou, até mesmo, de um *software* simples de edição de figuras.

Orientações didáticas

Perímetro

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao explorar o conceito de perímetro em quadriláteros.

Neste momento o conceito de perímetro é retomado.

Com a construção da representação do quadrilátero *ABCD*, é possível, atribuindo medidas para os lados, contextualizar o cálculo da medida de perímetro para esse quadrilátero, o que pode facilitar a compreensão dos estudantes sobre o conceito. Provavelmente surgirá algum questionamento sobre área, pois ambos são conceitos interligados, por isso, é importante distinguir ambos e mostrar a sua interdependência.

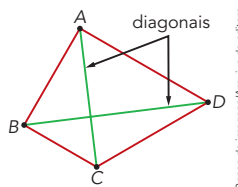
Quadrilátero convexo e quadrilátero côncavo

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao explorar o conceito de quadrilátero convexo e quadrilátero côncavo.

Resgate a definição de polígono convexo e polígono côncavo, trazendo, a partir disso, a representação da diagonal em cada um deles, ressaltando que, por meio da posição dela, é possível também definir se um quadrilátero é côncavo ou convexo. Diga: "Ao unir dois pontos não consecutivos, caso o segmento de reta extravase a figura do polígono, estamos observando um polígono côncavo. Se a diagonal permanecer no interior do polígono, ele é convexo.". Considerando o quadrilátero *RSTU*, é possível propor uma breve investigação aos estudantes, solicitando que copiem esse quadrilátero e tracem as diagonais dele. Ao fazerem isso, deverão observar que nem todas estarão na região interna de *RSTU*, sendo assim, o quadrilátero é côncavo. Esta abordagem favorece o uso de metodologias ativas na sala de aula, além de trabalhar a argumentação matemática.

- os segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as **diagonais** quadrilátero; cada diagonal une dois vértices não consecutivos;
- os ângulos dos pares $\hat{A}$ e $\hat{B}$; $\hat{B}$ e $\hat{C}$; $\hat{C}$ e $\hat{D}$ e $\hat{D}$ e $\hat{A}$ são **ângulos consecutivos** do quadrilátero *ABCD*;
- os ângulos dos pares $\hat{A}$ e $\hat{C}$ e $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são **ângulos opostos** do quadrilátero *ABCD*;
- os segmentos dos pares $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$; $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$; $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ e $\overline{DA}$ e $\overline{AB}$ são **lados consecutivos** do quadrilátero *ABCD*;
- os segmentos dos pares $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são **lados opostos** do quadrilátero *ABCD*.

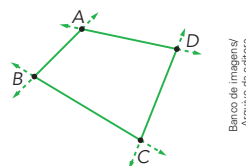
Banco de imagens/Arquivo da editora

Perímetro

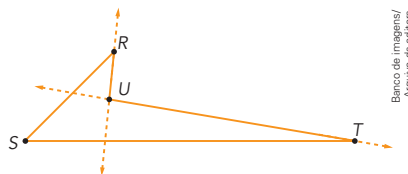
O perímetro do quadrilátero *ABCD* é o comprimento do seu contorno. Para determinar a medida de perímetro dele, basta adicionar as medidas de seus lados.

O perímetro de *ABCD* mede $AB + BC + CD + DA$.

Quadrilátero convexo e quadrilátero côncavo

A seguir, apresentamos alguns quadriláteros.

Banco de imagens/Arquivo da editora

No quadrilátero *ABCD*, as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DA}$ não intersectam nenhum lado do quadrilátero. Por isso, *ABCD* é chamado **quadrilátero convexo**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

No quadrilátero *RSTU*, a reta $\overleftrightarrow{TU}$ intersecta o lado $\overleftrightarrow{RS}$, e a reta $\overleftrightarrow{RU}$ intersecta o lado $\overleftrightarrow{ST}$. Por isso, *RSTU* é chamado **quadrilátero côncavo**.

Um quadrilátero é **convexo** quando a reta definida por dois vértices consecutivos quaisquer não intersecta o lado definido pelos outros dois vértices. Se um quadrilátero não é convexo, ele é **côncavo**.

Participe

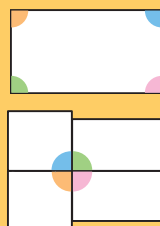
Faça as atividades no caderno.

Siga as orientações:

a) Em uma folha avulsa, desenhe um retângulo. Recorte-o e pinte de uma cor diferente a região interna próxima ao vértice de cada ângulo. Em seguida, recorte o retângulo em 4 pedaços, separando os 4 vértices (pontas).

b) Desloque os 4 pedaços e junte-os de modo a obter 4 ângulos adjacentes e consecutivos.

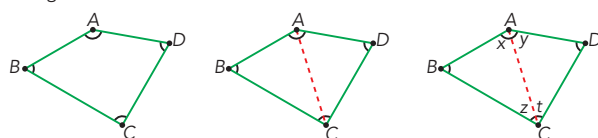
c) Podemos classificar a figura representada no item **a** como um quadrilátero? Justifique sua resposta. Sim, porque é um retângulo, tem 4 lados e 4 vértices.

d) Qual é a soma das medidas dos 4 ângulos do retângulo? 360°

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero

Você já sabe que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Em um quadrilátero, qual é a soma das medidas dos ângulos internos?

Vamos considerar o quadrilátero convexo e simples *ABCD* e traçar a diagonal $\overline{AC}$. Notamos agora, os dois triângulos: *ABC* e *ACD*.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

No triângulo *ABC*, temos:

$x + \text{med}(\hat{B}) + z = 180°$

No triângulo *ACD*, temos:

$y + t + \text{med}(\hat{D}) = 180°$

Adicionando todas as medidas dos ângulos dos dois triângulos, temos:

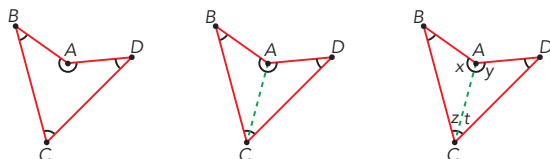
$(x + y) + \text{med}(\hat{B})) + (z + t) + \text{med}(\hat{D}) = 180° + 180°$

Então, como $x + y = \text{med}(\hat{A})$ e $z + t = \text{med}(\hat{C})$, decorre que:

$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{D}) = 180° + 180°$

Ou seja:

$$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{D}) = 360°$$

Se considerarmos o quadrilátero côncavo e simples *ABCD* e traçarmos a diagonal interna $\overline{AC}$, a mesma dedução continuará válida.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{D}) = 360°$$

Podemos, então, concluir que:

A **soma das medidas dos ângulos internos** de um quadrilátero simples é 360°.

Orientações didáticas

Participe

A atividade propõe uma ampliação e exploração do conceito referente à soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero. Ela envolve a construção de um material concreto que facilitará a compreensão e validação de que a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero produzido é 360°.

É importante salientar aos estudantes que tal conclusão poderá ser melhor compreendida com os estudos que serão realizados logo mais, sendo possível generalizá-la para todos os quadriláteros. Realizar experiências e elaborar conclusões contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao abordar a soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero. Mobiliza com mais ênfase a **CEMAT02** ao explorar a argumentação matemática e a **CEMAT08** na proposição de atividades em grupo.

Para o trabalho com a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero, leve os estudantes a perceber que uma das diagonais de um quadrilátero convexo o particiona em 2 triângulos.

Ao propor que os estudantes façam decomposições de figuras planas, a percepção visual e geométrica deles se expandirá, o que poderá auxiliá-los em outras situações, como no cálculo da medida de área de figuras irregulares.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **1** envolve e amplia o conceito de perímetro. Por apresentar uma medida desejada de perímetro, o estudante deve se apoiar na soma das medidas dos lados, igualando-a a 29 cm (medida de perímetro dada), para então encontrar a medida de somente um dos lados.

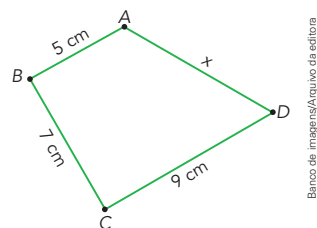
As atividades **2** a **4** podem ser abordadas de maneira coletiva com a turma. Organize as resoluções de cada um na lousa, incentivando que os estudantes participem desse processo. Esta abordagem promove o desenvolvimento da habilidade de argumentação matemática e o respeito aos argumentos dos pares, mobilizando, assim, a **CEMAT02** e a **CEMAT08**.

A atividade **5** explora a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

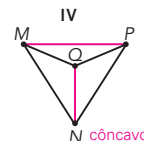
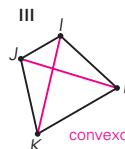
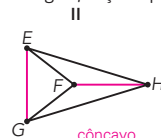
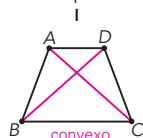
1. Dado o quadrilátero *ABCD*:

A, B, C, D; 5 cm; x; 7 cm; 9 cm

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual deve ser o valor de x para que a medida de perímetro seja 29 cm? $x = 8$ cm

b) Qual é a soma das medidas de dois dos lados opostos? E a dos outros dois? 14 cm; 15 cm (ou vice-versa).

2. Considerando os quadriláteros a seguir, faça o que se pede no caderno.

I: A, D, B, C — convexo
II: E, F, H, G — côncavo
III: I, J, L, K — convexo
IV: M, P, Q, N — côncavo

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Classifique cada quadrilátero em côncavo ou convexo.

b) Copie os quadriláteros e trace as diagonais de cada um deles.

c) O que aconteceu com uma das diagonais dos quadriláteros côncavos? Ficou "fora" do quadrilátero.

3. No caderno, construa um quadrilátero *CIDA* de modo que:

- $CI = 3{,}5$ cm
- $AC = 4$ cm
- $ID = 6$ cm
- $CD = 7$ cm
- $DA = 5$ cm

Para isso, faça o que se pede.

a) Resposta pessoal. O esperado é que os estudantes tracem o quadrilátero *CIDA*, incluindo a diagonal $\overline{CD}$.

a) Faça no caderno um esboço que inclua todos os segmentos de reta informados no enunciado.

b) No esboço que você desenhou no item **a** existe algum triângulo em que as medidas dos 3 lados estejam determinadas? Qual é esse triângulo? Sim; os triângulos *CID* e *CDA*.

c) Finalize a construção a partir do triângulo que você citou no item **b**. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

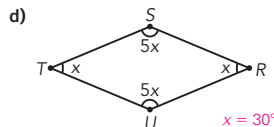
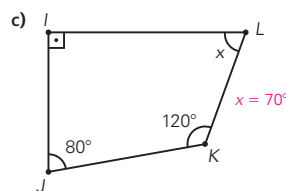
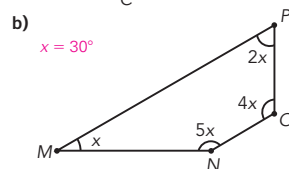
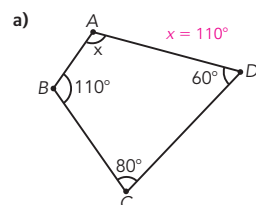
4. Construa no caderno um quadrilátero convexo *LMNP*. Dados: $LM = 5$ cm, $MN = 6$ cm, $NP = 10$ cm, $PL = 3$ cm e $LN = 9$ cm. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

5. Calcule no caderno o valor de x em cada caso.

a) A: x; B: 110°; C: 80°; D: 60° — $x = 110°$

b) M: x; N: $5x$; O: $4x$; P: $2x$ — $x = 30°$

c) I: ângulo reto; L: x; K: 120°; J: 80° — $x = 70°$

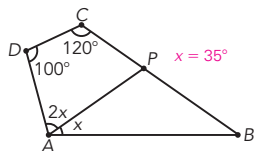
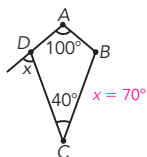
d) S: $5x$; R: x; U: $5x$; T: x — $x = 30°$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

6. Determine o valor de x nestes casos.

a) $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

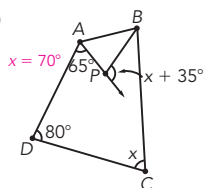
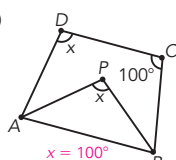
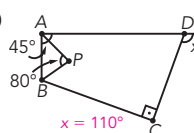
$x = 35°$

b) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ e $\overline{CD} \cong \overline{CB}$

$x = 70°$

7. Sabendo que P está nas bissetrizes de $\hat{A}$ e de $\hat{B}$, determine x.

a) $x = 70°$

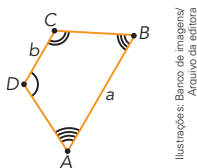
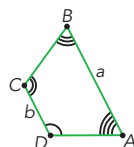
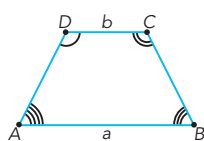
b) $x = 100°$

c) $x = 110°$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Quadriláteros notáveis

Trapézio

Trapézio é um quadrilátero simples que tem 1 par de lados paralelos.

Os quadriláteros a seguir são trapézios.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesses trapézios:

- os lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases;
- $\overline{AB}$ é a **base maior**, de medida a, e $\overline{CD}$ é a **base menor**, de medida b;
- $med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) + med(\hat{D}) = 360°$;
- $med(\hat{A}) + med(\hat{D}) = 180°$ e $med(\hat{B}) + med(\hat{C}) = 180°$;
- o perímetro mede $AB + BC + CD + DA$.

Trapézios especiais

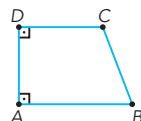
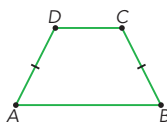
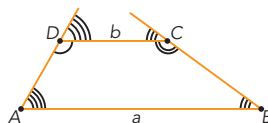
Há tipos especiais de trapézio. Vamos conhecê-los.

Chamaremos **trapézio isósceles** a todo trapézio que tem lados opostos não paralelos congruentes.

$$\overline{AB} /\!/ \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} \cong \overline{BC}$$

Trapézio retângulo é aquele que tem 2 ângulos retos.

$$\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$$

$$med(\hat{A}) = 90° \text{ e } med(\hat{D}) = 90°$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

Para as atividades **6** e **7** é preciso mobilizar saberes prévios dos estudantes referentes à congruência de triângulos (por exemplo, no item **a** da atividade **6**), ângulos externos e bissetriz. Caso perceba que há dificuldades para que os estudantes interpretem sozinhos as figuras, é importante reproduzi-las na lousa.

Especificamente para a atividade **7**, é necessário explicar aos estudantes que a bissetriz de um ângulo é uma semirreta que tem origem no vértice e divide o ângulo ao meio obtendo, então, outros 2 ângulos congruentes. Reforce que P é um ponto que tem como lugar geométrico as semirretas bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

Quadriláteros notáveis

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao explorar o conceito de quadriláteros notáveis. Mobiliza-se com maior ênfase a **CEMAT08** ao propor discussões em grupo.

Inicie o trabalho perguntando aos estudantes se eles sabem quais são os quadriláteros notáveis e suas características. Permita que utilizem as próprias palavras, oportunizando o desenvolvimento da argumentação.

Trapézio

Retome com a turma algumas das características de um trapézio, como:

a) possui 4 lados;

b) tem 2 lados paralelos entre si (conhecidos como base maior e base menor) e 2 lados não paralelos (oblíquos);

c) possui 4 vértices;

d) tem 4 ângulos internos cuja soma das medidas é igual a 360°;

e) possui 2 diagonais.

Ao abordar os trapézios especiais, comente que existem os trapézios escalenos, os quais possuem todos os lados com medidas diferentes entre si. Explore com os estudantes a medida de altura dos trapézios.

Orientações didáticas

Paralelogramo

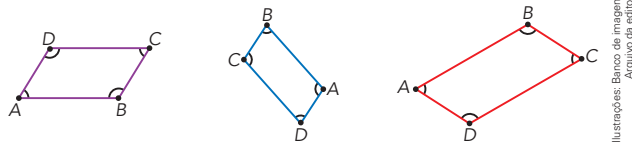
Ao apresentar o paralelogramo, relembre com os estudantes que ele é um quadrilátero que possui lados opostos paralelos e congruentes, ângulos opostos congruentes e ângulos internos adjacentes suplementares, ou seja, cuja soma de suas medidas é igual a 180°. As diagonais dos paralelogramos se cruzam em seus pontos médios.

Proponha uma problematização à turma: desenhe na lousa alguns paralelogramos e destaque a altura, principalmente, daqueles que não estão em suas posições usuais, de modo que os estudantes reconheçam que a altura de um paralelogramo não é representada, necessariamente, por um segmento de reta vertical.

Paralelogramo

Paralelogramo é um quadrilátero que tem 2 pares de lados paralelos.

Os quadriláteros a seguir são paralelogramos.

D C A B; B C A D; B A C D

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Note que:

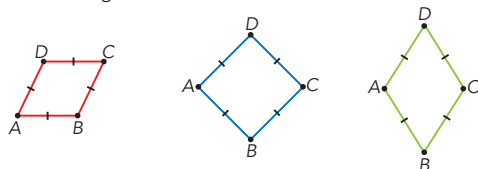
- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
- $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
- $med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) + med(\hat{D}) = 360°$
- O perímetro mede $AB + BC + CD + DA$.

Um paralelogramo é um tipo particular de trapézio em que, além das bases ($\overline{AB}$ e $\overline{CD}$), os outros dois lados ($\overline{AD}$ e $\overline{BC}$) também são paralelos.

Losango

Losango é um quadrilátero cujos 4 lados são congruentes.

Os quadriláteros a seguir são losangos.

D C A B; D A C B; D A C B

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

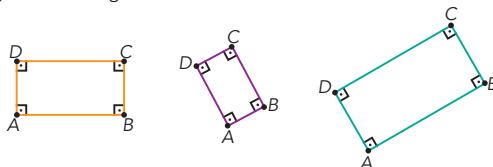
Note que:

- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$
- $med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) + med(\hat{D}) = 360°$
- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$, ou seja, um losango é também um paralelogramo.

Retângulo

Retângulo é um quadrilátero cujos 4 ângulos são retos.

Os quadriláteros a seguir são retângulos.

D C A B; C D B A; C D B A

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

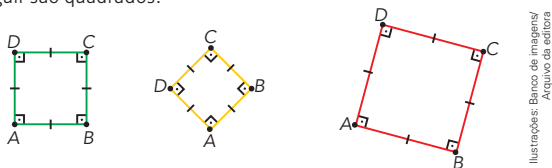
Note que:

- $med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) + med(\hat{D}) = 360°$
- $med(\hat{A}) = med(\hat{B}) = med(\hat{C}) = med(\hat{D}) = 90°$
- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$, ou seja, um retângulo é também um paralelogramo.

Quadrado

Quadrado é um quadrilátero cujos 4 lados são congruentes e cujos 4 ângulos são retos.

Os quadriláteros a seguir são quadrados.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Neles temos:

- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$, ou seja, um quadrado é também um losango.
- $med(\hat{A}) = med(\hat{B}) = med(\hat{C}) = med(\hat{D}) = 90°$, ou seja, um quadrado é também um retângulo.

Atividades

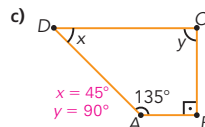
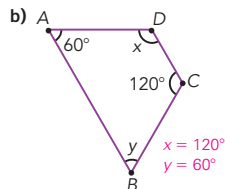
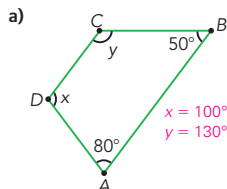
Faça as atividades no caderno.

8. Nestas figuras, $ABCD$ é um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Calcule x e y.

a) 50°; 80° — $x = 100°$, $y = 130°$

b) 60°; 120° — $x = 120°$, $y = 60°$

c) 135° — $x = 45°$, $y = 90°$

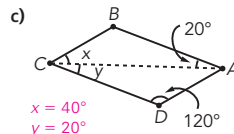
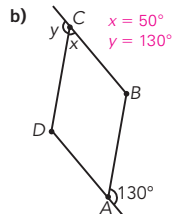
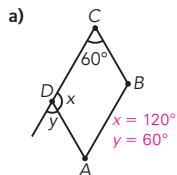
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

9. $TICO$ é um trapézio de bases $\overline{TI}$ e $\overline{CO}$. Sabendo que $med(\hat{O})$ é o dobro de $med(\hat{T})$ e que $med(\hat{C})$ é o triplo de $med(\hat{I})$, calcule as medidas dos ângulos do trapézio. $med(\hat{T}) = 60°$; $med(\hat{I}) = 45°$; $med(\hat{C}) = 135°$; $med(\hat{O}) = 120°$

10. Sabendo que, em cada um dos casos a seguir, $ABCD$ é um paralelogramo, calcule x e y no caderno.

a) 60° — $x = 120°$, $y = 60°$

b) 130° — $x = 50°$, $y = 130°$

c) 20°; 120° — $x = 40°$, $y = 20°$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

11. Determine, no caderno, as medidas dos ângulos de um:

a) paralelogramo em que cada ângulo obtuso mede o triplo de um ângulo agudo; 45°; 135°; 45°; 135°

b) trapézio retângulo em que o ângulo agudo mede $\frac{4}{5}$ do ângulo obtuso. 90°; 90°; 80°; 100°

12. Indique no caderno as medidas dos ângulos de um quadrilátero $ABCD$ convexo sabendo que as medidas de seus ângulos, em graus, são dadas por: $med(\hat{A}) = 2x - 9$, $med(\hat{B}) = 3x + 20$, $med(\hat{C}) = \frac{x}{2} - 7$ e $med(\hat{D}) = \frac{5x - 7}{3}$.

12. $med(\hat{A}) = 91°$, $med(\hat{B}) = 170°$, $med(\hat{C}) = 18°$ e $med(\hat{D}) = 81°$.

13. Responda às questões a seguir no caderno.

a) Um quadrado é também um retângulo? Por quê?

b) Todo losango é um quadrado? Por quê?

a) Sim, pois um quadrado é um quadrilátero com os 4 ângulos retos.
b) Não, pois um losango nem sempre tem os ângulos medindo 90°.

14. Com suas palavras, explique no caderno o que é um trapézio escaleno. Depois, faça uma representação desse tipo de trapézio. Trapézio escaleno é um trapézio com os 4 lados de medidas diferentes. A construção encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **8** a **10** envolvem expressões algébricas. Caso necessário, relembre brevemente o método de resolução. Para a atividade **10**, discuta com os estudantes o que sabem sobre ângulos complementares (aqueles cuja soma de suas unidades é igual a 90°) e ângulos suplementares (aqueles cuja soma de suas medidas é igual a 180°). Converse também sobre os ângulos alternos internos e ângulos alternos externos. Resolva um dos itens dessa atividade na lousa para construir os conceitos com os estudantes. Solicite que façam de outra maneira da apresentada, se houver a possibilidade.

Aproveite a atividade **13** para fazer uma plenária com a turma. Essa atividade pode trazer um bom *feedback* sobre como os estudantes apreenderam os conceitos abordados no capítulo. Ao obter a resposta de cada pergunta, é interessante problematizar o que foi respondido, envolvendo o conteúdo que foi abordado. Esse diálogo gera um ambiente de argumentação e comunicação de diferentes saberes, mobilizando a **CEMAT08**.

Proposta para o professor

O artigo a seguir traz um estudo sobre a gamificação e a aprendizagem de quadriláteros com estudantes de 8º ano. É uma leitura recomendada, pois amplia as possibilidades para o estudo desse conteúdo geométrico, associando-o a propostas do uso de tecnologias digitais.

ANDRETTI, Thaís Cristine. *Gamificação de aulas de matemática por estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná (UFPR), 2019. 128 f. Disponível em: https://www.acervodigital.ufpr.br/handle/1884/60053. Acesso em: 8 jun. 2022.

Orientações didáticas

Quadriláteros

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao trabalhar as propriedades dos quadriláteros a partir das propriedades já conhecidas dos triângulos e ao propor construções geométricas diversas, com uso de ferramentas de desenho, além de aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz na resolução de problemas. Também mobiliza a **CG03**, valorizando manifestações artísticas e relacionando-as com a Matemática.

Este tópico permite um trabalho interdisciplinar com **Arte**. Para tanto, é apresentada uma breve história sobre o pintor Piet Mondrian e duas de suas obras. É interessante instigar os estudantes a observar as composições de Mondrian e levá-los a perceber as formas que foram usadas nelas. Faça perguntas que instiguem a curiosidade dos estudantes, como: "Quais polígonos o pintor usou para compor essas obras?"; "Como o pintor pode ter concebido a organização desses polígonos de maneira que a composição ficasse harmônica aos observadores?".

Proponha, ainda, que os estudantes classifiquem os polígonos usados nas composições e verifiquem as propriedades dessas figuras geométricas.

Aproveite o contexto deste tópico e proponha que os estudantes façam pesquisas relacionadas a ele: "artistas que utilizam Geometria para produção de suas obras"; "movimentos artísticos que utilizavam ou utilizam a geometria como referência"; "obras de arte importantes que utilizam Geometria (e quais elementos da Geometria são utilizados)". Estes são exemplos de temas que podem desencadear uma prática de pesquisa. Além disso, é possível realizar releituras de obras de arte que envolvam Geometria e organizar uma exposição das produções dos estudantes.

CAPÍTULO 10

Propriedades dos quadriláteros notáveis

NA BNCC
EF08MA14

Quadriláteros

Geometria na Arte: Piet Mondrian

Seu nome verdadeiro era Pieter Cornelius Mondrian. Líder dos construtivistas holandeses, desenvolveu, desde 1907 até início dos anos de 1920, um novo conceito artístico radical, que propunha a abstração e a redução dos elementos da realidade a uma linguagem formal estritamente geométrica, limitada à representação de linhas horizontais e verticais e à utilização das cores básicas vermelho, azul e amarelo combinadas com preto, cinzento e branco.

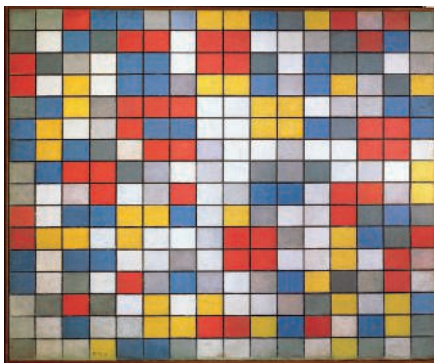
As raízes artísticas de Mondrian fundam-se no expressionismo e no simbolismo, cuja influência recebera. Fundou o grupo *De Stijl* com Theo van Doesburg. A exata concepção de arte defendida pelo grupo, denominada **neoplasticismo**, era para Mondrian a expressão de um modo de vida: a pintura devia mostrar o caminho para um mundo organizado pela harmonia. Realizou suas obras mais significativas depois de se estabelecer em Paris, em 1919, denominando-as "composições": estruturas integradas de linhas em ângulo reto que enquadram variantes de superfícies cromáticas. Em 1940, mudou-se para Nova York [...].

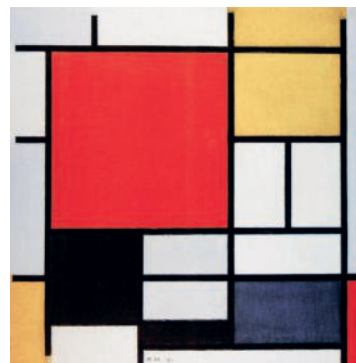
KLICK EDUCAÇÃO. Piet Mondrian. *UOL*, [*s. l.*], [20--?]. Educação. Disponível em: https://educacao.uol.com.br/biografias/klick/0,5387,1707-biografia-9,00.jhtm. Acesso em: 9 abr. 2022.

Granger/Shutterstock

Piet Mondrian em seu estúdio em Nova York, Estados Unidos, em 1944.

Piet Mondrian utilizava formatos de quadriláteros em suas composições artísticas. Veja algumas delas:

Reprodução/Museu Municipal de Haia, Holanda.

Composição em tabuleiro de damas com cores claras, de Piet Mondrian, 1919 (óleo sobre tela de 86 cm × 106 cm).

Reprodução/Museu Municipal de Haia, Holanda.

Composição com vermelho, amarelo, preto e azul, de Piet Mondrian, 1921 (óleo sobre tela de 59,5 cm × 59,5 cm).

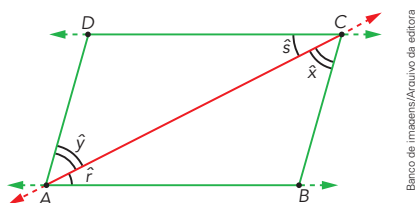
As imagens não estão representadas em proporção.

Neste capítulo, estudaremos as propriedades dos quadriláteros notáveis (paralelogramo, trapézio, losango, retângulo e quadrado).

Paralelogramos

Propriedades dos ângulos e dos lados

No paralelogramo *ABCD* representado nesta figura, traçamos a diagonal $\overline{AC}$ e indicamos os ângulos $\hat{r}$, $\hat{s}$, $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

As retas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, suportes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, e a transversal $\overleftrightarrow{AC}$ determinam os ângulos alternos internos $\hat{r}$ e $\hat{s}$. Então:

$$\hat{r} \cong \hat{s} \quad ①$$

As paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ e a transversal $\overleftrightarrow{AC}$ determinam os ângulos alternos internos $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Então:

$$\hat{x} \cong \hat{y} \quad ②$$

Decompondo o paralelogramo nos triângulos *ABC* e *CDA*, podemos notar que:

$$\left.\begin{array}{l} ① \ \hat{r} \cong \hat{s} \\ \overline{AC} \text{ é comum} \\ ② \ \hat{x} \cong \hat{y} \end{array}\right\} \overset{\text{pelo caso ALA de congruência}}{\Rightarrow} \triangle ABC \cong \triangle CDA \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{D} \ ③ \\ \overline{AC} \cong \overline{CD} \ ④ \\ \overline{BC} \cong \overline{DA} \ ⑤ \end{array}\right.$$

De ① e ②, temos $\hat{r} + \hat{y} \cong \hat{s} + \hat{x}$; logo: $\hat{A} \cong \hat{C}$. ⑥

De ③ e ⑥, podemos concluir que:

Em qualquer paralelogramo, os **ângulos opostos são congruentes**.

De ④ e ⑤, concluímos que:

Em qualquer paralelogramo, os **lados opostos são congruentes**.

Propriedades das diagonais

No paralelogramo *ABCD,* traçamos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, indicamos por *M* o ponto em que elas se intersectam e registramos os ângulos $\hat{r}$, $\hat{s}$, $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

As retas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ e a transversal $\overleftrightarrow{AC}$ determinam os ângulos alternos internos $\hat{r}$ e $\hat{x}$. Então:

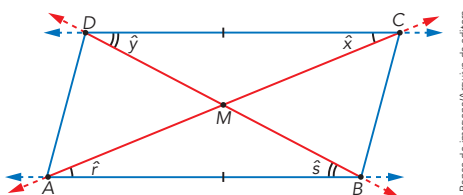
$$\hat{r} \cong \hat{x}$$

As retas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ e a transversal $\overleftrightarrow{BD}$ determinam os ângulos alternos internos $\hat{s}$ e $\hat{y}$. Então:

$$\hat{s} \cong \hat{y}$$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Como os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, temos:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

Orientações didáticas

Paralelogramos

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao explorar as características dos paralelogramos.

Para que os estudantes acompanhem as demonstrações, é muito importante que os conceitos abordados, principalmente no capítulo **9**, sejam compreendidos por eles. Caso observe dúvidas, é preciso retomar cada conceito e reforçar atividades que o abordem.

Orientações didáticas

Paralelogramos

Reforce que o paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos e congruentes, ângulos opostos congruentes e ângulos internos adjacentes suplementares, ou seja, cuja soma de suas medidas é igual a 180°. Retome ainda que as diagonais dos paralelogramos se cruzam em seus pontos médios.

Peça aos estudantes que verifiquem as propriedades do paralelogramo e comparem com as do losango. Espera-se que eles concluam que todo losango é paralelogramo. Essa atividade contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo.

Logo:

$$\left.\begin{array}{r}\hat{r} \cong \hat{x}\\ \overline{AB} \cong \overline{CD}\\ \hat{s} \cong \hat{y}\end{array}\right\} \overset{\text{pelo caso ALA de congruência}}{\Longrightarrow} \triangle ABM \cong \triangle CDM \Rightarrow \begin{cases}\overline{AM} \cong \overline{CM}\\ \overline{BM} \cong \overline{DM}\end{cases}$$

Sendo $\overline{AM} \cong \overline{CM}$, M é o ponto médio do segmento de reta $\overline{AC}$.
Como $\overline{BM} \cong \overline{DM}$, M é o ponto médio do segmento de reta $\overline{BD}$.
Então, podemos concluir que:

Em qualquer paralelogramo, as **diagonais intersectam-se nos seus pontos médios**.

As propriedades vistas são válidas para os retângulos, os losangos e os quadrados, pois esses polígonos são casos particulares de paralelogramos.

Propriedades recíprocas

Das três propriedades estudadas, são válidas as recíprocas:

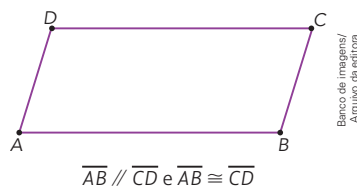
- todo quadrilátero cujos ângulos opostos são congruentes dois a dois é um paralelogramo;
- todo quadrilátero cujos lados opostos são congruentes dois a dois é um paralelogramo;
- todo quadrilátero cujas diagonais se intersectam nos seus pontos médios é um paralelogramo.

Lados opostos paralelos e congruentes

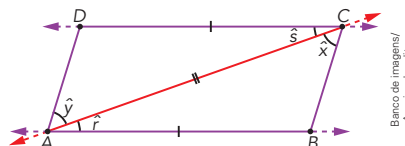
Vamos considerar um quadrilátero $ABCD$ com os lados opostos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ paralelos e congruentes:

D C A B

Banco de imagens/Arquivo da editora

$\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Tracemos, agora, a diagonal $\overline{AC}$ e notemos os ângulos $\hat{r}$ e $\hat{s}$ indicados na figura.

D C A B ŝ x̂ ŷ r̂

Banco de imagens/Arquivo da editora

As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas, e $\overleftrightarrow{AC}$ é transversal a elas. Logo, $\hat{r} \cong \hat{s}$.
Para os triângulos ABC e CDA, temos:

$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB} \cong \overline{CD}\\ \hat{r} \cong \hat{s}\\ \overline{AC} \text{ é comum}\end{array}\right\} \overset{\text{pelo caso LAL de congruência}}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle CDA$$

Como $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, temos $\hat{x} \cong \hat{y}$. Logo: $\overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$.
Como $\overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ e $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$, $ABCD$ é um paralelogramo.
Assim, podemos concluir que:

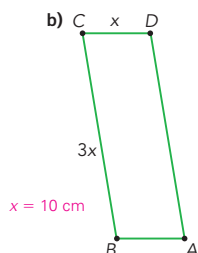
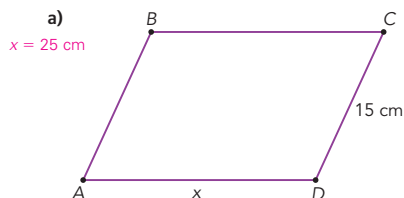
Todo quadrilátero que tem **2 lados opostos paralelos e congruentes** é um paralelogramo.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Construa no caderno um paralelogramo $ABCD$ em que $AB = 3$ cm, $AD = 5$ cm e $med(B\hat{A}D) = 60°$.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. Um ângulo de um paralelogramo mede 135°. Determine a medida de seus outros ângulos.
45°; 135° e 45°.

3. Em cada item, $ABCD$ é um paralelogramo de 80 cm de medida de perímetro. Determine x.

a) $x = 25$ cm

B, C, 15 cm, A, x, D

b) C, x, D, 3x, B, A

$x = 10$ cm

As imagens não estão representadas em proporção.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4. Calcule as medidas dos lados do paralelogramo em cada caso.

a) O perímetro mede 48 cm, e a medida de um lado é o dobro da medida do outro. 8 cm, 16 cm, 8 cm e 16 cm.

b) O perímetro mede 32 cm, e a medida de um lado é o triplo da medida do outro. 4 cm, 12 cm, 4 cm e 12 cm.

c) O perímetro mede 56 cm, e a medida de um lado é $\frac{1}{3}$ da medida do outro.
21 cm, 7 cm, 21 cm e 7 cm.

d) O perímetro mede 24 cm, e a diferença entre as medidas de dois lados consecutivos é 2 cm.
5 cm, 7 cm, 5 cm e 7 cm.

e) O perímetro mede 42 cm, e as medidas dos lados são dadas, em centímetros, por números inteiros e consecutivos. 10 cm, 11 cm, 10 cm e 11 cm.

5. Em um paralelogramo $ABCD$, as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ encontram-se no ponto M. Calcule as medidas das diagonais sabendo que o lado $\overline{AB}$ mede 7 cm e os lados do triângulo ABM medem 5 cm, 4 cm e 7 cm.
8 cm e 10 cm.

6. Calcule as medidas dos ângulos determinados pelas bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo. 90°

7. Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo, a bissetriz de $\hat{A}$ intersecta $\overline{BC}$ em P, $AB = 7$ cm e $PC = 3$ cm. Determine a medida de perímetro desse paralelogramo.
34 cm

B, P, C, A, D

Banco de imagens/Arquivo da editora

Retângulos

Todo retângulo é um paralelogramo. Por isso, em qualquer retângulo:

- os ângulos opostos são congruentes;
- os lados opostos são congruentes;
- as diagonais intersectam-se em seus pontos médios.

Stefano Ember/Shutterstock

Fachadas de casas na cidade de Alcântara (MA). As janelas e as portas lembram retângulos. Foto de 2019.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **1** é uma oportunidade de realizar construções no GeoGebra. Incentive os estudantes a compartilhar em duplas os conceitos apreendidos sobre as propriedades do paralelogramo, congruência de triângulos, ângulos alternos internos e ângulos alternos externos.

Como sugestão para a resolução das atividades **2** a **7**, retome os casos de congruência de triângulos LAL, LAA_o, LLL e ALA, ângulos alternos internos e externos.

A atividade **4** permite retomar conceitos de álgebra nas relações geométricas.

Retângulos

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao explorar as características dos retângulos.

A explicação sobre as propriedades dos retângulos contribui para o desenvolvimento do pensamento lógico. Aproveite e promova uma discussão sobre o fato de que todo retângulo é um paralelogramo e também é um trapézio, mas que nem todo trapézio ou paralelogramo é um retângulo.

Orientações didáticas

Atividades

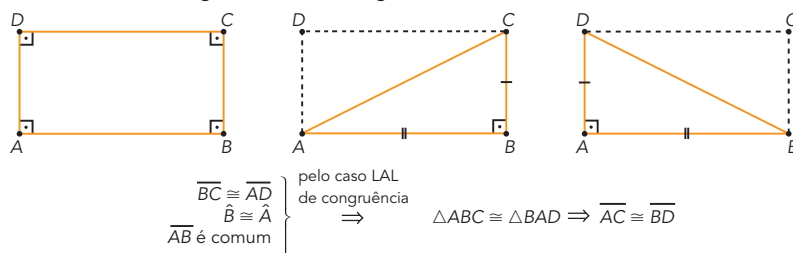
As atividades **8** e **9** podem ser resolvidas na lousa ou com o apoio do GeoGebra.

Na atividade **10**, em específico no item **a**, é indicado retomar as propriedades do retângulo. Para tanto, pode-se desenhar na lousa um retângulo e à medida que o desenho for sendo realizado, questionar o que acontece com os ângulos quando se traça uma diagonal, para que os estudantes possam, por meio de dedução, encontrar o valor de x.

A atividade **11** propõe uma formalização matemática e introduz os estudantes nas práticas de demonstrações, apoiadas em hipóteses e conceitos. Para esta atividade é preciso que os estudantes tenham compreendido o conceito de hipotenusa já explorado. Esse tipo de atividade contribui para o desenvolvimento do pensamento lógico.

Diagonais congruentes

Vamos considerar um retângulo *ABCD* e os triângulos *ABC* e *BAD*:

$\overline{BC} \cong \overline{AD}$, $\hat{B} \cong \hat{A}$, $\overline{AB}$ é comum $\}$ pelo caso LAL de congruência $\Rightarrow$ $\triangle ABC \cong \triangle BAD \Rightarrow \overline{AC} \cong \overline{BD}$

Assim, podemos concluir que:

Em qualquer retângulo, as **diagonais são congruentes**.

Vale também a recíproca:

Todo paralelogramo que tem diagonais congruentes é um retângulo.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

8. Construa no caderno um retângulo em que os lados meçam 3 cm e 4 cm. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

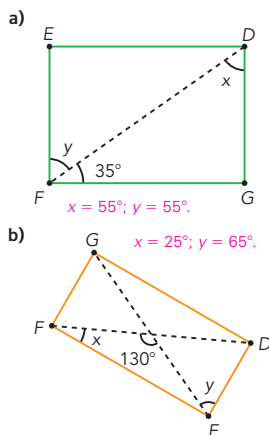
9. Construa no caderno um retângulo *ABCD* em que o lado $\overline{AB}$ meça 5 cm e as diagonais meçam 7 cm. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

10. Sendo *DEFG* um retângulo, calcule x e y.

a)

$x = 55°$; $y = 55°$.

b)

$x = 25°$; $y = 65°$.

11. Prove que "a medida da mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade da medida da hipotenusa".

Dica: Desenhe um triângulo retângulo e, pelos vértices dos ângulos agudos, trace retas paralelas aos catetos, construindo um retângulo.

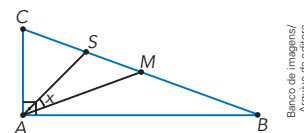
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

12. Em um triângulo *ABC*, retângulo em $\hat{A}$, a mediana $\overline{AM}$ mede 10 cm.

a) Quanto mede a hipotenusa? 20 cm

b) Classifique os triângulos *MAB* e *MAC* quanto aos lados. Os dois são isósceles.

Sugestão: Use a demonstração da atividade anterior.

13. No triângulo *ABC*, retângulo em $\hat{A}$, o ângulo $\hat{B}$ mede 20°. Calcule a medida x do ângulo formado pela bissetriz $\overline{AS}$ e pela mediana $\overline{AM}$. Você pode usar a demonstração da atividade **11**. $x = 25°$

14. Um triângulo retângulo *ABC* tem $\hat{B}$ com medida 60°. Determine a medida do ângulo que a mediana $\overline{AM}$, relativa à hipotenusa, forma com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Você pode usar a demonstração da atividade **11**. 60° e 30°.

Losangos

Todo losango é um paralelogramo. Por isso, em qualquer losango:

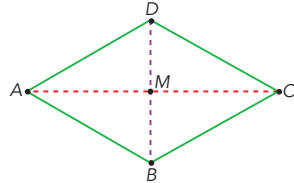
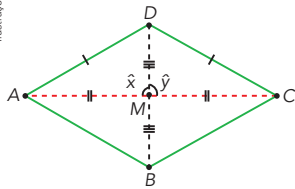
- os ângulos opostos são congruentes;
- os lados opostos são congruentes;
- as diagonais intersectam-se em seus pontos médios.

Zeralein99/Shutterstock

As barras de madeira da cerca formam espaços que lembram losangos.

Diagonais perpendiculares

Considere o losango $ABCD$. Indicamos por M o ponto de encontro das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Sabemos que $\overline{AM} \cong \overline{CM}$ e $\overline{BM} \cong \overline{DM}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Acompanhe a representação dos triângulos ADM e CDM e dos ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ na figura.

$$\left.\begin{array}{r}\overline{AD} \cong \overline{CD}\\ \overline{AM} \cong \overline{CM}\\ \overline{DM} \text{ é comum}\end{array}\right\} \text{pelo caso LLL de congruência} \Rightarrow \triangle ADM \cong \triangle CDM \Rightarrow \hat{x} \cong \hat{y}$$

Como $\hat{x} \cong \hat{y}$ e $x + y = 180°$, concluímos que $x = y = 90°$. Logo, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Em qualquer losango, as **diagonais são perpendiculares**.

Vale também a recíproca:

Todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

15. Construa no caderno um losango $ABCD$ em que uma diagonal meça 6 cm e um lado meça 5 cm. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

16. Construa no caderno um losango cujas diagonais meçam 8 cm e 5 cm. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

17. Determine, em cada item, os valores de x e y no losango $ABCD$.

a) $x = 150°$; $y = 15°$.

b) $x = 32°$; $y = 116°$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

18. Usando o caso LAL de congruência de triângulos, prove que as diagonais de um losango dividem seus ângulos em dois ângulos congruentes. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

19. Calcule as medidas dos ângulos de um losango sabendo que uma diagonal forma com um dos lados um ângulo que mede 52°. 104°; 76°; 104°; 76°.

20. Um losango tem um ângulo medindo 120°, e a diagonal menor divide o losango em dois triângulos congruentes. Quanto medem os ângulos desses triângulos? 60°

21. Determine as medidas dos ângulos de um losango sabendo que uma diagonal e dois lados consecutivos formam um triângulo equilátero. 60°; 120°; 60°; 120°.

Orientações didáticas

Losangos

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao explorar as características dos losangos.

Desenhe o losango na lousa ou com o apoio do GeoGebra e explore com os estudantes os lados congruentes, os ângulos internos opostos que também são congruentes, os ângulos adjacentes suplementares e as diagonais que se cruzam em seus pontos médios.

Pergunte aos estudantes como poderia ser calculada a medida de área do losango e comente que a medida de perímetro do losango é o quádruplo da medida do lado.

Depois de conversar sobre as algumas características do losango, pergunte: "Todo quadrado é um losango?"; "Todo quadrado é um retângulo?"; "Todo retângulo é um quadrado?". Permita que os estudantes respondam livremente, usando as próprias palavras. Peça a eles que justifiquem suas respostas, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade de argumentar.

Atividades

As atividades **15** e **16** podem ser resolvidas na lousa ou com apoio do GeoGebra.

Para as atividades **17** e **19** a **21**, pode-se buscar na segunda propriedade do losango que as diagonais de um losango estão contidas nas respectivas bissetrizes dos ângulos internos.

A atividade **18** envolve o rigor matemático e introduz o estudante nas práticas de demonstrações, apoiadas em hipóteses e conceitos. Para esta atividade, é preciso resgatar os saberes prévios dos estudantes acerca da congruência de triângulos.

Orientações didáticas

Quadrados

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao explorar as características dos quadrados.

Destaque que é possível identificar o quadrado como um retângulo, que por consequência é um paralelogramo. Essa conclusão contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo.

Atividades

Para as atividades **22** a **24**, retome com os estudantes os conceitos de área, perímetro e diagonal do quadrado. Relembre que o quadrado possui 4 lados congruentes, que seus ângulos internos medem 90° e que suas diagonais se interceptam em seus pontos médios, além de serem perpendiculares entre si.

A atividade **24** promove boas práticas de argumentação em sala de aula, utilizando conhecimentos do campo da Geometria, sendo assim, a discussão precisa ser sistematizada de modo que o raciocínio empregado possa ser compartilhado de modo consistente. Para isso, por exemplo, cada item pode ser explicado para toda turma por um estudante diferente e durante a explicação outros colegas podem contribuir e completar a argumentação.

Quadrados

Todo quadrado é um paralelogramo, um retângulo e também um losango. Por isso, para um quadrado qualquer, valem todas as propriedades dos paralelogramos, dos retângulos e dos losangos.

Em particular, vale para os quadrados a propriedade:

> Em qualquer quadrado, as **diagonais intersectam-se em seus pontos médios e são congruentes e perpendiculares.**

As casas do tabuleiro de xadrez têm formato quadrado.

Iakovleva Olga/Shutterstock

- $\overline{AM} \cong \overline{CM} \cong \overline{BM} \cong \overline{DM}$
- $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
- $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

É válida a recíproca:

Banco de imagens/Arquivo da editora

> Todo quadrilátero cujas diagonais se intersectam em seus pontos médios e são congruentes e perpendiculares é um quadrado.

Um quadrilátero cujas diagonais se intersectam em seus pontos médios é um paralelogramo. Então, podemos enunciar:

> Todo paralelogramo que tem diagonais congruentes e perpendiculares é um quadrado.

Atividades

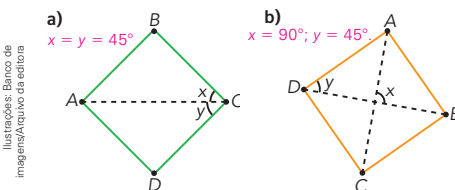
Faça as atividades no caderno.

22. Construa no caderno um quadrado cujas diagonais meçam 4 cm. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

23. Nos itens a seguir, sendo *ABCD* um quadrado, calcule *x* e *y*.

a) $x = y = 45°$

b) $x = 90°$; $y = 45°$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

24. Leia as afirmativas e discuta com os colegas de turma: Quais delas estão certas e quais estão erradas?

a) Toda propriedade do paralelogramo vale para o quadrado. Certa, pois um quadrado é também um paralelogramo.

b) Toda propriedade do quadrado vale para o paralelogramo. Errada, pois existem paralelogramos que não possuem os 4 ângulos iguais.

c) Toda propriedade do losango vale para o retângulo. Errada, pois existem retângulos cujas diagonais não são perpendiculares.

d) Toda propriedade do retângulo vale para o quadrado. Certa, pois um quadrado é também um retângulo.

e) Toda propriedade do quadrado vale para o retângulo. Errada, pois existem retângulos que não possuem todos os lados congruentes.

f) Toda propriedade do quadrado vale para o losango. Errada, pois existem losangos que não possuem ângulos retos.

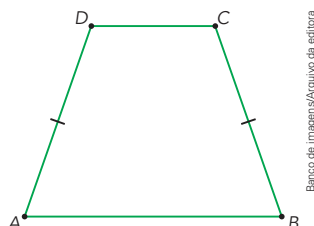
g) Toda propriedade do losango vale para o quadrado. Certa, pois um quadrado é também um losango.

h) O quadrado tem as propriedades do paralelogramo, do retângulo e do losango. Certa, pois todo quadrado é paralelogramo, retângulo e losango.

25. Com um arame de 24 m de comprimento, construímos um triângulo equilátero. Com outro arame, idêntico ao primeiro, construímos um quadrado. Qual é a razão (o quociente) entre as medidas dos lados do triângulo e do quadrado? Indique no caderno. $\frac{4}{3}$

Trapézios isósceles

Um trapézio $ABCD$ tem as seguintes propriedades:

- $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{D}) = 360°$
- $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{D}) = 180°$ e $\text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 180°$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Christian Musat/Shutterstock

As faces desse tipo de lustre lembram trapézios.

Essas propriedades são válidas para qualquer trapézio. Além delas, há outras específicas do trapézio isósceles, como estudaremos a seguir.

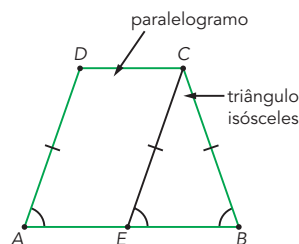
Ângulos das bases congruentes

Vamos considerar um trapézio isósceles $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e lados congruentes $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ ($\overline{AD} \cong \overline{BC}$).

Traçamos por C uma paralela a $\overline{AD}$, determinando o ponto E na base $\overline{AB}$.

Obtemos, então, um paralelogramo $AECD$ e um triângulo isósceles CEB.

paralelogramo

triângulo isósceles

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{E}$ e $\hat{B}$ assinalados na figura, temos:

- como o triângulo CEB é isósceles: $\hat{B} \cong \hat{E}$
- como $AECD$ é um paralelogramo: $\hat{A} \cong \hat{E}$

então: $\hat{A} \cong \hat{B}$ (1).

E temos:

$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{D}) = 180°$, ou seja, $\text{med}(\hat{D}) = 180° - \text{med}(\hat{A})$

$\text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 180°$, ou seja, $\text{med}(\hat{C}) = 180° - \text{med}(\hat{B})$

De (1), temos:

$\hat{C} \cong \hat{D}$ (2).

De (1) e (2), concluímos:

> Em um trapézio isósceles, **os dois ângulos de cada base são congruentes**.

Diagonais congruentes

> Em um trapézio isósceles, **as diagonais são congruentes**.

Essa propriedade pode ser provada pelo caso LAL de congruência de triângulos.

Orientações didáticas

Trapézios isósceles

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14** ao explorar as características dos trapézios isósceles.

Converse com os estudantes para instigá-los e levá-los a se interessar mais sobre o conteúdo. Para o estudo de trapézios, um dos questionamentos pode ser: “O que vocês acham que os paralelogramos e trapézios tem em comum?”. Em um primeiro momento, os estudantes podem se apoiar somente na forma, no visual das representações dessas figuras. É importante fazê-los ir além, trazendo as propriedades de ambas para que possam, de maneira correta, classificá-las e compará-las.

Neste ponto do capítulo, será especificamente caracterizado o trapézio isósceles e, por isso, é preciso trazer novamente o conceito de triângulo isósceles e suas propriedades, para que a aprendizagem fique mais significativa.

Orientações didáticas

Atividades

Complemente a atividade **26** pedindo que desenhem o trapézio, identifiquem a base maior, a base menor, os lados não paralelos e os ângulos internos, nomeando-os.

Uma sugestão para resolver a atividade **27** é conduzir os estudantes a determinar a medida dos ângulos internos de cada trapézio, utilizando a resolução de equações do 1º grau. Caso apresentem dificuldades, revise o método para resolver equações do 1º grau.

A atividade **30** auxilia no aprofundamento de práticas de letramento matemático ao requerer dos estudantes práticas de demonstrações, apoiadas em hipóteses e conceitos. Para esta atividade, é preciso resgatar os saberes prévios dos estudantes acerca de congruência de triângulos.

A atividade **32** atrela o conceito de perímetro ao trabalho com o trapézio. É uma boa oportunidade para levar os estudantes a descobrir que, conhecendo a medida de perímetro e expressões que determinam as medidas dos lados, é possível obter as medidas dos lados.

Base média do triângulo

Na BNCC

Este tópico mobiliza com maior ênfase a **CEMAT08** ao propor explorações em duplas ou trios, favorecendo a cooperação e a troca entre pares.

Para a realização da atividade proposta no boxe *Participe*, proponha que os estudantes se organizem em duplas ou trios.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

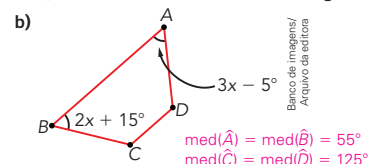
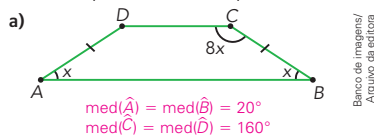
26. Seja $ABCD$ um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sabendo que med$(\hat{A}) = x$, med$(\hat{B}) = y$, med$(\hat{C}) = 4y$ e med$(\hat{D}) = 3x$, determine as medidas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$. med$(\hat{A})$ = 45°; med$(\hat{B})$ = 36°; med$(\hat{C})$ = 144°; med$(\hat{D})$ = 135°

27. Sabendo que $ABCD$ são trapézios isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determine a medida de seus ângulos.

a)

med$(\hat{A})$ = med$(\hat{B})$ = 20°
med$(\hat{C})$ = med$(\hat{D})$ = 160°

b)

med$(\hat{A})$ = med$(\hat{B})$ = 55°
med$(\hat{C})$ = med$(\hat{D})$ = 125°

28. Em cada caso, calcule a medida dos ângulos obtusos de um trapézio isósceles. Considere que:

a) um dos ângulos agudos mede 50°; 130°

b) um dos ângulos agudos mede 80°; 100°

c) a soma das medidas dos ângulos obtusos é 250°. 125°

29. Se um quadrilátero apresenta dois pares de lados opostos paralelos, prove que os lados opostos são congruentes. Sugestão: utilize congruência de triângulos e siga as instruções a seguir.

a) Faça no caderno um esboço do quadrilátero descrito no enunciado.

b) Trace no seu esboço uma das diagonais e identifique os ângulos congruentes. Lembre-se de que uma reta transversal define ângulos alternos internos com a mesma medida em um par de paralelas.

c) Por fim, identifique triângulos congruentes em seu esboço e registre o passo a passo da demonstração.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

30. Usando o caso LLL de congruência de triângulos, mostre que "as diagonais e as bases de um trapézio isósceles determinam dois triângulos isósceles". A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

31. Determine as medidas dos ângulos de um trapézio isósceles cuja altura forma com um dos lados não paralelos um ângulo que mede 40°. 50°; 50°; 130°; 130°.

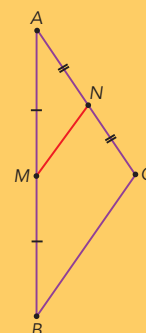
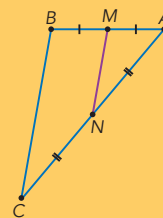
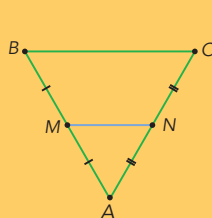
32. Determine as medidas dos lados do trapézio $APOT$, cujo perímetro mede 41 cm, sabendo que $AP = 3x + 2$ cm, $PO = x + 1$ cm, $OT = x$ cm e $AT = 2x - 4$ cm. AP = 20 cm; PO = 7 cm; OT = 6 cm; AT = 8 cm.

33. Em um trapézio isósceles, a base maior mede 15 cm, a menor mede 9 cm, e o perímetro mede 44 cm. Quanto mede cada um dos outros lados? 10 cm

Base média do triângulo

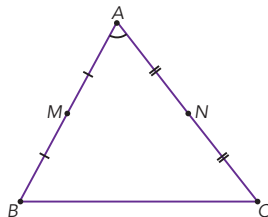
Participe

Faça as atividades no caderno.

Em todos os triângulos ABC a seguir, M é ponto médio de $\overline{AB}$ e N é o ponto médio de $\overline{AC}$. O segmento de reta $\overline{MN}$ é chamado **base média** do triângulo ABC, relativa à base $\overline{BC}$.

a) Com uma régua, meça o comprimento da base $\overline{BC}$ em cada triângulo. 3 cm
b) Em seguida, meça a base média $\overline{MN}$ em cada triângulo. 1,5 cm
c) Qual é a razão $\frac{MN}{BC}$ entre as medidas encontradas em cada caso? $\frac{1}{2}$
d) Construa um triângulo com lados medindo 4 cm, 5 cm e 6 cm. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.
e) Determine os pontos médios dos três lados do triângulo construído e meça as três bases médias. As bases médias devem medir 2 cm, 2,5 cm e 3 cm.
f) Em relação à medida de cada lado, quanto mede a base média que liga os pontos médios dos outros dois lados? Metade da medida do lado.

O estudo das propriedades dos quadriláteros permite demonstrar também propriedades de outros polígonos. A seguir, veremos como demonstrar a propriedade apresentada no *Participe*.

Propriedade da base média do triângulo

Em um triângulo ABC, vamos chamar de M o ponto médio de $\overline{AB}$ e de N o ponto médio de $\overline{AC}$.

Vamos traçar a reta $\overleftrightarrow{MN}$ e a reta r, que passa por C e é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

Note na figura que:

- as retas $\overleftrightarrow{MN}$ e r se intersectam no ponto D;
- as retas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ e a transversal $\overleftrightarrow{AC}$ permitem concluir que $\hat{A} \cong \hat{x}$;
- como $\hat{x} \cong \hat{A}$, $\overline{AN} \cong \overline{CN}$ e $\hat{z} \cong \hat{y}$, pelo critério ALA de congruência, os triângulos CDN e AMN são congruentes e, então, $\overline{CD} \cong \overline{AM}$. Logo: $\overline{CD} \cong \overline{MB}$;
- como $\overline{CD} \,/\!/\, \overline{MB}$ e $\overline{CD} \cong \overline{MB}$, o quadrilátero $MBCD$ é um paralelogramo e, então, $\overline{MD} \,/\!/\, \overline{BC}$.

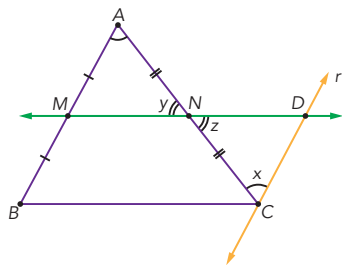
Dessa maneira, concluímos que: $\overline{MN} \,/\!/\, \overline{BC}$.

Ainda do fato de $\triangle CDN \cong \triangle AMN$ resulta que $\overline{MN} \cong \overline{DN}$. Como $MBCD$ é um paralelogramo, temos $\overline{MD} \cong \overline{BC}$ e, então, $2 \cdot MN = BC$.

Concluímos, portanto, que:

$$MN = \frac{1}{2} \cdot BC$$

Se um segmento de reta tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então:

- ele é paralelo ao terceiro lado;
- sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Se a base mede 7 cm, quanto mede a base média? 3,5 cm

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Participe

Esta atividade prepara os estudantes para o conceito de base média do triângulo. Os estudantes podem trocar ideias entre si, manipular os instrumentos de medidas (podendo ser régua e/ou esquadro) e explorar as perguntas propostas.

Após a realização da atividade em grupos, proponha que um estudante de cada grupo compartilhe com os demais colegas da turma o que descobriram e como fizeram para resolver a atividade.

Orientações didáticas

Atividades

Para as atividades **34** e **35**, incentive os estudantes a compreender que os enunciados dão pistas importantes para as resoluções. Leve-os a refletir sobre o que significa, por exemplo, "segmentos de reta com marcas iguais são congruentes" e auxilie-os a compreender que o enunciado complementa a figura apresentada na atividade.

A atividade **36** pode ser resolvida na lousa, fazendo com que os estudantes apontem as propriedades do paralelogramo.

Base média do trapézio

Na BNCC

Este tópico mobiliza com maior ênfase a **CEMAT08** ao propor explorações em duplas ou trios, favorecendo a cooperação e a troca entre pares, a **CG03** e a **CEMAT03** ao propor que os estudantes façam composições artísticas usando quadriláteros e as exponham na comunidade escolar.

Proponha que os estudantes realizem a atividade proposta no boxe *Participe* desse tópico, mantendo os grupos organizados para a atividade do tópico "Base média do triângulo".

Atividades

As imagens não estão representadas em proporção.

Faça as atividades no caderno.

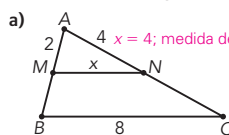
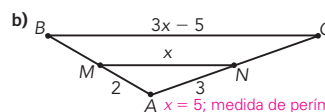
34. Em cada item, sabendo que M é ponto médio de $\overline{AB}$ e N é ponto médio de $\overline{AC}$, calcule x e dê a medida de perímetro do triângulo ABC.

a)

$x = 4$; medida de perímetro: 20.

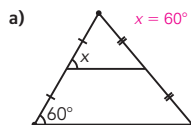
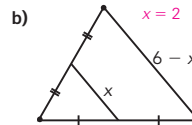
b)

$x = 5$; medida de perímetro: 20.

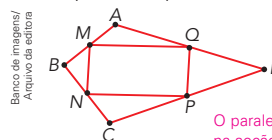
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

35. Nas figuras, segmentos de reta com marcas iguais são congruentes. Determine o valor de x em cada caso.

a)

$x = 60°$

b)

$x = 2$

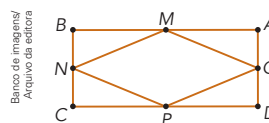
36. Qual é o quadrilátero notável cujos vértices são M, N, P e Q, que também são pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer $ABCD$? Prove que sua resposta está correta.

Banco de imagens/Arquivo da editora

O paralelogramo. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

37. No triângulo ITA de lados medindo $IT = 9$ cm, $TA = 14$ cm e $IA = 11$ cm, os pontos D, E e F são os pontos médios de $\overline{IT}$, $\overline{TA}$ e $\overline{IA}$, respectivamente. Calcule a medida de perímetro do triângulo DEF. 17 cm

38. Em um triângulo ABC, os pontos M, N e R são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Se $MN = 7$ cm, $NR = 4$ cm e $MR = 8$ cm, qual é a medida de perímetro desse triângulo? 38 cm

39. Qual é o quadrilátero notável $MNPQ$ cujos vértices são os pontos médios dos lados de um retângulo $ABCD$? Demonstre que sua resposta está correta. O losango. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Base média do trapézio

Participe

Faça as atividades no caderno.

Nos trapézios $ABCD$, M é ponto médio de $\overline{AD}$ e N é ponto médio de $\overline{BC}$. O segmento de reta $\overline{MN}$ é chamado **base média** do trapézio $ABCD$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

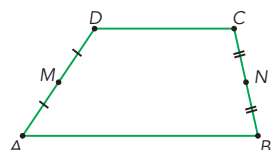
a) Com uma régua, meça a base maior ($\overline{AB}$) e a base menor ($\overline{CD}$) em cada trapézio. 4 cm e 3 cm.

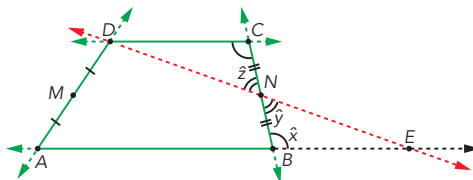
b) Em seguida, meça a base média ($\overline{MN}$) em cada trapézio. 3,5 cm

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

c) Em cada caso, qual é a razão entre MN e $(AB + CD)$? $\frac{1}{2}$

Propriedade da base média do trapézio

Em um trapézio $ABCD$, com base maior $\overline{AB}$ e base menor $\overline{CD}$, vamos chamar de M o ponto médio de $\overline{AD}$ e de N o ponto médio de $\overline{BC}$.

Traçamos a reta $\overleftrightarrow{DN}$ e chamamos de E o ponto em que ela intersecta a reta $\overleftrightarrow{AB}$:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note na figura que:

- como as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas e $\overleftrightarrow{CB}$ é transversal a elas: $\hat{C} \cong \hat{x}$;
- como $\hat{x} \cong \hat{C}$, $\overline{BN} \cong \overline{NC}$ e $\hat{y} \cong \hat{z}$, pelo critério ALA de congruência, os triângulos BEN e CDN são congruentes. Disso resulta que $\overline{EN} \cong \overline{DN}$ e $\overline{BE} \cong \overline{CD}$;
- no triângulo DAE, como $\overline{EN} \cong \overline{DN}$, resulta que M e N são os pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$, respectivamente. Pela propriedade da base média do triângulo, temos:

$\overline{MN} // \overline{AE}$; portanto, $\overline{MN} // \overline{AB} // \overline{CD}$.

$MN = \frac{1}{2} \cdot AE$; portanto $MN = \frac{AB + BE}{2} = \frac{AB+CD}{2}$

Se um segmento de reta tem extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, então ele:

- é paralelo às bases;
- tem medida igual à média aritmética das medidas das bases.

7,5 cm

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Participe

Esta atividade prepara os estudantes para o conceito de base média do trapézio, permitindo que eles troquem ideias entre si, manipulem os instrumentos de medidas (podendo ser régua e/ou esquadro) e explorem as perguntas propostas.

Após a realização da atividade em grupos, sugira que um estudante de cada grupo compartilhe com os demais colegas da turma o que descobriram e como fizeram para resolver a atividade.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **42**, verifique se os estudantes reconhecem a linha tracejada como a diagonal do trapézio isósceles.

A atividade **46** retoma o tema da abertura da Unidade e permite a realização de um trabalho interdisciplinar com o componente curricular **Arte**. Após a finalização das composições, proponha aos estudantes que organizem uma exposição das suas criações para a comunidade escolar.

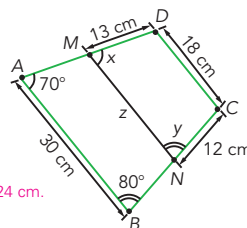
Atividades

As imagens não estão representadas em proporção.

Faça as atividades no caderno.

40. Sabendo que M é ponto médio de $\overline{AD}$, N é ponto médio de $\overline{BC}$ e $ABCD$ é um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, calcule x, y e z.

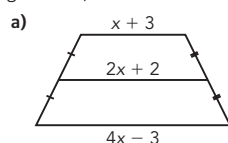
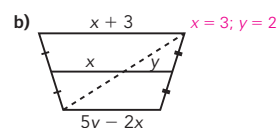
$x = 70°$; $y = 80°$; $z = 24$ cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

41. A base média de um trapézio mede 30 cm, e a medida da base maior é $\frac{3}{2}$ da medida da base menor. Determine as medidas das bases desse trapézio. 24 cm e 36 cm.

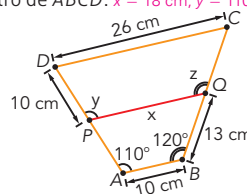
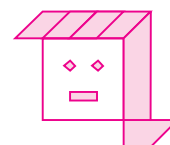
42. Considerando que os quadriláteros são trapézios e que os segmentos de reta com marcas iguais são congruentes, determine o valor de x e y em cada item.

a) $x = 4$

b) $x = 3$; $y = 2$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

43. Sabendo que $ABCD$ é um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, P é o ponto médio de $\overline{AD}$ e Q é o ponto médio de $\overline{BC}$, calcule x, y, z e a medida de perímetro de $ABCD$. $x = 18$ cm; $y = 110°$; $z = 120°$; medida de perímetro: 82 cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

46. Exemplo de resposta:

Banco de imagens/Arquivo da editora

44. A base média de um trapézio mede 14 cm, e a medida da base maior excede a menor em 4 cm. Determine as medidas das bases desse quadrilátero. 16 cm e 12 cm.

45. Recorde (pesquise, se necessário) como se calcula a medida de área de um trapézio e responda: Qual é a medida de área de um trapézio com 10 cm de altura e 9 cm de base média? 90 cm²

46. Inspirando-se na obra de Adam Lister, reproduzida no início desta Unidade, faça uma composição artística em que haja apenas quadriláteros. Para isso, utilize instrumentos de desenho ou *softwares* de Geometria dinâmica. Sua obra deve conter pelo menos um quadrilátero diferente do retângulo. Lembre-se de que quadrados também são retângulos. Resposta pessoal.

Na olimpíada

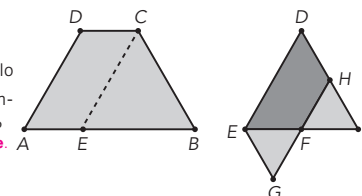
Determinando a medida de perímetro

(Obmep) O trapézio $ABCD$ foi dobrado ao longo do segmento $\overline{CE}$, paralelo ao lado $\overline{AD}$, como na figura. Os triângulos EFG e BFH são equiláteros, ambos com lados de 4 cm de comprimento. Qual é o perímetro do trapézio? Alternativa **e**.

a) 16 cm
b) 18 cm
c) 20 cm
d) 24 cm
e) 32 cm

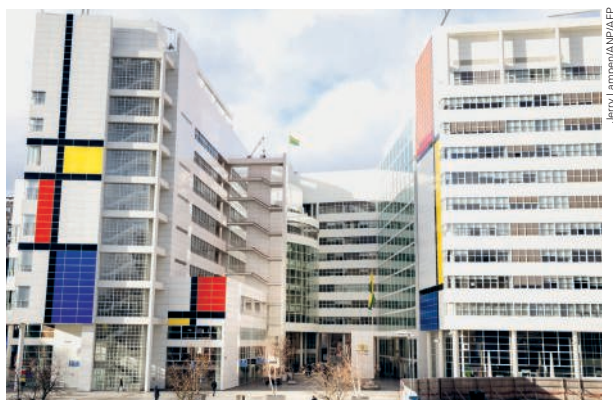
Reprodução/Obmep, 2015.

Na mídia

Faça as atividades no caderno.

Cidade holandesa celebra Mondrian com réplica gigante

A prefeitura de Haia, na Holanda, teve sua fachada decorada com o que as autoridades locais estão chamando de "maior pintura de Mondrian do mundo" para celebrar o artista abstrato holandês Piet Mondrian.

A réplica da pintura, feita de finas folhas de plástico emolduradas, apresenta o famoso desenho de linhas retas pretas e marcantes blocos vermelhos, amarelos e azuis e foi exibida nas laterais da fachada da prefeitura.

Jerry Lampen/ANP/AFP

Fachada da prefeitura da cidade de Haia, na Holanda. Foto de fevereiro de 2017.

"O conselho da cidade de Haia decidiu homenagear o artista de renome mundial como parte de um ano comemorando o tema 'Mondrian para o *design* holandês'", disse o porta-voz Herbert Brinkman [...].

Este ano marca o centenário da fundação do movimento de arte holandês chamado *De Stijl* (O Estilo), que ficou conhecido por fortes linhas horizontais e verticais com blocos de cores primárias. Mondrian e o pintor Theo van Doesburg foram dois dos mais conhecidos artistas do movimento.

A pintura mais famosa de Mondrian, *Victory Boogie Woogie*, de 1944, é considerada uma das obras de arte mais importantes do século XX. A pintura retornou à Holanda em 1998 após ser comprada de uma coleção americana confidencial por 40 milhões de dólares. A obra agora está no Gemeentemuseum, em Haia, que abriga cerca de 300 outras obras de Mondrian, se tornando a maior coleção do mundo.

CIDADE holandesa celebra Mondrian com réplica gigante. *G1*, [*s. l.*], 4 fev. 2017. Disponível em: https://g1.globo.com/mundo/noticia/cidade-holandesa-celebra-mondrian-com-replica-gigante.ghtml. Acesso em: 15 mar. 2022.

1. Uma das características marcantes das obras de Mondrian é o uso de linhas pretas horizontais e verticais, além de cores primárias e neutras. Analise, na imagem que acompanha o texto, a pintura de Mondrian reproduzida na fachada de edifícios holandeses. Em seguida, responda às questões.

a) As faixas pretas horizontais e verticais formam uma figura que lembra qual polígono? O retângulo.

b) Podemos afirmar que esse polígono é um paralelogramo? Justifique sua resposta.

c) As diagonais desse polígono são congruentes? Sim.

b) Sim, pois um paralelogramo é um quadrilátero que tem dois pares de lados opostos paralelos e congruentes.

2. Agora é a sua vez! Utilizando régua e um par de esquadros, crie, em uma folha de papel sulfite, uma obra inspirada nos formatos, linhas e cores presentes nas pinturas de Piet Mondrian. Resposta pessoal.

Orientações didáticas

Na mídia

Na BNCC

Esta seção mobiliza com maior ênfase a **CG03** e a **CEMAT03** ao propor que os estudantes leiam um texto acerca do pintor Mondrian e criem uma obra de arte inspirada nas obras desse artista, percebendo as relações entre a Matemática e outra área do conhecimento.

O trabalho com esta seção permite desenvolver um trabalho interdisciplinar com **Arte**.

As atividades propostas complementam as informações dadas na abertura deste capítulo.

Incentive os estudantes a criar suas obras de arte e sugira que as exponham para a comunidade escolar usando ferramentas alternativas, como vídeos ou postagens em redes sociais. Eles podem criar pequenos roteiros em que apresentam e mostram aos espectadores o que criaram, em que se inspiraram e os elementos geométricos utilizados.

Proposta para o estudante

É possível conhecer um pouco mais do artista Piet Mondrian visitando:

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO PARANÁ. Piet Mondrian. *Dia a dia Educação*. Disponível em: http://www.arte.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video=6108. Acesso em: 8 jun. 2022.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Essa seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

Erros de resolução nas atividades **1** e **8** podem indicar que os estudantes não compreenderam o conceito de perímetro ou que têm dificuldade na análise das figuras apresentadas. Retome na lousa esse conceito, apresentando alguns exemplos.

Na atividade **2**, os estudantes podem ter dificuldade na decomposição da figura. Relembre com a turma quais as características dos quadrados e retângulos para facilitar a identificação da razão procurada. Essa retomada pode auxiliar também os estudantes com dificuldades de resolução da atividade **4**.

As atividades **3** e **5** exploram as características do trapézio. Erros de resolução podem indicar que os estudantes não assimilaram todas as características dessa figura geométrica. Para superar este obstáculo, peça a eles que retomem o conteúdo abordado nos tópicos “Trapézio” e “Trapézios isósceles”.

Na Unidade

1. O polígono a seguir foi construído justapondo-se três quadrados com lados medindo 3 cm, 2 cm e 1 cm.

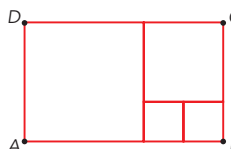
Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de perímetro desse polígono é igual à de um retângulo com lados medindo: Alternativa **a**.

a) 3 cm e 6 cm. **b)** 3 cm e 5 cm. **c)** 3 cm e 4,5 cm. **d)** 2 cm e 6,5 cm.

2. **(Unicamp-SP)** A figura abaixo exibe um retângulo *ABCD* decomposto em 4 quadrados.

D C A B

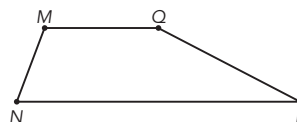
Banco de imagens/Arquivo da editora

O valor da razão $\frac{AB}{BC}$ é igual a: Alternativa **a**.

a) $\frac{5}{3}$ **b)** $\frac{5}{2}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{3}{2}$

3. **(Cesgranrio-RJ)** As bases $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ de um trapézio medem 42 cm e 112 cm respectivamente.

M Q N P

As imagens não estão representadas em proporção.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Se o ângulo $M\hat{Q}P$ é o dobro do ângulo $P\hat{N}M$, então o lado $\overline{PQ}$ mede: Alternativa **e**.

Sugestão: Trace a bissetriz de $\hat{Q}$.

a) 154 cm **b)** 133 cm **c)** 91 cm **d)** 77 cm **e)** 70 cm

4. **(Cesgranrio-RJ)** [Indique no caderno] a alternativa que contém a propriedade diferenciadora do quadrado em relação aos demais quadriláteros. Alternativa **c**.

a) Todos os ângulos são retos.
b) Os lados são todos iguais.
c) As diagonais são iguais e perpendiculares entre si.
d) As diagonais se cortam ao meio.
e) Os lados opostos são paralelos e iguais.

5. **(Cesgranrio-RJ)** Em um trapézio retângulo, o menor ângulo mede 35°. O maior ângulo desse polígono mede: Alternativa **c**.

a) 155° **b)** 150° **c)** 145° **d)** 142° **e)** 140°

6. (Ufop-MG) [Indique no caderno] a afirmativa incorreta: Alternativa **e**.

a) Em todo paralelogramo não retângulo, a diagonal oposta aos ângulos agudos é menor do que a outra.

b) É reto o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo.

c) As bissetrizes de dois ângulos opostos de um paralelogramo são paralelas.

d) Ligando-se os pontos médios dos lados de um triângulo, este fica decomposto em quatro triângulos congruentes.

e) Todas as afirmativas anteriores são incorretas.

7. (Vunesp) A afirmação falsa é: Alternativa **e**.

a) Todo quadrado é um losango.

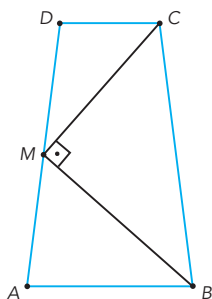
b) Existem retângulos que não são losangos.

c) Todo paralelogramo é um quadrilátero.

d) Todo quadrado é um retângulo.

e) Um losango pode não ser um paralelogramo.

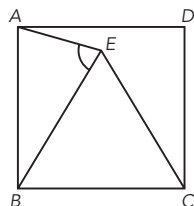
8. (FGV-SP) A figura representa um trapézio isósceles $ABCD$, com $AD = BC = 4$ cm. M é o ponto médio de $\overline{AD}$, e o ângulo $B\widehat{M}C$ é reto. Alternativa **c**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Sugestão: Trace a base média do trapézio; ela é a mediana relativa à hipotenusa do triângulo retângulo.

O perímetro do trapézio $ABCD$, em cm, é igual a:

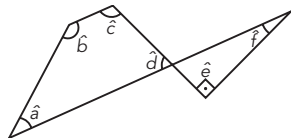
a) 8 **b)** 10 **c)** 12 **d)** 14 **e)** 1

9. (UFMG) Na figura, $ABCD$ é um quadrado e BCE é um triângulo equilátero. Alternativa **d**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida do ângulo $A\hat{E}B$, em graus, é:

a) 30 **b)** 49 **c)** 60 **d)** 75 **e)** 90

10. (Fuvest-SP) Na figura abaixo os ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$ medem, respectivamente, $\frac{x}{2}$, $2x$, $\frac{3x}{2}$ e x.

Banco de imagens/Arquivo da editora

O ângulo $\hat{e}$ é reto. Qual a medida do ângulo $\hat{f}$? Alternativa **b**.

a) 16° **b)** 18° **c)** 20° **d)** 22° **e)** 24°

Orientações didáticas

Na Unidade

Erros de resolução nas atividades **6** e **7** indicam que os estudantes não assimilaram as características dos quadriláteros notáveis. Retome este tópico no Livro do Estudante e, se necessário, liste na lousa as principais características de cada um deles.

As atividades **9** e **10** exploram medidas de ângulos. Em caso de dúvidas, peça aos estudantes que leiam os enunciados pausadamente e que verifiquem as figuras e os dados fornecidos. Reproduza as figuras na lousa e faça um passo a passo de resolução.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da Unidade favorece o desenvolvimento dos TCTs *Trabalho*, *Educação Fiscal* e *Educação Financeira*, ao permitir uma discussão sobre trabalho formal e impostos desenvolvendo nos estudantes a capacidade de argumentação embasada em dados e informações confiáveis para defender pontos de vista e tomar decisões individuais e coletivas, mobilizando assim as **CG07** e **CG10**.

O assunto do texto de abertura é importante para a construção da cidadania e autonomia dos estudantes, pois favorece o acesso e a interação crítica com informações relevantes sobre o trabalho com carteira assinada e o trabalho informal. Aproveite para desenvolver estratégias de leitura e compreensão do texto que favoreçam posicionamentos críticos, evidenciados por uma argumentação fundamentada em dados científicos.

6 UNIDADE

Álgebra

William Potter/Shutterstock

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- resolver e elaborar problemas que envolvam expressões algébricas;
- associar uma equação linear do 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano;
- resolver e elaborar problemas que possam ser representados por sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

CAPÍTULOS

É importante fazer um planejamento para reduzir o impacto dos impostos no orçamento familiar.

Quantos impostos pagamos?

Em um emprego com carteira assinada, ao receber o holerite, é possível perceber uma série de descontos devido aos impostos. Esses descontos são incididos sobre o **salário bruto** e o que é depositado em conta chamamos de **salário líquido**.

Segundo a Consolidação das Leis de Trabalho (CLT), há dois impostos que são obrigatórios: o Imposto de Renda da Pessoa Física (IRPF) e a contribuição ao Instituto Nacional do Seguro Social (INSS). Ambos são calculados de acordo com o salário bruto do empregado e podem sofrer alterações conforme as reformas tributárias. Verifique na tabela a seguir informações sobre valores da contribuição do INSS, no ano de 2021 Para valores acima de R$ 7.087,22 a contribuição para INSS é fixada em R$ 828,38.

Contribuição mensal

Salário de contribuição	Alíquota progressiva
Até R$ 1.212,00	7,5%
De R$ 1.212,01 a R$ 2.427,35	9%
De R$ 2.427,36 a R$ 3.641,03	12%
De R$ 3.641,04 a R$ 7.087,22	14%

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério do Trabalho e Previdência. Tabela de contribuição mensal. *Instituto Nacional do Seguro Social* – INSS. Disponível em: https://www.gov.br/inss/pt-br/saiba-mais/seus-direitos-e-deveres/calculo-da-guia-da-previdencia-social-gps/tabela-de-contribuicao-mensal. Acesso em: 16 abr. 2022.

O Imposto de Renda é descontado de acordo com a base de cálculo exibida na tabela a seguir.

Tributação incidente sobre o valor total recebido no mês

Base de cálculo	Alíquota	Parcela a deduzir do IRPF
Até R$ 1.903,98	-	-
De R$ 1.903,99 a R$ 2.826,65	7,5%	R$ 142,80
De R$ 2.826,66 a R$ 3.751,05	15%	R$ 354,80
De R$ 3.751,06 a R$ 4.664,68	22,5%	R$ 636,13
Acima de R$ 4.664,68	27,5%	R$ 869,36

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Economia. *Imposto sobre a renda pessoa física*: Perguntas e respostas 2022. Brasília, DF: 2022, p.122.Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/perguntas-e-respostas/dirpf/pr-irpf-2022.pdf. Acesso em: 18 abr. 2022.

Outros descontos podem ser percebidos no holerite, mas não são obrigatórios: contribuição sindical, vale-transporte, vale-alimentação, pensão alimentícia, faltas e atrasos, entre outros descontos de origem judicial. Entretanto, os descontos obrigatórios e não obrigatórios não podem ultrapassar 70% do salário do empregado.

Considere que um trabalhador tenha apenas os descontos obrigatórios e receba R$ 2.500,00 de salário bruto mensalmente. O desconto de INSS é aplicado nas faixas de 12%, 9% e 7,5% e é calculado por: $0{,}12 \cdot (2\,500{,}00 - 2\,427{,}35) + 0{,}09 \cdot (2\,427{,}35 - 1\,212{,}00) + 0{,}075 \cdot 1\,212{,}00 \simeq 209{,}00$. A base de cálculo para o IRPF é dada pela diferença entre o salário bruto e o desconto de INSS, logo, esse trabalhador tem salário-base igual a $2\,500{,}00 - 209{,}00 = 2\,291{,}00$, que pertence à faixa de 7,5%. O valor do desconto de IRPF é calculado por $0{,}075 \cdot 2\,291{,}00 - 142{,}80 \simeq 29{,}03$. Finalmente, o salário líquido a ser recebido é de R$ 2.261,97, pois $2\,291{,}00 - 29{,}03 = 2\,261{,}97$. Caso o trabalhador tenha dependentes, a base de cálculo é reduzida conforme a quantidade de dependentes multiplicada por R$ 189,59. Assim, o Imposto de Renda pode ser calculado por meio de um sistema de equações:

$$\begin{cases} IR = SB \cdot x - PD \\ SB = SD - 189{,}59y \end{cases}$$

em que *SB* é o salário-base, *SD* é o salário com o desconto de INSS, *IR* é o imposto de renda, *PD* é a parcela a deduzir segundo a faixa na qual se enquadra o salário, *x* é a alíquota da faixa e *y* é a quantidade de dependentes. Para os demais descontos, basta subtrair os valores após o cálculo de INSS e IRPF.

Fontes dos dados: BRASIL. Ministério do Trabalho e Previdência. *Instituto Nacional do Seguro Social* – INSS. *Gov.br*, Brasília, DF, [20-]. Disponível em: https://www.gov.br/inss/pt-br; BRASIL. Ministério da Economia. *Receita Federal*. IRPF (Imposto sobre a renda das pessoas físicas). *gov.br*, Brasília, DF, [20-]. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/orientacao-tributaria/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica. Acesso em: 10 dez. 2021.

Você já viu um holerite? Como aparecem os descontos? Por que precisamos pagar impostos? Qual é o destino dos impostos? Respostas pessoais.

Orientações didáticas

Abertura

Promova um debate para que os estudantes avaliem o custo do imposto do INSS e o uso de benefícios como licença maternidade, saúde e férias.

Holerite é uma palavra de uma região específica. Explique que os sinônimos para esse termo são: contracheque, comprovante de pagamento, etc. Explique também o que significa “incidir sobre o salário bruto”, ou seja, descontar do valor do salário os valores correspondentes aos impostos. Nesse sentido, o salário completo é chamado **salário bruto** e o que sobra depois dos descontos é o **salário líquido**. Do ponto de vista da Educação Financeira, além da compreensão dos impostos, é necessário calcular os gastos pensando no salário líquido e não no salário bruto.

Para responder o motivo pelo qual precisamos pagar impostos e, também, qual o destino deles, sugira que os estudantes realizem uma pesquisa em diferentes e confiáveis fontes de informação, especialmente porque em torno desse tema giram muitas *fake news*. Se necessário, relembre com os estudantes os conteúdos de prática de pesquisa e *fake news* estudados anteriormente.

Orientações didáticas

Um pouco de história

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA06**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo o cálculo do valor numérico de expressões algébricas. Também mobiliza a **CEMAT02**, a **CEMAT05** e a **CEMAT06**, ao contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico, incorporar situações cotidianas com o intuito de fazer da matemática uma ferramenta de tomada de decisão e utilizar diferentes registros e linguagens.

Este tópico mobiliza a **CG01** e a **CEMAT01**, ao reconhecer e apresentar a matemática como ciência humana, historicamente construída em diferentes culturas no espaço e no tempo.

A História da Matemática é uma ferramenta fundamental para o entendimento da matemática como um empreendimento humano, fruto da colaboração de diversas pessoas, culturas e contextos sociais e econômicos. O resgate de aspectos da História da Matemática ajuda o estudante a compreender a matemática como uma ciência produzida ao longo da história da humanidade, sempre com a finalidade de resolver problemas científicos e tecnológicos.

Proponha uma reflexão prévia com os estudantes sobre a resolução do problema contido no Papiro de Rhind, talvez como um desafio, ainda que pareça um tanto difícil. Dessa maneira, será possível comparar as estratégias iniciais que os estudantes apresentarem com as estratégias de resolução trabalhadas ao longo do capítulo, e assim compreender a necessidade e importância de um pensamento organizado e sistemático para amparar a criatividade na resolução de problemas.

CAPÍTULO 11

Equações

NA BNCC
EF08MA06

Um pouco de história

Um certo número de papiros egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três e meio milênios. O mais extenso dos de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, que está agora no *British Museum* (exceto uns poucos fragmentos que estão no *Brooklyn Museum*). Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind; por isso é conhecido como Papiro de Rhind, ou, menos frequentemente, chamado de Papiro de Ahmes em honra do escriba que o copiou por volta de 1650 a.C.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. revista por Uta C. Merzbach. São Paulo: Edgard Blücher, 1996, p. 9.

O Papiro de Rhind contém diversos problemas, entre os quais alguns algébricos. O problema 31, por exemplo, diz o seguinte: "Uma quantidade e seus dois terços, sua metade e seu um sétimo, juntos, fazem 33. Ache essa quantidade".

Você vai resolver esse e outro problema do Papiro de Rhind adiante, no estudo das equações.

No ambiente em que vive, há muitos idosos? Eles têm o hábito de praticar atividades físicas? Conte para os seus colegas e professor.

Você sabia que a prática de exercícios físicos traz inúmeros benefícios aos idosos como a prevenção da perda óssea, a manutenção do tônus muscular, a melhora do sistema cardiorrespiratório, a regulação da glicemia, do colesterol e de triglicérides, entre outros? Para saber mais sobre o assunto, visite: PREFEITURA MUNICIPAL DE SÃO JOSÉ DO NORTE. *A importância dos exercícios físicos para idosos*. Disponível em: https://www.saojosedonorte.rs.gov.br/noticias/a-importancia-dos-exercicios-fisicos-para-idosos. Acesso em: 18 abr. 2022.

Monkey Business Images/Shutterstock

A atividade física estimula a memória e a coordenação motora dos idosos.

Resolução de problemas

A caminhada

Nilson e Marisa fazem caminhada pelo menos 3 vezes por semana, visando melhorar a qualidade de vida. Eles percorrem sempre a mesma medida de distância.

Caminhando 90 metros a cada minuto, Nilson chega ao final do percurso 7 minutos antes de Marisa, que caminha 80 metros a cada minuto.

Quanto tempo dura a caminhada de Nilson? E a de Marisa?

Problemas como esse podem ser resolvidos por meio de equações. Vamos recordar algumas orientações.

1. Leia atentamente o problema.
2. Estabeleça qual é a incógnita.
3. Escreva a condição sobre a incógnita (se deve ser número natural, inteiro, positivo, etc.).
4. Monte uma equação que traduza os dados do problema em linguagem matemática.
5. Resolva essa equação.
6. Verifique se a raiz encontrada obedece à condição estabelecida na etapa 3.
7. Dê a resposta.

Depois de ler atentamente o problema apresentado (1), estabelecemos que:

(2) t é o número procurado: representa a medida de tempo, em minutos, da caminhada de Nilson. O de Marisa é $t + 7$;

(3) t deve ser um número positivo.

Para montar uma equação, analisemos os dados do problema (4):

- Eles caminham pelo menos 3 vezes por semana: esse dado é irrelevante para o cálculo da medida de tempo do percurso.
- Nilson caminha 90 metros a cada minuto: em t minutos, ele caminha $90t$ metros.
- Marisa caminha 80 metros a cada minuto: em $(t + 7)$ minutos, ela caminha $80(t + 7)$ metros.
- Ambos percorrem a mesma medida de distância. Então:

$$90t = 80(t + 7)$$
$$90t = 80t + 560$$

Agora, precisamos resolver a equação para descobrir a raiz (5). A raiz (ou solução) é o número que, substituído no lugar da incógnita, transforma a equação em uma sentença verdadeira. Para achar a raiz, podemos aplicar as seguintes operações elementares sobre a equação:

- Adicionamos um mesmo número aos dois membros.
- Multiplicamos os dois membros por um mesmo número diferente de zero.

Então, vamos resolver $90t = 80t + 560$.

1º passo: Deixamos a incógnita em apenas um dos membros da equação utilizando a operação inversa. A operação inversa a adicionar $80t$ é subtrair $80t$.

$$90t - 80t = 80t + 560 - 80t$$
$$90t - 80t = 560$$
$$10t = 560$$

2º passo: Como a incógnita está multiplicada por 10, utilizamos a operação inversa dividindo os dois membros por 10, que é o mesmo que multiplicar por $\frac{1}{10}$:

$$\frac{10t}{10} = \frac{560}{10}$$
$$t = 56$$

O número encontrado, 56, é positivo (6). Então, a medida de tempo de Nilson é 56 minutos.

Como $t + 7 = 56 + 7 = 63$, a medida de intervalo de tempo de Marisa é 63 minutos.

Vale ainda lembrar que você sempre pode conferir se acertou os cálculos ao resolver uma equação: é só testar se o número encontrado é realmente raiz da equação. Para isso, substitua a incógnita pelo número encontrado e verifique se foi obtida uma sentença verdadeira:

$$90 \cdot 56 = 80 \cdot 56 + 560$$
$$5\,040 = 4\,480 + 560$$
$$5\,040 = 5\,040 \text{ (verdadeira)}$$

(7) **Resposta:** A medida de tempo de Nilson é 56 minutos e a de Marisa, 63 minutos.

Explorando o problema

Pense e responda no caderno: Quantos metros Nilson e Marisa caminham a cada vez? 5 040 m

Orientações didáticas

Resolução de problemas

Na BNCC

Este tópico traz oportunidades para trabalhar os TCTs *Saúde* e *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso* e favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA06**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo o cálculo do valor numérico de expressões algébricas.

O passo a passo da resolução do problema “A caminhada” fornece aos estudantes uma estratégia importante para a sistematização do pensamento, podendo ser incorporada ou agregada às estratégias pessoais deles. Interpretar, formular e seguir passos para a resolução de um problema contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional. Em todo o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo deste capítulo, incentive os estudantes a verbalizar o que significam as incógnitas nas equações.

O boxe de sugestão de acesso à internet apresentado no Livro do Estudante, trata de questões sobre saúde dos idosos, mobilizando o TCT *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso*. Caso seja possível, proponha uma visita a um lar de idosos ou a uma casa de repouso para que os estudantes interajam com os idosos em atividades como conversas, caminhadas, contação de histórias, teatro, dança, jogos, etc. O TCT *Saúde* também pode ser mobilizado em uma roda de conversa, com a turma na sala de aula, sobre os interesses dos estudantes em relação a atividades físicas; se eles já praticam ou gostariam de praticar e que relatem as modalidades.

Orientações didáticas

Atividades

Nas atividades **1** a **5**, converse com os estudantes sobre as operações no conjunto dos números racionais, pois o conhecimento prévio desse conteúdo se faz necessário para a resolução dos problemas. Se os estudantes apresentarem dificuldades, retome o conteúdo e aplique atividades complementares. É possível que haja a necessidade de retomar as características dos números racionais e o uso das operações básicas com esses números, mais especificamente com frações.

Já para as atividades **6** a **17**, debata sobre as etapas de resolução de problemas de POLYA (1978): a) compreender o enunciado; b) elaborar uma estratégia de resolução; c) executar a estratégia; d) verificar a resposta. Caso considere adequado, proponha a resolução dos problemas em duplas e peça que compartilhem as respostas para discussão com os colegas sobre as estratégias de resolução escolhidas. Um dos conhecimentos prévios que os estudantes deverão ter para alguns desse problemas é o conceito de porcentagem. Retome esse conteúdo se julgar necessário.

A atividade **11** traz contextos sociais importantes: a ausência de moradia própria, a falta de dinheiro para pagar contas obrigatórias e a multa paga pelo atraso.

O boxe de sugestão de leitura mobiliza os TCTs *Vida Familiar e Social* e *Educação em Direitos Humanos*, bem como a **CG09** e a **CG10**, ao propor a reflexão sobre os aspectos políticos, científicos e sociais da construção de um prédio sem limite de altura. A leitura e a interpretação do texto do livro indicado criam a oportunidade de uma proposta interdisciplinar com Língua Portuguesa e favorece o despertar do interesse dos estudantes pela leitura.

Atividades

1. $\frac{133}{8}$ 2. $\frac{1386}{97}$

Faça as atividades no caderno.

1. Resolva o problema **24** do Papiro de Rhind: "Calcule *aha* sabendo que *aha* mais um sétimo de *aha* dá 19.". *Aha* é como a incógnita era chamada.

2. O problema **31** do Papiro de Rhind também pode ser resolvido por meio de uma equação. Resolva-o: "Uma quantidade e seus dois terços, sua metade e seu sétimo, juntos, fazem 33. Ache essa quantidade."

3. Os candidatos a um emprego compareceram a um teste e foram divididos em 3 turmas: na primeira havia $\frac{2}{3}$ deles; na segunda, $\frac{1}{4}$; e, na terceira, os demais 15 candidatos. Ao todo, quantos eram os candidatos? 180 candidatos.

4. Uma empreiteira pavimentou $\frac{2}{5}$ da extensão de uma rodovia, e outra, os 84 km restantes. Qual é a extensão dessa rodovia? 140 km

5. Leandro e Leonardo são amigos, trabalham juntos em uma empreiteira e recebem salários iguais. No final de um mês, Leandro havia gastado $\frac{7}{8}$ do seu salário, e Leonardo, $\frac{9}{10}$ do dele. Um deles terminou o mês com R$ 40,00 a mais do que o outro.

a) Quem terminou o mês com mais dinheiro? Leandro.

b) Qual é o salário deles? R$ 1.600,00

6. Em 2020, na cidade de Salvador (BA), uma corrida de táxi custava R$ 4,81 mais a quantia de R$ 2,42 por quilômetro rodado.

a) Quanto custava uma corrida de x quilômetros? (4,81 + 2,42x) reais.

b) Quantos quilômetros tem uma corrida que custava R$ 24,17? 8 quilômetros.

Que tal conhecer a história de um jovem engenheiro, que está gerenciando a construção de um prédio sem limite de altura? O livro apresenta ao leitor um conto fantástico que enseja questões relacionadas à sociedade, política e cidadania. Leia:

RUBIÃO, M. *O edifício*. 1. ed. Belo Horizonte: Maralto Edições, 2016.

7. Para produzir certo artigo, uma fábrica tem um custo fixo de R$ 2.500,00 mais um acréscimo de R$ 2,50 por unidade produzida.

a) Qual é o custo total para produzir x unidades? (2 500 + 2,50x) reais.

b) Gastando R$ 10.000,00, quantas unidades são produzidas? 3 000 unidades.

8. Do salário de José Ricardo são descontados apenas 9% de INSS, restando para ele R$ 1.137,50. Qual é o salário dele? R$ 1.250,00

Recordando: $9\% = \frac{9}{100}$

9. Uma empresa aumentou em 10% o salário de todos os funcionários e ainda deu uma bonificação de R$ 150,00 para cada um. No salário de Luís Carlos, isso significou um aumento de 20% de um mês para o outro. Qual é o novo salário dele? R$ 1.800,00

10. O tanque de um carro contém 42 L de gasolina, atingindo 75% de sua capacidade. Quantos litros ainda cabem nesse tanque? 14 L

11. Neste mês, Pedro Antônio atrasou o pagamento do aluguel de sua casa. Por isso, teve de pagar R$ 594,00, já incluídos os 10% da multa pelo atraso. Qual é o valor do aluguel sem a multa? R$ 540,00

12. Um vendedor ganha por mês um salário fixo de R$ 1.300,00 mais comissão de 1,5% sobre o total de suas vendas no mês. Para ganhar R$ 1.600,00 em um mês, quanto ele precisa vender? R$ 20.000,00

13. Depois de um novo funcionário ser contratado, com salário de R$ 1.440,00, o salário médio dos funcionários de um escritório passou de R$ 1.800,00 para R$ 1.760,00. Quantos funcionários havia antes da nova contratação? 8 funcionários.

14. Uma empresa tinha 35 funcionários e pagava, em média, R$ 1.600,00 a cada um. Após contratar novos funcionários, com salário de R$ 1.240,00 cada um, a média de pagamento dos funcionários caiu para R$ 1.520,00. Quantos funcionários ela contratou? 10 funcionários.

15. Wellington, de 42 anos, é pai de Mariana, de 12 anos. Daqui a quantos anos a idade do pai será o dobro da idade da filha? 18 anos.

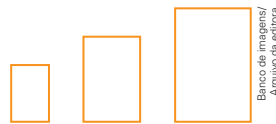
16. Lendo 20 páginas por dia, Fábio terminou um livro levando 5 dias a mais do que Fátima, que lia 28 páginas por dia. Quantas páginas tem o livro? 350 páginas.

17. Em um clube, há 2 piscinas de mesmas dimensões. Uma das piscinas é cheia à razão de 12 L de água por minuto, levando 4 horas a mais do que a outra, que recebe 15 L por minuto, para ficar totalmente cheia. Qual é a medida de capacidade de cada piscina? 14 400 L

18. Aline, Clarice e Mônica foram candidatas à Rainha da Primavera. Aline obteve o dobro do número de votos de Clarice, que teve 18 votos a mais do que Mônica. Foram 214 os votantes e 20 votos foram anulados. Dê a classificação final e o número de votos de cada candidata. Aline: 106 votos; Clarice: 53 votos; Mônica: 35 votos.

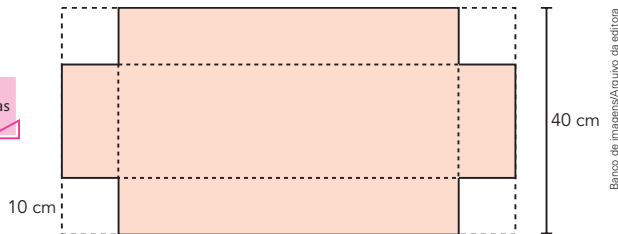
19. A medida da altura de cada retângulo é uma vez e meia a medida da sua base. Quanto deve medir a base para que um desses retângulos tenha perímetro que mede 20 cm? 4 cm

Banco de imagens/Arquivo da editora

20. De uma cartolina retangular com 40 cm de medida da largura, cortamos em cada canto um quadrado de lado medindo 10 cm. Em seguida, dobramos as abas, formando uma caixa sem tampa. Para que a caixa tenha medida de volume de 8 000 cm^3, qual deve ser a medida do comprimento da cartolina? 60 cm

As imagens não estão representadas em proporção.

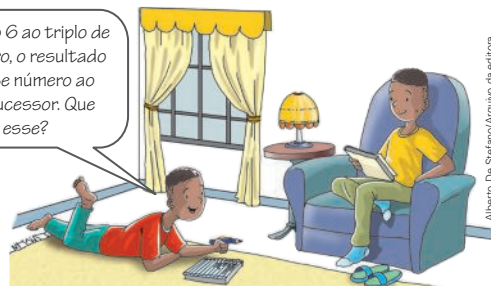
40 cm

10 cm

Banco de imagens/Arquivo da editora

Equações impossíveis e equações indeterminadas

Existem equações que não têm solução no conjunto numérico considerado para a incógnita. Outras têm infinitas soluções. Acompanhe o enigma que Artur propôs a seu irmão Raul:

Raul, adicionando 6 ao triplo de um número inteiro, o resultado é a adição desse número ao dobro do seu sucessor. Que número é esse?

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

- número desconhecido → x (deve ser inteiro)
- triplo do número desconhecido → $3x$
- adicionando 6 ao triplo do número desconhecido → $3x + 6$
- sucessor do número desconhecido → $x + 1$
- dobro do sucessor → $2(x + 1)$
- adição do número desconhecido ao dobro do sucessor → $x + 2(x + 1)$
- equação → $3x + 6 = x + 2(x + 1)$

Orientações didáticas

Atividades

Para a atividade **18**, proponha que leiam o problema e discutam sobre o enunciado para que compreendam a situação e elaborem uma equação do 1º grau que represente as condições dadas. Sugira que observem outras resoluções trocando o caderno com um colega.

Já na atividade **19**, retome com os estudantes o conceito de perímetro e, caso considere conveniente explorar esse conteúdo, forneça papel quadriculado e proponha que construam todas as possibilidades de retângulos com medida de perímetro 20 u (considerando 1 u a medida do lado do quadradinho), registrem os cálculos e justifiquem as respostas.

Para a resolução da atividade **20**, os estudantes precisam ter conhecimento sobre volume. Retome esse conteúdo caso considere necessário. Pode-se explorar essa atividade solicitando que os estudantes elaborem um problema semelhante e construam a caixa proposta, favorecendo assim a prática de metodologias ativas em sala de aula.

Equações impossíveis e equações indeterminadas

Resolva os exemplos na lousa e peça aos estudantes que acompanhem passo a passo as resoluções. Caso seja necessário, antes de prosseguir, apresente outros problemas similares aos desses exemplos para que os estudantes compreendam a sistematização ao final da teoria. Chegar a essa conclusão contribui para o desenvolvimento do pensamento lógico-indutivo.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **21**, proponha aos estudantes que discutam as respostas coletivamente e apresentem as justificativas que os fizeram classificar as equações como impossíveis ou indeterminadas.

Resolução:

$$3x + 6 = x + 2x + 2$$
$$3x - x - 2x = 2 - 6$$
$$0x = -4$$

Essa equação não tem raiz, pois não existe número que, multiplicado por zero, dá -4. Nesse caso, dizemos que essa equação é **impossível**.

Raul deve responder, então, que o número não existe.

Agora, acompanhe o enigma que Raul propôs a Artur:

- número desconhecido $\rightarrow x$ (deve ser inteiro)
- equação $\rightarrow 2x + 1 = x + (x + 1)$

Resolução:

$$2x + 1 = x + x + 1$$
$$2x - x - x = 1 - 1$$
$$0x = 0$$

Essa equação tem uma infinidade de raízes, pois todo número multiplicado por zero dá zero. Dizemos que essa equação é **indeterminada**.

Artur deve responder que o número pode ser qualquer inteiro.

Uma equação com uma incógnita é **impossível** quando não tem raiz.
Uma equação com uma incógnita é **indeterminada** quando tem infinitas raízes.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

21. Verifique o quadro e responda no caderno.

A	B	C	D	E	F
$3x = 5$	$2x = 0$	$0x = 2$	$0x = 0$	$\frac{x}{2} = \frac{x}{3}$	$x + 1 = 1 + x$

a) Quais equações são impossíveis? C

b) Quais equações são indeterminadas? D, F

22. Resolva as equações a seguir considerando o conjunto dos números racionais.

a) $x + 1 = x + 2$ $0x = 1$ (impossível).

b) $2x + 1 = x + 1$ $x = 0$.

c) $x - 1 = 1 - x$ $x = 1$.

d) $\frac{2x+1}{4} - x = \frac{3}{4} - \frac{x+1}{2}$ $0x = 0$ (indeterminada, pois x pode ser qualquer número).

e) $3(x + 2) = 2(x + 4) + x - 4$ $0x = -2$ (impossível).

f) $\frac{x+1}{2} + \frac{2x+1}{3} = 1 - \frac{1-x}{6}$ $x = 0$.

23. Para qual número inteiro o dobro de seu sucessor é igual ao sucessor de seu dobro? Para nenhum número inteiro.

24. Que número adicionado aos seus três quartos dá o seu dobro subtraído de sua quarta parte? Qualquer número.

Equação do 1º grau

Ao resolver uma equação com uma incógnita, procuramos deixar os termos que contêm a incógnita no primeiro membro e os demais termos no segundo membro. Quando chegamos a uma equação escrita como

$$ax = b$$

em que a e b são números conhecidos e $a \neq 0$, dizemos que se trata de uma **equação do 1º grau**.

Por exemplo, são equações do 1º grau as mostradas no quadro a seguir.

$ax = b$	a	b
$-2x = 17$	-2	17
$x = -\frac{7}{3}$	1	$-\frac{7}{3}$
$\frac{x}{2} = 0$	$\frac{1}{2}$	0

Na equação $ax = b$, nomeamos:

- x é a incógnita;
- a é o coeficiente da incógnita;
- b é o termo independente;
- sendo $a \neq 0$, a raiz é $\frac{b}{a}$.

Consideramos o conjunto dos números racionais para o estudo de Álgebra neste volume. Assim, x, a e b na equação do 1º grau $a \cdot x = b$ são números racionais.

Uma equação com uma incógnita x é denominada **equação do 1º grau** se puder ser reduzida, por meio de operações elementares, à forma $a \cdot x = b$, em que a e b são números conhecidos e $a \neq 0$.

Repare que, se $a = 0$, a equação fica $0x = b$ (não é equação do 1º grau). Nesse caso, se $b \neq 0$, a equação é impossível, e se $b = 0$, a equação é indeterminada.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **22** envolve a propriedade distributiva e as operações com números racionais. Verifique os conhecimentos prévios dos estudantes e, caso julgue necessário, retome os conteúdos e proponha atividades complementares.

Comente com os estudantes que tentativa e erro é uma estratégia para a resolução da atividade **23**; e que fazer um esboço auxilia a visualização da atividade **24**.

Equação do 1º grau

Reforce com os estudantes a ideia de que apenas um número pode não ser suficiente para apresentar a solução completa de uma equação e, assim, é importante verificar a veracidade das soluções e apresentar uma resposta completa com o chamado **conjunto solução**. Apresente exemplos de situações em que uma resposta única não é a melhor nem a mais completa das respostas.

Orientações didáticas

Atividades

Proponha aos estudantes que resolvam a atividade **25** em duplas e compartilhem as respostas com os colegas. Observe se conseguem fazer a parte operacional com autonomia. Essa abordagem mobiliza a **CEMAT08** e contribui para a interação entre os pares como uma estratégia de aprendizado. Permita que os estudantes expressem os conjuntos soluções das equações por meio de palavras, por exemplo, no caso do item **c**, ele pode ser expresso assim: "Nenhum número racional satisfaz a equação"; em seguida, incluir o símbolo do conjunto vazio. Explique que esse símbolo já indica o conjunto vazio e por isso ele não aparece entre chaves. No caso do item **d**, a resposta pode ser dada assim: "Qualquer número racional satisfaz a equação".

Para a atividade **26**, faça a leitura coletiva do problema e elabore perguntas para que os estudantes consigam compreender e construir a equação que representa a situação, por exemplo: "Quanto aumenta a soma das idades dos filhos em um ano? E a idade da mãe?". Solicite que socializem as soluções encontradas. O estudante pode escolher outras letras para representar a incógnita da equação que modela esse problema.

O boxe de sugestão de leitura indica um livro que traz aplicações da Matemática em situações cotidianos, além de favorecer um trabalho interdisciplinar com **Língua Portuguesa**.

Conjunto solução

Outra maneira de apresentar a resposta de uma equação é formando um conjunto com as raízes dela. O conjunto formado pelas raízes de uma equação é denominado **conjunto solução** (ou **conjunto verdade**) da equação. Nós o representamos pela letra S (ou pela letra V).

Por exemplo:

- Resolvendo a equação $5x = -20$, encontramos $x = -4$. O conjunto solução dessa equação é:

$$S = \{-4\}$$

- Na situação proposta por Raul a Artur, no tópico "Equações impossíveis e equações indeterminadas", x representa um número inteiro. Como se trata de uma equação indeterminada, $0x = 0$, todo número inteiro é solução. Assim:

$$S = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

- Já na situação proposta por Artur a Raul, no mesmo tópico, a equação $0x = -4$ é impossível. O conjunto solução da equação não tem elemento algum. É o conjunto vazio, que se representa por $\varnothing$. Então:

$$S = \varnothing$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

25. Resolva as equações considerando o conjunto dos números racionais.

a) $4x - 32 = 0$ $S = \{8\}$

b) $10x + 1 = 3 + 5x$ $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

c) $2(x + 7) - (1 - x) = 12 + 3x$ $S = \varnothing$

d) $5x - 2(2x - 1) = x + 2$ Qualquer número racional x é solução da equação.

26. Maria Elisa, de 54 anos, tem 4 filhos. A soma da idade dos filhos é 39 anos. Daqui a quantos anos a soma da idade dos filhos de Maria Elisa será igual à idade da mãe?

a) No caderno, escreva a equação do 1º grau que representa este problema. $54 + x = 39 + 4x$, simplificando temos: $3x = 15$

b) Resolva essa equação considerando o conjunto dos números racionais e responda ao problema. $S = \{5\}$; 5 anos.

Na olimpíada

(Obmep) Na tabela há um número escondido na casa azul e a soma dos números da primeira linha é igual à soma dos números da segunda linha. Qual é o número escondido? Alternativa **a**.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	2013
3	5	7	9	11	13	15	17	19	

Reprodução/Obmep, 2013.

a) 1 995
b) 1 997
c) 1 999
d) 2 001
e) 2 005

RAMOS, Luzia Faraco. *Encontros de primeiro grau*. São Paulo: Ática, 2019. (Coleção Descoberta da matemática).

Dois amigos resolvem problemas do cotidiano utilizando a Matemática, principalmente as equações do 1º grau.

Reprodução/Editora Ática

Proposta para o estudante

Sugira aos estudantes que explorem o *site* a seguir para uma revisão de equações do 1º grau.
KHAN Academy. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/brasil. Acesso em: 24 jun. 2022.

Educação financeira

Faça as atividades no caderno.

Aceita cartão?

De quantas maneiras se pode pagar uma compra a prazo? A diferença entre cartão de débito e cartão de crédito, as taxas cobradas e os cuidados ao usá-los são alguns dos assuntos tratados nesta seção.

CRÉDITO
0123 4567 8900 0000
1234
00\00
ANTÔNIA SOUZA LIMA

Africa Studio/Shutterstock

Cartão de crédito.

Junto a um colega, faça uma pesquisa e responda, no caderno, às questões propostas.
As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

I. Ao fazer uma compra, quais são as duas principais formas de pagamento parcelado?

II. Se alguém faz uma compra e paga com cartão de débito, em que prazo o valor da compra será descontado (debitado) de sua conta bancária?

III. Que documentos costumam ser pedidos pelos bancos para a concessão de cartão de crédito ou débito?

IV. As tarifas anuais dos cartões de crédito são iguais em todas as administradoras de cartões?

V. O que significa o limite concedido pela empresa de cartão de crédito ao emitir um cartão a uma pessoa?

VI. O que acontece quando uma pessoa quer usar o cartão de crédito para fazer uma compra cujo valor é superior a seu limite de crédito?

VII. No boleto mensal do cartão de crédito para pagamento, é possível identificar os termos “saldo a pagar” e “pagamento mínimo”. Qual é o significado deles?

VIII. Ao efetuar o “pagamento mínimo” do boleto do cartão de crédito, qual é o custo (despesa) extra que o pagador passa a ter?

IX. Que providências uma pessoa que perdeu o cartão de crédito deve tomar?

Junte-se a 3 colegas e debatam:

1. Quem faz uma compra com cartão de débito está fazendo uma compra à vista ou a prazo? À vista.
2. Existe alguma vantagem financeira em não pagar integralmente o saldo do cartão de crédito? Nenhuma.
3. Comparem as taxas de juros do “cheque especial” com as taxas do cartão de crédito.
A resposta depende de valores a serem pesquisados na ocasião e pode variar de instituição para instituição.

Orientações didáticas

Educação financeira

Na BNCC

Nesta seção é possível desenvolver o TCT *Educação Financeira*. Mobiliza com maior ênfase a **CG08** e a **CG10** ao permitir a compreensão de características importantes da vida humana moderna e o exercício da cidadania como parte das responsabilidades advindas desse entendimento.

O texto desta seção amplia as questões discutidas na abertura da Unidade. Pergunte aos estudantes quais formas de pagamento eles conhecem. Algumas formas de pagamento parcelado podem ser citadas pelos estudantes: crediário, cartão de crédito e *pix* parcelado ou *pix* garantido (nomes atribuídos pelo Banco Central). Fomente a discussão sobre compras parceladas normalmente haverá juros embutidos no valor das parcelas. Sobre o pagamento à vista, o valor é descontado no mesmo dia.

Para obter um cartão de crédito ou débito, são solicitados documentos como: RG, CPF, comprovante de residência e de renda atualizados. Nem todos os pedidos de cartão são aceitos. Um dos critérios utilizados para essa análise é ser “bom pagador”; algumas financeiras consultam se há dívidas pendentes antes de aprovar um cartão de crédito. Manter as contas em dia é uma maneira de ser avaliado como “bom pagador”.

Os usuários de cartão de crédito podem ter de pagar algumas tarifas, como: a) anuidade: tarifa cobrada para custear o serviço; b) emissão de segunda via no caso de perda ou roubo do cartão; c) saque de valores em espécie: é considerado um empréstimo e há cobrança de juros; d) pagamento de contas: ao pagar água, luz, telefone pelo cartão de crédito há uma cobrança de cada conta paga acrescidas de IOF; e) aumento emergencial do limite de crédito: quando o usuário percebe que o limite vai exceder, o pedido de aumento do limite com emergência tem um custo.

Comente que o limite do cartão de crédito é o valor disponível para ser utilizado em gastos com este cartão. Quando se utilizam compras parceladas, há 2 modos usados para definir o limite: a) o valor total da compra é diminuído do limite de crédito; b) apenas o valor da parcela é abatido do limite. Em particular, serviços que têm valores mais altos e são cobrados mensalmente, costumam abater do limite apenas o valor mensal para não comprometer todo o limite do cliente.

É recomendável sempre pagar o valor total da fatura. Algumas pessoas, por não conseguirem pagar o valor total, podem pagar o valor mínimo, que é calculado somando: a) 15% das compras mensais, 15% das compras em aberto do mês anterior, o total de juros, multas e IOF; b) possíveis parcelas da fatura. Nesse caso, são cobrados juros rotativos (em alguns casos podem chegar a 300% ao ano). O pagamento mínimo em meses consecutivos é proibido pelo Banco Central. Uma opção é fazer o parcelamento da fatura, que tem taxa fixa de juros, menor que o pagamento mínimo, com um prazo maior de pagamento, mas o limite fica bloqueado e será liberado conforme o pagamento das faturas.

No caso de perda ou furto do cartão, é necessário fazer o bloqueio imediato, pelo aplicativo do banco, por telefone ou pessoalmente na agência, e nenhuma senha deve ser fornecida a ninguém, nem mesmo a funcionários do banco. Deixe claro que, apesar de muitas, todas as regras fazem parte de um sistema complexo e o ideal é aprender a trabalhar com elas de modo a favorecer uma maior economia do usuário.

Orientações didáticas

Problemas com 2 incógnitas

Na BNCC

Neste capítulo são mobilizadas as habilidades: **EF08MA07**, ao associar uma equação linear do 1º grau com 2 incógnitas a uma reta no plano cartesiano; **EM08MA08**, ao trazer atividades de resolução e elaboração de problemas relacionados a contextos próximos dos estudantes, e que podem ser representados por sistemas de equações do 1º grau com 2 incógnitas, representadas no plano cartesiano como recurso. Nas atividades, há contextos que favorecem o trabalho com os TCTs *Educação Financeira* e *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*, e com a **CG03**, valorizando produção artístico-cultural.

Para a compreensão dos sistemas de equações, este tópico traz uma situação contextualizada sobre a quantidade de cadeiras para uma festa. Leia com os estudantes o texto, resolvendo o problema passo a passo.

Comente que se a equação que representa o total de cadeiras ($x + y = 80$) fosse a única, haveria infinitas possibilidades de resposta para os valores x e y (apresente alguns pares ordenados se considerar adequado). Porém, a situação-problema impõe restrição aos valores (a diferença entre as quantidades de cadeiras é 10). Uma estratégia possível é propor aos estudantes que resolvam por tentativa e erro, para assim, posteriormente, valorizarem o método operacional.

Outras estratégias para a resolução de problemas com esse conteúdo matemático incluem a organização de pares ordenados, a construção de gráficos em papel quadriculado ou *software* e a resolução dos sistemas de equações propriamente.

CAPÍTULO 12

Sistemas de equações

NA BNCC
EF08MA07
EF08MA08

Problemas com 2 incógnitas

A festa de Lucas

Laís é a mãe de Lucas. Para realizar a festa de aniversário de Lucas, ela alugou 20 mesas e 80 cadeiras. Como havia cadeiras brancas e pretas, Laís queria colocar 2 cadeiras de cada cor em cada mesa. Mas ela não conseguiu, porque havia 10 cadeiras brancas a mais do que pretas. Quantas eram as cadeiras de cada cor?

Vamos resolver esse problema empregando nossos conhecimentos de aritmética.

Como são 80 cadeiras, tirando as 10 brancas a mais do que as pretas, sobram 70 cadeiras igualmente divididas entre brancas e pretas.

Como $70 : 2 = 35$, há 35 cadeiras pretas e as brancas são: $35 + 10 = 45$.

Agora, vamos aprender a resolver esse mesmo problema algebricamente, empregando conhecimentos sobre equações.

Nesse problema, temos duas incógnitas:

x: quantidade de cadeiras brancas

y: quantidade de cadeiras pretas

Como são quantidades de cadeiras, x e y devem ser números inteiros positivos.

Para resolver o problema, precisamos montar duas equações:

- Laís alugou 80 cadeiras. Então:

$$x + y = 80 \quad ①$$

- Havia 10 cadeiras brancas a mais do que pretas. Então:

$$x = y + 10$$
$$x - y = 10 \quad ②$$

Com as equações **1** e **2**, formamos um **sistema de equações**, em que a chave substitui a conjunção **e**:

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

Para calcular o valor das incógnitas, podemos adicionar as equações membro a membro:

$$\begin{array}{r} x + y = 80 \\ + \quad x - y = 10 \\ \hline 2x + 0 = 90 \end{array}$$

Resolvemos a equação resultante:

$$2x = 90 \Rightarrow x = \frac{90}{2} \Rightarrow x = 45$$

⇒ significa "implica"

Sendo $x = 45$, agora podemos calcular y na equação **1**:

$$45 + y = 80 \Rightarrow y = 80 - 45 \Rightarrow y = 35$$

Portanto, são 45 cadeiras brancas e 35 pretas.

Obtido o valor de x, poderíamos calcular y também na equação **2**:

$$45 - y = 10 \Rightarrow 45 - 10 = y \Rightarrow 35 = y \Rightarrow y = 35$$

Método da adição

Resolvemos o sistema do problema anterior adicionando membro a membro as duas equações. Esse modo de resolver, chamado **método da adição**, é o mais adequado quando o coeficiente de uma das incógnitas na primeira equação é o oposto (simétrico) do coeficiente da mesma incógnita na segunda equação, pois, adicionando as equações, eliminamos uma incógnita. Note a seguir que *y* tem coeficientes opostos nas duas equações. Adicionando as equações, eliminamos *y*:

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

Existem outros métodos para resolver um sistema de equações, o método da substituição e o da comparação, que estudaremos adiante.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Nas atividades **1**, **2** e **4**, estabeleça as incógnitas, monte um sistema de equações e resolva-o no caderno.

1. Dois números têm soma 111 e diferença 33. Que números são esses? 72 e 39.

2. Em uma sala de aula há 32 estudantes. Subtraindo o número de meninas do dobro do número de meninos, o resultado é 7. Quantos são os meninos? E as meninas? 13 meninos; 19 meninas.

3. Resolva os sistemas pelo método da adição considerando o conjunto dos números racionais.

a) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - 2y = -11 \end{cases}$ $x = -1;\ y = 4.$

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 30 \\ 4x - 5y = 5 \end{cases}$ $x = 5;\ y = 3.$

c) $\begin{cases} -2a + 3b = 0 \\ 2a + 5b = 16 \end{cases}$ $a = 3;\ b = 2.$

4. Em um restaurante, trabalham garçons e garçonetes. Há 2 garçonetes a menos do que o triplo do número de garçons e 2 garçons a menos do que a metade do número de garçonetes. Quantos são os garçons? E as garçonetes? 6 garçons; 16 garçonetes.

Preparando um sistema para resolvê-lo pelo método da adição

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$ pelo método da adição.

Verificamos que os coeficientes de *x* (4 e 2) não são simétricos e que os coeficientes de *y* (3 e 5) também não são simétricos. Então, adicionar as equações não resolve, pois nem o *x* nem o *y* serão eliminados. Vamos acompanhar, então, como fazer para que uma das incógnitas possa ser eliminada.

- **1º passo:** Preparamos o sistema de modo que os coeficientes de uma das incógnitas fiquem simétricos. Como os coeficientes de *x* são 4 e 2, multiplicando o segundo por −2 eles ficarão simétricos: 4 e −4. Então, vamos multiplicar a segunda equação (isto é, multiplicar os dois membros da equação) por −2:

$$2x + 5y = -4 \xrightarrow{\cdot(-2)} -4x - 10y = 8$$

- **2º passo:** Adicionamos membro a membro as duas equações:

$$\begin{array}{r} 4x + 3y = 6 \\ + \quad -4x - 10y = 8 \\ \hline 0x + 7y = 14 \end{array}$$

Orientações didáticas

Método da adição

Na BNCC

Neste tópico é desenvolvida a habilidade **EM08MA08**, ao propor a resolução e elaboração de problemas representados por sistemas de equações do 1º grau com 2 incógnitas pelo método da adição. O contexto da questão **8** da seção *Atividades* favorece o desenvolvimento do TCT *Educação em Direitos Humanos*. Mobiliza, ainda, a **CG03** ao explorar o repertório cultural e destaca o protagonismo de Dina Di como precursora do movimento *rapper* feminino.

Este tópico requer o conhecimento prévio dos estudantes sobre o oposto (ou simétrico) de um número. Se necessário, retome com os estudantes esse conceito.

Atividades

As atividades **1**, **2** e **4** apresentam uma oportunidade para incentivar a sistematização do raciocínio, pois elas envolvem a decomposição de uma tarefa em passos logicamente encadeados, o que contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional. A primeira etapa da resolução de cada uma dessas atividades é escrever em linguagem algébrica a situação descrita na língua materna. Para isso, permita que os estudantes escrevam as equações na lousa e discutam sobre essas linguagens. Esses exercícios iniciais favorecem a aplicação do método da adição. Proponha que resolvam em duplas e apresentem suas respostas.

Já para a atividade **3**, sugira que resolvam os sistemas e troquem os cadernos para verificar os cálculos realizados pelos colegas e corrigi-los, caso seja necessário.

Proposta para o professor

O estudo a seguir investiga as metodologias para o ensino de sistemas de equações lineares associado ao uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs).

SCOLARO, Joelma K. *Sala de aula invertida*: ensinagem dos sistemas de equações polinomiais do 1º grau no oitavo ano do ensino fundamental. 104 f. Dissertação – Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, RS, 2020. Disponível em: http://tede.upf.br/jspui/handle/tede/1951. Acesso em: 24 jun. 2022.

Orientações didáticas

Atividades

Com relação às atividades **5** e **6**, incentive os estudantes para que verbalizem os cálculos feitos na resolução de cada sistema de equações. O estudante que consegue comunicar suas estratégias de cálculo consegue se envolver na atividade.

A resolução das atividades **7** a **9** pode ser dividida em 2 etapas: a montagem do sistema de equações de acordo com o enunciado e a realização dos cálculos. Sugira aos estudantes que resolvam um ou mais sistemas por tentativa e erro e, também, pelo método da adição, e posteriormente discutam as facilidades e dificuldades de cada método.

A atividade **8** traz contextos importantes para discussão. Reflita com os estudantes sobre os objetivos de atividades beneficentes, contribuindo assim para o convívio social mais solidário, e mobilizando o TCT *Educação em Direitos Humanos*. Em seguida, peça aos estudantes que leiam coletivamente em voz alta a letra do trecho de uma música do gênero *rap* (do inglês *rhythm and poetry*, em português ritmo e poesia) do grupo Racionais MC's e respondam o item **c**.

- **3º passo:** Resolvemos a equação obtida e encontramos o valor de y:

$$-7y = 14 \Rightarrow 7y = -14 \Rightarrow y = -\frac{14}{7} \Rightarrow y = -2$$

- **4º passo:** Substituímos o valor de y em uma das equações iniciais e obtemos x:

$$4x + 3y = 6 \Rightarrow 4x + 3(-2) = 6 \Rightarrow 4x - 6 = 6 \Rightarrow 4x = 6 + 6 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{4} \Rightarrow x = 3$$

Para conferir os cálculos, basta substituir as incógnitas nas equações iniciais pelos valores encontrados. Assim, se: $x = 3$ e $y = -2$, temos:

- na primeira equação:

$$4x + 3y = 6 \Rightarrow 4(3) + 3(-2) = 6 \Rightarrow 12 - 6 = 6 \text{ (verdadeiro)}$$

- na segunda equação:

$$2x + 5y = -4 \Rightarrow 2(3) + 5(-2) = -4 \Rightarrow 6 - 10 = -4 \text{ (verdadeiro)}$$

Portanto, a resposta é $x = 3$ e $y = -2$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

5. Atenda ao que se pede nos itens a seguir.

a) Explique no caderno, usando suas próprias palavras, como preparar um sistema de duas equações com duas incógnitas para ser resolvido pelo método da adição. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Resolva o sistema $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ 6x - 3y = 36 \end{cases}$ considerando o conjunto dos números racionais. $x = 2$; $y = -8$.

6. Prepare os sistemas a seguir e resolva-os pelo método da adição considerando o conjunto dos números racionais.

a) $\begin{cases} 3a + 2b = 6 \\ 5a - b = 10 \end{cases}$ $a = 2$; $b = 0$.

b) $\begin{cases} 7x + 6y = 24 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$ $x = 0$; $y = 4$.

7. Na festa de aniversário de Lucas, Laís precisou acomodar 73 convidados nas 20 mesas. Laura sugeriu que ficassem algumas mesas com 3 pessoas e outras com 4 pessoas, de modo que todas as mesas fossem utilizadas. Quantas mesas ficaram com 3 pessoas? E quantas ficaram com 4 pessoas? 7 mesas; 13 mesas.

8. Em um *show* de *rap* realizado em um estádio de futebol, com o objetivo de arrecadar fundos para as pessoas em situação de rua de uma comunidade, o ingresso da arquibancada custava R$ 10,00 e o da cadeira numerada, R$ 30,00.

a) Se 1 575 pessoas compareceram ao estádio e a renda foi de R$ 26.950,00, quantas assistiram ao *show* da arquibancada? 1 015 pessoas.

b) Com um colega, responda: Você conhece o gênero musical *rap*? Quais são as principais temáticas retratadas nas letras das músicas desse gênero? Resposta pessoal. Em geral, as temáticas retratam a realidade social dos jovens negros e pobres da periferia das médias e grandes cidades.

c) Leia o trecho da música a seguir e, depois, debata com os colegas e o professor: Do que trata essa música? Que mensagem ela transmite? Resposta pessoal.

Negro Drama

Negro drama
Entre o sucesso e a lama
Dinheiro, problemas
Inveja, luxo, fama

Negro drama
Cabelo crespo
E a pele escura
A ferida, a chaga
À procura da cura

Negro drama
Tenta ver
E não vê nada
A não ser uma estrela
Longe, meio ofuscada

Proposta para o professor

Nas leituras a seguir, encontramos algumas reflexões que visam aproximar a realidade juvenil às temáticas evocadas nas letras do *rap*, em particular, ao grupo Racionais MC's.

GONÇALVES, Maria das Graças. *Racionais MC's*: o discurso possível de uma juventude excluída. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

MARTINS, Raquel Mendonça. *O rap dos Racionais MC's em sala de aula como via de emancipação de jovens na periferia de São Paulo*: análises de oficinas musicais com ênfase no rap. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-10122015-112405/publico/corpocorrigido.pdf. Acesso em: 18 jul. 2022.

Sente o drama
O preço, a cobrança
No amor, no ódio
A insana vingança

[...]

O drama da cadeia e favela
Túmulo, sangue
Sirene, choros e velas

Passageiros do Brasil
São Paulo
Agonia que sobrevive
Em meio às honras e covardias

Periferias, vielas e cortiços
Você deve tá pensando
O que você tem a ver com isso

Desde o início
Por ouro e prata
Olha quem morre
Então veja você quem mata
Recebe o mérito, a farda
Que pratica o mal
Me ver
Pobre, preso ou morto
Já é cultural
[...]

RACIONAIS MC's. Negro Drama. *Nada como um dia após o outro*. São Paulo: Cosa Nostra, 2022.

Dina Di, nome artístico de Viviane Lopes Matias (1976-2010), foi uma das primeiras mulheres do Brasil a conquistar reconhecimento no *rap* nacional, tornando-se uma referência para o movimento e para outras mulheres. Alguns exemplos de mulheres ou grupos femininos de *rap* que se espelharam no trabalho de Dina Di são: Atitude Feminina, Negra Li, Kmila CDD, Isa Lu e Uni-Ka.

Para saber mais informações dela, visite: DINA DI. *In*: WIKIPEDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikipedia Fundation, 2021. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Dina_Di. Acesso em: 18 abr. 2022.

Reprodução/Acervo pessoal

Viviane Lopes Matias, conhecida por Dina Di. Foto de 2007.

9. Determine a fração equivalente a $\frac{6}{11}$ em que a soma do numerador com o denominador é 102. $\frac{36}{66}$

Preparando coeficientes nas duas equações

Vamos agora resolver o sistema: $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 6x + 5y = -4 \end{cases}$

- **1º passo:** Para conseguir que os coeficientes de *y* fiquem simétricos, multiplicamos a primeira equação por 5, que é o coeficiente de *y* na segunda equação:

$$4x + 3y = 6 \xrightarrow{\cdot 5} 20x + 15y = 30$$

A seguir, multiplicamos a segunda equação por -3, que é o oposto do coeficiente de *y* na primeira equação:

$$6x + 5y = -4 \xrightarrow{\cdot(-3)} -18x - 15y = 12$$

- **2º passo:** Adicionamos membro a membro as duas equações obtidas:

$$\begin{array}{r} 20x + 15y = 30 \\ + \quad -18x - 15y = 12 \\ \hline 2x + 0y = 42 \end{array}$$

Orientações didáticas

Atividades

O boxe de sugestão de acesso à internet traz informações sobre o papel da mulher no *rap* nacional. Debata com os estudantes sobre como esse gênero musical promove positivamente a imagem da mulher (por meio do trabalho de Dina Di e outras *rappers*), a cultura afro, o multiculturalismo e o combate ao racismo na sociedade. Tudo isso a partir de uma expressão artística de forte apelo entre os jovens.

Preparando coeficientes nas duas equações

Novamente é apresentada uma estratégia sistematizada de resolução. Essa não é a única maneira de preparar um sistema de equações para resolvê-lo pelo método da adição. Outras operações com os coeficientes das equações podem ser feitas de modo a eliminar uma incógnita.

Orientações didáticas

Atividades

Para a atividade **10**, proponha perguntas para que os estudantes discutam sobre as estratégias de cálculo que usarão para que os coeficientes fiquem opostos ou simétricos.

Já para as atividades **11** a **13**, proponha que os estudantes as resolvem em duplas. Depois, faça a leitura coletiva dos problemas e corrija-os na lousa resolvendo passo a passo.

Método da substituição

Na BNCC

Neste tópico é desenvolvida a habilidade **EM08MA08**, ao propor a resolução e elaboração de problemas representados por sistemas de equações do 1º grau com 2 incógnitas pelo método da substituição.

Até o momento, os sistemas de equações foram resolvidos pelo método da adição. Agora, este tópico apresenta o passo a passo da resolução de um sistema de equações pelo método da substituição.

Reforce com os estudantes a dica apresentada no Livro do Estudante, que sugere a verificação dos valores encontrados substituindo as incógnitas das equações por esses valores.

- **3º passo:** Resolvemos a equação obtida e encontramos o valor de x:

$$2x = 42 \Rightarrow x = \frac{42}{2} \Rightarrow x = 21$$

- **4º passo:** Substituímos o valor de x em uma das equações iniciais e obtemos y:

$$4x + 3y = 6 \Rightarrow 4 \cdot 21 + 3y = 6 \Rightarrow 84 + 3y = 6 \Rightarrow 3y = 6 - 84 \Rightarrow 3y = -78 \Rightarrow y = -\frac{78}{3} \Rightarrow y = -26$$

Conferindo a resposta na primeira equação:

$$4x + 3y = 6 \Rightarrow 4(21) + 3(-26) = 6 \Rightarrow 84 - 78 = 6 \text{ (verdadeiro)}$$

Conferindo na segunda equação:

$$6x + 5y = -4 \Rightarrow 6(21) + 5(-26) = -4 \Rightarrow 126 - 130 = -4 \text{ (verdadeiro)}$$

Portanto, a resposta é $x = 21$ e $y = -26$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

10. Prepare e resolva os sistemas pelo método da adição considerando o conjunto dos números racionais.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ 3x + 4y = 23 \end{cases}$ $x = 5$; $y = 2$.

b) $\begin{cases} 7x - 3y = -16 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$ $x = -1$; $y = 3$.

11. Os estudantes da turma de Talita plantarão árvores no próximo Dia da Árvore.
Se cada menina plantar 2 árvores e cada menino plantar 3, serão plantadas 73 árvores. Mas, se cada menina plantar 3 árvores e cada menino plantar 2, serão plantadas 77 árvores. Quantas meninas e quantos meninos há na turma? 17 meninas e 13 meninos.

12. No fim do expediente bancário de um dia, havia no caixa de um banco R$ 3.570,00 em cédulas de R$ 10,00 e de R$ 50,00. O triplo da quantidade de cédulas de R$ 10,00 era igual ao dobro da quantidade de cédulas de R$ 50,00. Quantas cédulas havia de cada valor? 42 cédulas de R$ 10,00 e 63 cédulas de R$ 50,00.

13. Em uma banca de frutas, Fátima comprou 2 melancias e 5 abacaxis, pagando no total R$ 60,00. Já Claudemir, que comprou 3 melancias e 4 abacaxis, gastou R$ 69,00. Quanto custou cada fruta? Melancia: R$ 15,00; abacaxi: R$ 6,00.

Método da substituição

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 7y = 29 \end{cases}$ empregando outra técnica: o **método da substituição**.

- **1º passo:** Escolhemos uma das equações e isolamos uma das incógnitas. Por exemplo, vamos isolar x na primeira equação:

$$x - 2y = 1 \Rightarrow x = 1 + 2y$$

- **2º passo:** Substituímos x na segunda equação pela expressão que acabamos de obter:

$$3x + 7y = 29 \Rightarrow 3 \cdot (1 + 2y) + 7y = 29$$

- **3º passo:** Resolvemos essa equação e encontramos o valor de y:

$$3 \cdot (1 + 2y) + 7y = 29 \Rightarrow 3 + 6y + 7y = 29 \Rightarrow 13y = 26 \Rightarrow y = \frac{26}{13} \Rightarrow y = 2$$

- **4º passo:** Substituímos y pelo seu valor na equação $x = 1 + 2y$ e calculamos o valor de x:

$$x = 1 + 2y \Rightarrow x = 1 + 2(2) \Rightarrow x = 1 + 4 \Rightarrow x = 5$$

> Antes de escrever a resposta, você sempre poderá conferir se está correta.
> Como no último passo usamos a primeira equação, que tal conferir usando a segunda?

A resposta é $x = 5$ e $y = 2$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

14. Resolva os sistemas pelo método da substituição considerando o conjunto dos números racionais.

a) $\begin{cases} x + y = 11 \\ 2x - 4y = 10 \end{cases}$ $x = 9$; $y = 2$.

b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 7x + 11y = 50 \end{cases}$ $x = 4$; $y = 2$.

c) $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ 3x + 6y = -15 \end{cases}$ $x = -1$; $y = -2$.

d) $\begin{cases} 3a + 4b = 20 \\ \frac{a}{3} = \frac{b}{4} \end{cases}$ $a = \frac{12}{5}$; $b = \frac{16}{5}$.

15. Resolva os seguintes problemas montando sistemas de equações:

a) Os irmãos Márcio e Marcelo ganham juntos R$ 2.920,00 por mês. Márcio recebe R$ 280,00 a mais que Marcelo. Qual é o salário de cada um? **a)** Márcio: R$ 1.600,00; Marcelo: R$ 1.320,00.

b) Eles colaboram com a despesa da casa: Márcio colabora com R$ 160,00 a mais que Marcelo. Além disso, o dobro da quantia dada por Márcio é o triplo da que Marcelo dá. Com quanto cada um deles colabora nas despesas? Márcio: R$ 480,00; Marcelo: R$ 320,00.

Método da comparação

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x + 6y = 1 \\ 2x - 7y = 40 \end{cases}$ empregando o **método da comparação**.

- **1º passo:** Escolhemos uma incógnita (x, por exemplo) e a isolamos no primeiro membro em cada equação:

$$\begin{cases} x + 6y = 1 \Rightarrow x = 1 - 6y \\ 2x - 7y = 40 \Rightarrow 2x = 40 + 7y \Rightarrow x = \frac{40 + 7y}{2} \end{cases}$$

- **2º passo:** Igualamos as duas expressões obtidas para x e resolvemos essa nova equação calculando o valor de y:

$$1 - 6y = \frac{40 + 7y}{2} \Rightarrow 2 - 12y = 40 + 7y \Rightarrow -12y - 7y = 40 - 2 \Rightarrow -19y = 38 \Rightarrow y = -\frac{38}{19} \Rightarrow y = -2$$

- **3º passo:** Substituímos y pelo seu valor em uma das expressões obtidas para x no 1º passo:

$$x = 1 - 6y = 1 - 6(-2) = 1 + 12 \Rightarrow x = 13$$

Podemos conferir calculando x na outra equação:

$$x = \frac{40 + 7y}{2} = \frac{40 + 7(-2)}{2} = \frac{40 - 14}{2} = \frac{26}{2} \Rightarrow x = 13$$

Portanto, a resposta é $x = 13$ e $y = -2$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

16. Resolva os sistemas a seguir pelo método da comparação considerando o conjunto dos números racionais.

a) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -3x + 29 \end{cases}$ $x = 6$; $y = 11$.

b) $\begin{cases} y = -x - 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ $x = -3$; $y = 2$.

c) $\begin{cases} 2x = 5y \\ 7x - 6y = 46 \end{cases}$ $x = 10$; $y = 4$.

d) $\begin{cases} 3x + 6y = 8 \\ 4x + y = 13 \end{cases}$ $x = \frac{10}{3}$; $y = -\frac{1}{3}$.

Orientações didáticas

Atividades

Antes de propor a atividade **14**, converse com os estudantes sobre as operações no conjunto dos números racionais, um conhecimento prévio necessário para resolver os sistemas de equações dessa atividade. Proponha que verbalizem as dúvidas quanto aos cálculos apresentados no método da substituição.

Na atividade **15**, proponha a leitura coletiva do enunciado e retome, se necessário, os significados de dobro e triplo. Após os estudantes concluírem a resolução, relembre-os de seguir a dica dada anteriormente para substituir o par ordenado nas equações e assim verificar se os valores tornam as igualdades verdadeiras.

Método da comparação

Na BNCC

Neste tópico é desenvolvida a habilidade **EM08MA08**, ao propor a resolução e elaboração de problemas representados por sistemas de equações do 1º grau com 2 incógnitas pelo método da comparação.

Neste tópico é apresentado o último dos principais métodos de resolução de sistemas de equações, o da comparação. A partir desse momento, os estudantes terão a oportunidade de cada vez mais irem escolhendo a estratégia de resolução mais adequada a cada situação, levando em conta a facilidade, comodidade e eficiência na resolução.

Orientações didáticas

Atividades

Nas atividades **16** a **18** verifique se os estudantes compreendem as operações inversas, um conhecimento prévio necessário nos cálculos para isolar a incógnita. Retome este assunto se considerar necessário.

Proponha a resolução das atividades **19** a **23** em duplas. Inicialmente, converse com os estudantes sobre a compreensão dos enunciados até que não haja dúvidas. Caso identifique dificuldades, crie perguntas para os estudantes darem continuidade na resolução com autonomia. Ao finalizarem, solicite que as duplas compartilhem com a turma os sistemas montados e as resoluções.

Para as atividades **24** e **25**, os estudantes têm a possibilidade de desenvolver a criatividade e sistematizar seu conhecimento ao elaborar problemas, além de desenvolver o pensamento computacional. Oriente-os a ler os problemas já resolvidos como inspiração.

Já para a atividade **26** é preciso ter porcentagens como conhecimento prévio necessário. Se for preciso, retome esse conteúdo e aplique exercícios complementares. Essa atividade está relacionada com o tema da abertura desta Unidade sobre trabalho e educação fiscal. Se julgar pertinente, retome a discussão.

24. Exemplo de resposta: Em um estacionamento há carros e motos, em um total de 18 veículos e 60 rodas. Quantos carros e quantas motos há no local? Resposta: 12 carros e 6 motos.

Faça as atividades no caderno.

17. A fração $\frac{x}{y}$ é equivalente a $\frac{17}{11}$. Calcule x e y sabendo que $2x - 3y = 6$. $x = 102$; $y = 66$.

18. Resolva os sistemas a seguir pelo método que achar melhor considerando o conjunto dos números racionais.

a) $\begin{cases} 2x + y = \frac{1}{3} \\ 3x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$ $x = \frac{1}{6}$; $y = 0$.

b) $\begin{cases} x + y = -2 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$ $x = 10$; $y = -12$.

25. Exemplo de resposta: Um número supera outro em 200 unidades. Sabe-se que o quádruplo do maior adicionado ao quíntuplo do menor resulta em 3 500. Quais são esses números? Resposta: O maior número é 500 e o menor, 300.

19. Neste mês, uma montadora produziu 787 automóveis dos modelos clássico e esporte. A produção do modelo esporte superou em 51 unidades a produção do modelo clássico. Quantos automóveis de cada tipo foram produzidos? 419 do modelo esporte e 368 do modelo clássico.

20. Em um supermercado, foram vendidas 228 caixas de duas marcas de sabão em pó. O sabão Lava Azul teve o triplo de vendas do que o Lava Verde. Quantas caixas de cada marca foram vendidas? 171 caixas de Lava Azul e 57 caixas de Lava Verde.

21. Determine:

a) dois números cuja soma é 110 e cuja diferença é 30. 70 e 40.

b) uma fração equivalente a $\frac{11}{7}$ cuja diferença entre o numerador e o denominador seja 36. $\frac{99}{63}$

c) uma fração equivalente a $\frac{3}{5}$ cuja soma de seus termos seja 152. $\frac{57}{95}$

22. Em um sítio há cavalos e galinhas. No total, há 97 cabeças e 264 patas. Quantos são os cavalos e as galinhas? 35 cavalos e 62 galinhas.

23. Daqui a 10 anos, Válter terá o quádruplo da idade do filho Raul; daqui a 16 anos, o triplo. Quantos anos Válter tem hoje? E Raul? 38 anos; 2 anos.

24. Elabore um problema que possa ser resolvido por um sistema de equações e depois o troque com um colega para que cada um resolva o problema que o outro fez.

25. Elabore um problema que possa ser resolvido pelo sistema a seguir e, depois, troque-o com um colega para que cada um resolva o problema que o outro fez.

$$\begin{cases} x = y + 200 \\ 4x + 5y = 3\,500 \end{cases}$$

26. Retome o que estudou na abertura desta Unidade e resolva este problema: Analise o holerite de Isabela. Sabendo que ela é mãe de 2 filhos menores de 18 anos, calcule os valores de A, B e C. Qual é o salário líquido de Isabela? A = R$ 179,82; B = R$ 0,00; C = R$ 609,82; salário líquido de Isabela: R$ 1.590,18.

EMPREGADOR Nome: XYZ LTDA. Endereço: Rua das Parábolas, 314 CNPJ: 00.000.000/0001-00			RECIBO DE PAGAMENTO Mês/ano Dezembro 2021	
31415 Isabela Silva			31415 - 10	VENDEDOR(A)
Cód.	**Descrição**	**Referência**	**Proventos**	**Descontos**
001 003 051 052 123 151	SALÁRIO BRUTO COMISSÃO INSS IRPF VALE-TRANSPORTE VALE-ALIMENTAÇÃO	 9%	R$ 2.000,00 R$ 200,00	 A B R$ 180,00 R$ 250,00
			Vencimentos R$ 2.200,00	**Total de descontos** R$ C
			Valor a receber: **R$**	

Interpretação geométrica

Até aqui, resolvemos sistemas com duas incógnitas usando diferentes processos algébricos. Agora, vamos iniciar o estudo da representação geométrica de um sistema de equações com duas incógnitas.

Equação linear a duas incógnitas

Acompanhe o exemplo:

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

- **1º passo:** Estabelecemos as incógnitas;

  x: o primeiro número
  y: o segundo número

  e montamos a equação:

  $$3x + 2y = 18$$

  Uma equação assim é denominada **equação linear a duas incógnitas**.

> Uma **equação linear a duas incógnitas** x e y é toda equação na forma $ax + by = c$, em que a, b e c são números conhecidos.

- **2º passo:** Vamos descobrir os números.

  Trocando x por 4 e y por 3, temos:

  $$3(4) + 2(3) = 18$$

  que é uma sentença verdadeira. Por isso, dizemos que o par de números $(4, 3)$, em que o primeiro número indica o valor de x e o segundo indica o valor de y, é uma **solução** da equação.

Note que o par de números é indicado entre parênteses e os números são separados por vírgula, ou, se necessário, por ponto e vírgula, como em $(3{,}25; 4)$. Além disso, o primeiro número anotado é o que vai no lugar da primeira incógnita, x, e o segundo número é o que vai no lugar da segunda incógnita, y. Por isso, dizemos que é um **par ordenado** de números.

Continuando:

- O par $(2, 6)$ é solução dessa equação?

  Substituindo x por 2 e y por 6, temos:

  $$3(2) + 2(6) = 18 \text{ (verdadeiro)}$$

  Portanto, $(2, 6)$ é outra solução da equação.

- O par $(6, 2)$ é solução?

  Agora substituímos x por 6 e y por 2:

  $$3(6) + 2(2) = 18 \text{ (falso)}$$

  Então, $(6, 2)$ não é solução da equação.

Orientações didáticas

Interpretação geométrica

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA07**, ao associar uma equação do 1º grau com 2 incógnitas a uma reta no plano cartesiano, fazendo assim a interpretação geométrica de uma situação. Também, ao trabalhar com diferentes campos da Matemática, mobiliza a **CEMAT03**. Ao explorar o trabalho de René Descartes, mobiliza-se ainda a **CEMAT01**.

Este tópico inicia com a exploração de uma equação linear com 2 incógnitas, substituindo-as por valores para verificar se tornam a igualdade verdadeira. É importante que os estudantes percebam que a cada valor substituído em x, resulta um valor para y e vice-versa.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **27**, oriente os estudantes a substituir os valores na equação e verificar para quais pares ordenados a igualdade é verdadeira.

Nas atividades **28** e **29**, há muitas possibilidades de resposta, então, oriente os estudantes a escolher o valor de uma das incógnitas e calcular o valor da outra.

As atividades **30** e **31** requerem que o estudante compreenda a linguagem algébrica para efetuar as substituições. Incentive-os a verbalizar as dúvidas, se houver.

Na atividade **32**, sugira aos estudantes que façam os cálculos mentalmente quando se sentirem confiantes para isso.

Na atividade **33**, reforce o fato de que, sabendo o valor de uma das incógnitas e substituindo-a na equação, obtém-se o valor da outra incógnita.

Atribuindo um valor numérico para x na equação, ela passa a ser uma equação em y. Daí, calculando y, podemos formar um par que é solução da equação inicial. Acompanhe:

- para $x = 0$:

$$3(0) + 2y = 18 \Rightarrow 2y = 18 \Rightarrow y = 9$$

O par $(0, 9)$ é solução da equação.

- para $x = 1$:

$$3(1) + 2y = 18 \Rightarrow 2y = 15 \Rightarrow y = \frac{15}{2}$$

O par $\left(1, \frac{15}{2}\right)$ é solução da equação.

- para $x = \frac{10}{3}$:

$$3\left(\frac{10}{3}\right) + 2y = 18 \Rightarrow 2y = 8 \Rightarrow y = 4$$

O par $\left(\frac{10}{3}, 4\right)$ também é solução da equação.

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

E assim por diante. Como podemos escolher para x uma infinidade de valores, a equação possui infinitas soluções.

Solução de uma equação linear $ax + by = c$ é todo par ordenado de números (α, β) tal que a sentença $a\alpha + b\beta = c$ é verdadeira. Sendo $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, a equação admite infinitas soluções.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

27. Quais dos pares ordenados a seguir são soluções da equação $3x - 2y = 1$? $(1, 1)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

$(1, 1)$ $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ $(-1, -1)$ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

28. Determine quatro pares ordenados que sejam soluções da equação $x + 2y = 12$. **28.** Há várias possibilidades. $(12, 0)$, $\left(1, \frac{11}{2}\right)$, $(2, 5)$, $\left(3, \frac{9}{2}\right)$ são exemplos.

29. Dê um exemplo de equação linear a duas incógnitas. Depois, dê três exemplos de pares ordenados que são soluções da equação e três que não são. **29.** Exemplo de resposta: $3x + 2y = 16$; pares ordenados que são soluções: $(0, 8)$, $(2, 5)$ e $(6, -1)$; pares ordenados que não são soluções: $(0, 0)$, $(5, 2)$ e $(8, -1)$.

30. Dada a equação linear $3x - 4y =$ ////////////////, descubra o segundo membro dessa equação sabendo que o par $(17, -14)$ é uma solução da equação. 107

31. Dada a equação $-2x + 7y = 42$, encontre:

a) o valor satisfatório de y para $x = 0$; $y = 6$

b) o valor satisfatório de x para $y = 0$; $x = -21$

c) três pares ordenados que são soluções dessa equação. Exemplo de resposta: $\left(2, \frac{46}{7}\right)$; $(-14, 2)$; $\left(3, \frac{48}{7}\right)$.

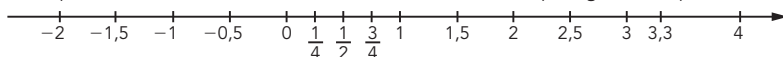
32. Escreva as equações no caderno e indique, para cada uma delas, o par ordenado que é uma solução. A-II; B-III; C-IV; D-I.

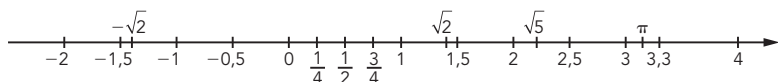
A. $x + y = 9$ **B.** $x - y = 5$ **C.** $2x + 3y = 1$ **D.** $x - 2y = 0$

I. $(4, 2)$ **II.** $(11, -2)$ **III.** $\left(\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **IV.** $(5, -3)$ **V.** $(0, 1)$

33. O par ordenado $(x, 3)$ é solução da equação $3x + 4y = 11$. Qual é o valor de x? $x = -\frac{1}{3}$

Representação geométrica de pares ordenados

Sabemos representar os números racionais na reta numérica. Verifique alguns exemplos:

Banco de imagens/Arquivo da editora

Existem números não racionais, por exemplo, os números $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e π, cujos valores aproximados por duas casas decimais são, respectivamente, −1,41; 1,41; 2,24 e 3,14. Esses números, e infinitos outros números, também podem ser representados aproximadamente na reta numérica:

Banco de imagens/Arquivo da editora

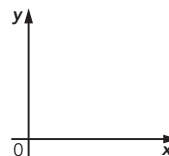
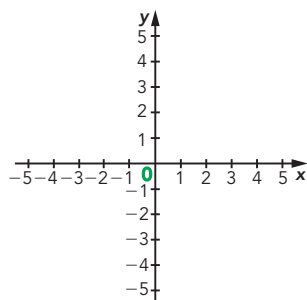
Todos os números representados na reta numérica são chamados **números reais** e vamos estudá-los no 9º ano.

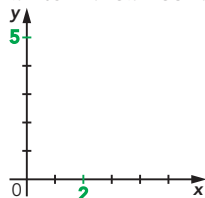
Como fazemos para representar um par ordenado?

Para responder a essa pergunta, vamos construir um sistema de eixos.

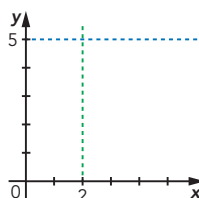
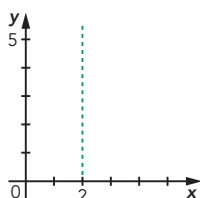
- Consideramos duas retas perpendiculares *x* e *y*.
- Chamamos de *O* (origem) a intersecção dessas duas retas.
- O ponto *O* vai representar o número zero, tanto em *x* quanto em *y*, e a partir dele vamos marcar os inteiros, como mostra a figura.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Atenção: Devemos usar a mesma unidade de medida tanto na reta *x* quanto na reta *y*.

Banco de imagens/Arquivo da editora

- Dado o par ordenado (2, 5), representamos 2 na reta *x* e 5 na reta *y*:

Banco de imagens/Arquivo da editora

- Pelo ponto 2 traçamos uma reta paralela à reta *y*:

- Pelo ponto 5 traçamos uma reta paralela à reta *x*:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Representação geométrica de pares ordenados

O texto apresentado neste tópico permite abordar a História da Matemática, envolvendo algumas curiosidades sobre a vida de René Descartes, e assim mobilizando a **CEMAT01**. Aproveite o contexto para explorar com os estudantes a importância de verificar a veracidade dos fatos consultando fontes científicas confiáveis.

Orientações didáticas

Atividades

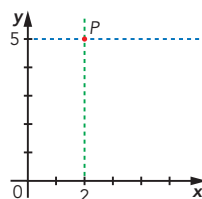
A atividade **34** envolve a identificação do par ordenado que representa alguns pontos no sistema cartesiano, sendo esse um conhecimento prévio para que os estudantes compreendam a representação geométrica dos sistemas de equações.

Corrija a atividade **35**, sugerindo que alguns estudantes construam o sistema cartesiano na lousa e indiquem os pontos representados pelos pares ordenados. Mostre que o par ordenado (2, 3), por exemplo, é diferente do par (3, 2). Verifique se os estudantes invertem as coordenadas no momento de localizar o ponto.

Para as atividades **36** e **37**, faça uso de papel quadriculado. Organize os estudantes em duplas se considerar adequado. Na atividade **37**, uma possibilidade é construir a reta com 2 pontos e localizar outros pares ordenados que pertencem à reta. Sugira aos estudantes que apresentem as estratégias de resolução.

- A intersecção das retas assim traçadas é o ponto P, que representa o par ordenado $(2, 5)$.

y
5
P
0
2
x

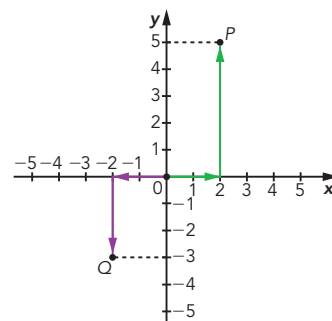
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

O primeiro termo do par ordenado, 2, é a **abscissa** de P. O segundo termo do par ordenado, 5, é a **ordenada** de P. Os números 2 e 5 são as **coordenadas** de P.

A partir da origem O, 2 unidades para a direita e 5 para cima, está o ponto P, que representa o par $(2, 5)$.

Agora, no sistema de eixos, que "caminho" podemos percorrer a partir da origem se quisermos representar o par ordenado $(-2, -3)$?

Como o primeiro elemento do par (a abscissa) é -2, "caminhamos" 2 unidades para a esquerda e, como o segundo elemento do par (a ordenada) é -3, "caminhamos" 3 unidades para baixo, paralelamente ao eixo y. O ponto a que chegamos, Q, representa o par $(-2, -3)$.

A esse sistema de eixos chamamos **sistema cartesiano**, em homenagem ao filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650). Descartes formou-se em Direito, mas não fez carreira nessa área. Parece que o gosto dele pela Matemática aflorou quando viu um cartaz com um problema de Geometria, proposto como desafio, afixado em uma árvore de uma praça. No dia seguinte já tinha resolvido o problema. Você vai saber mais informações sobre ele na seção *Na História*, ao final deste capítulo.

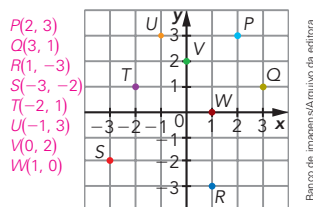
y
5
4
3
2
1
P
−5 −4 −3 −2 −1
0
1 2 3 4 5
x
−1
−2
−3
−4
−5
Q

Atividades

Faça as atividades no caderno.

34. No sistema cartesiano, estão indicados os pontos P, Q, R, S, T, U, V e W. Que par ordenado é representado em cada ponto?

$P(2, 3)$
$Q(3, 1)$
$R(1, -3)$
$S(-3, -2)$
$T(-2, 1)$
$U(-1, 3)$
$V(0, 2)$
$W(1, 0)$

U P V T Q W S R
y x
3 2 1 0 −1 −2 −3
−3 −2 −1 1 2 3

Banco de imagens/Arquivo da editora

35. Desenhe, no caderno, um sistema cartesiano como o da atividade anterior e represente nele os seguintes pares ordenados: A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

- $A(4, 1)$
- $B(1, 3)$
- $C(0, 1)$
- $D(-2, 2)$
- $E(-3, 0)$
- $F(-2, -1)$
- $G(0, -3)$
- $H(2, -2)$
- $I(3, 0)$
- $J(-3, 1)$

36. Há uma barraca de frutas em cada um dos pontos de coordenadas $(1, 3)$, $(-3, -3)$, $(1, -3)$, $(0, 0)$. Desenhe, no caderno, uma malha com os eixos x e y, represente nela os pares ordenados e responda: Quem está mais perto de uma barraca de frutas:

a) Helena, que está no ponto $(1, 4)$, ou Antônio, que está no ponto $(-4, 1)$? Helena.

b) Sérgio, que está no ponto $(-2, -2)$, ou Lúcia, que está no ponto $(3, 0)$? Sérgio.

37. A equação linear $x + y = 3$ tem uma infinidade de soluções. **a)** A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Descubra seis ou mais soluções da equação linear $x + y = 3$ e represente-as em um sistema cartesiano no caderno.

b) Se fosse possível representar todas as soluções em um sistema cartesiano, que figura você acha que formariam? Resposta pessoal.

O gráfico da relação $y = k \cdot x$

Já estudamos que, quando duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, as razões $\frac{y}{x}$ entre seus valores positivos correspondentes são sempre iguais a uma constante k. Dessa maneira, temos:

$$\frac{y}{x} = k, \text{ logo } y = k \cdot x$$

Por exemplo, considerando $k = 2$, temos a relação $y = 2x$.

Verifique, no quadro a seguir, pares de valores (x, y), com $y = 2x$, e a representação deles no sistema cartesiano (Figura **1**).

x	y
0	0
1	2
1,5	3
2	4
2,5	5
3	6
3,25	6,5

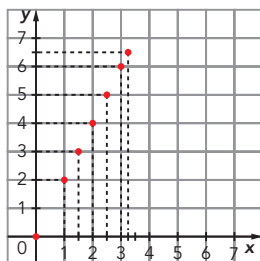



Figura 1

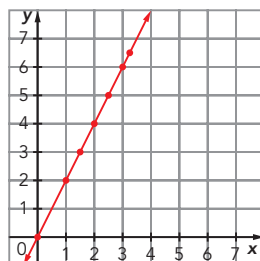



Figura 2

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Na relação $y = 2x$, quando x aumenta uma unidade, y aumenta duas; quando x aumenta duas unidades, y aumenta quatro; quando x aumenta meia unidade, y aumenta uma; quando x aumenta um quarto de unidade, y aumenta meia unidade. Por isso, os pontos são alinhados, ou seja, eles pertencem a uma mesma reta (Figura **2**).

Como há uma infinidade de valores de x, se pudéssemos representar todos os pares ordenados (x, y), com $y = 2x$, os pontos formariam a reta desenhada. Dizemos que essa reta é o **gráfico** da relação $y = 2x$.

Atividades

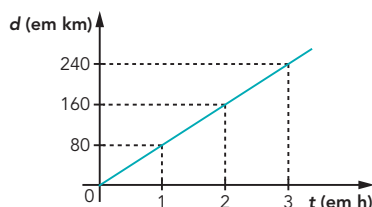
Faça as atividades no caderno.

38. Construa, no caderno, o gráfico de cada relação. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) $y = 3x$

b) $y = \frac{1}{2}x$

39. No sistema cartesiano a seguir, está representada a medida d de distância (em quilômetros) percorrida por um automóvel, a velocidade constante, em função da medida t de tempo (em horas).

d (em km) — 240, 160, 80 — 0 — 1, 2, 3 — t (em h)

Banco de imagens/Arquivo da editora

Analise e responda no caderno:

a) Qual é a medida de distância percorrida em 3 horas? 240 km

b) Qual é a medida de distância percorrida em 45 minutos? 60 km

Orientações didáticas

O gráfico da relação $y = k \cdot x$

A sugestão de resolução da atividade **37** permitiu aos estudantes a descoberta de um conceito antes de sua sistematização, que ocorrerá neste tópico.

Atividades

Para a atividade **38**, faça a construção dos gráficos em papel quadriculado ou utilizando um *software* como o GeoGebra. Ainda é possível usar as duas estratégias recomendadas e comparar os resultados. Se decidir usá-las, comece pela construção manual no papel quadriculado.

Ao corrigir a atividade **39**, converse sobre as grandezas tempo, distância e velocidade e as unidades de medida mais utilizadas.

Proposta para o estudante

Se julgar conveniente, sugira aos estudantes que acessem o *link* a seguir para participar do curso sobre o uso do GeoGebra.

OGEOGEBRA. Disponível em: https://ogeogebra.com.br/. Acesso em: 24 jun. 2022.

Orientações didáticas

Gráfico da equação $ax + by = c$

Este tópico relaciona diretamente a ideia de que um sistema de equações fornece um conjunto de soluções representado por pontos que pertencem a uma reta do tipo $ax + by = c$.

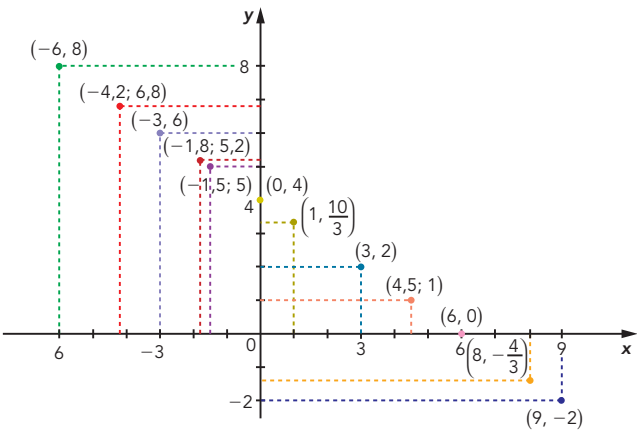
Gráfico da equação $ax + by = c$

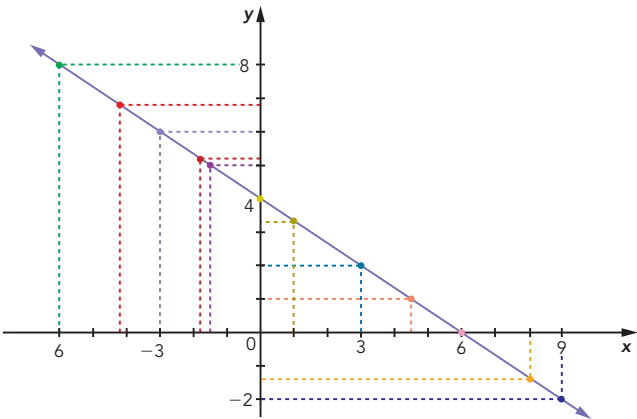
Analise, nos quadros, alguns dos pares ordenados (x, y) que são soluções da equação $2x + 3y = 12$.

x	y	
6	0	$\longrightarrow 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 12$
0	4	$\longrightarrow 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$
1	$\frac{10}{3}$	$\longrightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{10}{3} = 12$
9	-2	$\longrightarrow 2 \cdot 9 + 3 \cdot (-2) = 12$
-3	6	$\longrightarrow 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 6 = 12$
-6	8	$\longrightarrow 2 \cdot (-6) + 3 \cdot 8 = 12$

x	y	
3	2	$\longrightarrow 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$
4,5	1	$\longrightarrow 2 \cdot 4{,}5 + 3 \cdot 1 = 12$
8	$-\frac{4}{3}$	$\longrightarrow 2 \cdot 8 + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = 12$
$-1{,}8$	5,2	$\longrightarrow 2 \cdot (-1{,}8) + 3 \cdot (5{,}2) = 12$
$-4{,}2$	6,8	$\longrightarrow 2 \cdot (-4{,}2) + 3 \cdot 6{,}8 = 12$
$-1{,}5$	5	$\longrightarrow 2 \cdot (-1{,}5) + 3 \cdot 5 = 12$

Vamos representar cada um desses pares ordenados por um ponto em um sistema cartesiano.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Perceba que esses pontos estão alinhados, isto é, pertencem todos à mesma reta:

Banco de imagens/Arquivo da editora

A reta que contém os pontos representativos das soluções da equação $2x + 3y = 12$ é chamada **gráfico da equação**. Todos os pontos do gráfico representam pares ordenados que são soluções da equação.

Esse fato é verdadeiro para toda equação $ax + by = c$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

> O **gráfico da equação** $ax + by = c$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, é uma reta. Todo ponto dessa reta representa um par ordenado que é solução da equação. Toda solução da equação é representada em um ponto dessa reta.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

40. O gráfico dessa equação $3x + 4y = 12$ é uma reta.

a) Para traçar uma reta, é preciso conhecer, pelo menos, quantos de seus pontos? Dois.

b) Construa, no caderno, o gráfico dessa equação. Obtenha dois pontos: o primeiro, substituindo x por 0, e o segundo, substituindo y por 0. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

41. Construa, no caderno, a reta que é o gráfico da equação $x + 2y = 4$. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

42. São dadas as equações $x + y = 4$ e $2x - y = 2$. **a)** A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Desenhe, no caderno, em um mesmo sistema cartesiano, os gráficos dessas equações.

b) Quais são as coordenadas do ponto comum aos gráficos desenhados? (2, 2)

Sistema de duas equações lineares a duas incógnitas

Já estudamos como resolver o sistema: $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$

A única solução para esse sistema é $x = 5$ e $y = 3$, ou seja, é o par ordenado $(5, 3)$.

Façamos os gráficos das duas equações em um mesmo sistema cartesiano.

- $x + y = 8$

x	y
8	0
0	8

$\rightarrow 8 + 0 = 8$

$\rightarrow 0 + 8 = 8$

gráfico: reta r

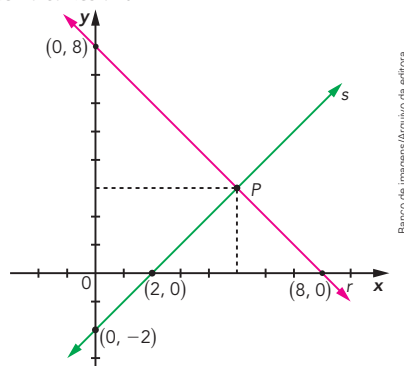
- $x - y = 2$

x	y
2	0
0	−2

$\rightarrow 2 - 0 = 2$

$\rightarrow 0 - (-2) = 2$

gráfico: reta s

Banco de imagens/Arquivo da editora

Verificamos que as duas retas são concorrentes e que o ponto de intersecção P tem coordenadas $(5, 3)$. Esse par ordenado é a solução desse sistema de equações.

> Dado um sistema de duas equações lineares simultâneas a duas incógnitas, chamamos **solução do sistema** todo par ordenado de números que seja solução simultaneamente de ambas as equações do sistema. Quando as equações são representadas por duas retas, a solução do sistema, quando existir, fica representada pelo ponto que pertence a ambas as retas.

Orientações didáticas

Atividades

Assim como proposto para a atividade **38**, os gráficos das atividades de **40** a **42** podem ser construídos em papel quadriculado ou utilizando um *software* como o GeoGebra. Ainda é possível usar as duas estratégias recomendadas e comparar os resultados. Se decidir usá-las, comece pela construção manual no papel quadriculado.

Sistema de duas equações lineares a duas incógnitas

Neste tópico são construídos, no mesmo sistema cartesiano, os gráficos que representam as equações de um sistema de equações. Desse modo, pode-se identificar visualmente se o sistema tem uma solução, infinitas soluções ou não tem solução.

Orientações didáticas

Atividades

Nas atividades **43** e **44**, os estudantes podem responder por tentativa e erro, representar geometricamente ou escolher um dos métodos de cálculo.

Para as atividades **45** a **47**, converse sobre uma reta ser definida por dois pontos, sugira que organizem os quadros de cada reta com dois pontos cada uma e gerem o gráfico de modo que o ponto comum seja a resposta da questão.

Sistemas impossíveis e sistemas indeterminados

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades: **EF08MA07**, ao associar as equações do 1º grau com 2 incógnitas de um sistema de equações a retas no plano cartesiano; **EM08MA08**, ao propor a resolução de problemas representados por sistemas de equações do 1º grau com 2 incógnitas pelos métodos estudados.

Este tópico estende o conteúdo anterior, ampliando a resolução de sistemas de equações e classificando-os. A classificação é relevante como amparo ao desenvolvimento de uma resolução, pois justifica de maneira completa a solução.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

43. Verifique se algum dos pares ordenados $(1, -3)$, $(3, 1)$, $(2, 3)$ é solução do sistema. $(2, 3)$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 6x - y = 9 \end{cases}$$

44. De qual dos sistemas a seguir o par ordenado $(7, -5)$ é solução? Alternativa **b**.

a) $\begin{cases} 7x + 5y = 24 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 12 \\ 2x + y = 19 \end{cases}$

45. No caderno, determine graficamente e dê as coordenadas do ponto que representa a solução dos sistemas a seguir.

a) $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ $(7, 4)$

b) $\begin{cases} 2x - y = -8 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ $(-2, -4)$

c) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x - 5 \end{cases}$ $(-2, -3)$

46. a) A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

46. Faça, no caderno, o que se pede em cada item.

a) Represente, em um mesmo sistema cartesiano, os gráficos das equações do sistema: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 5x - 5y = 4 \end{cases}$.

b) Pelo gráfico, podemos descobrir com precisão qual é a solução do sistema? Não.

c) Resolva o sistema por um método algébrico (substituição ou adição). $x = 2{,}9$; $y = 2{,}1$.

47. Quais são as coordenadas do ponto de intersecção das retas que são os gráficos das equações $3x + 4y = 12$ e $2x - y = 4$? $x = \frac{28}{11}$; $y = \frac{12}{11}$

Sistemas impossíveis e sistemas indeterminados

Até agora, estudamos sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas que tinham uma única solução, isto é, que eram satisfeitos por um só par ordenado (x, y).

> Um sistema de equações lineares que tem uma única solução é um **sistema determinado**.

Agora, analise este sistema: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por 3, obtemos:

$$3x + 3y = 3$$

Como a segunda equação é $3x + 3y = 2$, temos uma impossibilidade: $3x + 3y$ não pode ser simultaneamente igual a 3 e igual a 2.

Aplicando o método da adição, também chegamos a uma impossibilidade. Acompanhe:

$$\begin{cases} x + y = 1 \xrightarrow{\cdot(-3)} -3x - 3y = -3 \\ 3x + 3y = 2 \longrightarrow 3x + 3y = 2 \end{cases} \quad (+)$$

$$0x + 0y = -1$$

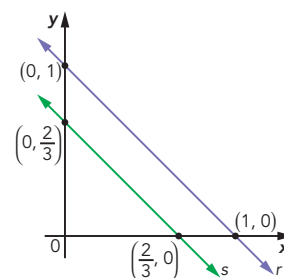
(impossível)

Representando graficamente as duas equações:

- $x + y = 1 \rightarrow$ reta r

x	y
0	1
1	0

- $3x + 3y = 2 \rightarrow$ reta s

x	y
0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	0

Obtemos duas retas paralelas. Elas não têm ponto comum.
Portanto, o sistema não tem solução.

Um sistema de equações lineares que não tem solução é um **sistema impossível**.

Já no sistema: $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$, multiplicando a segunda equação por 6, obtemos:

$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{y}{3} = 6 \cdot 1$$

$$3x + 2y = 6$$

que é exatamente igual à primeira equação.

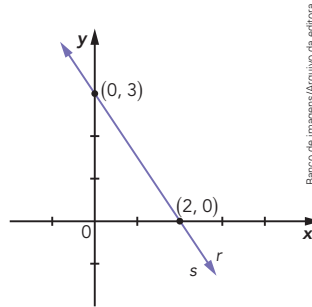
Assim, toda solução da primeira equação também será solução da segunda equação.

Os gráficos das duas equações são retas coincidentes, isto é, as duas equações são representadas pela mesma reta. Verifique:

- $3x + 2y = 6 \rightarrow$ reta r

x	y
0	3
2	0

- $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \rightarrow$ reta s

x	y
0	3
2	0

As retas r e s são coincidentes.
Neste caso, o sistema tem infinitas soluções.
Aplicando o método da adição chegamos a uma equação indeterminada.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \longrightarrow \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \xrightarrow{\cdot(-6)} \end{cases} \quad \begin{array}{r} 3x + 2y = 6 \\ -3x - 2y = -6 \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{array} +$$

Um sistema de equações lineares que tem infinitas soluções é um **sistema indeterminado**.

Analise o sistema a seguir.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 10x + 5y = 20 \end{cases}$$

A segunda equação é igual à primeira multiplicada por 5. O sistema é indeterminado.

Participe Faça as atividades no caderno.

Em um sistema cartesiano, represente o gráfico do sistema anterior e comprove que é um sistema indeterminado.

As retas são coincidentes, logo é um sistema indeterminado.

Orientações didáticas

Participe

A atividade deste boxe favorece o pensamento lógico que pode ser caracterizado como abdução, pois se busca comprovar a possibilidade do sistema ser indeterminado.

Proposta para o estudante

Se possível, sugira aos estudantes que explorem o uso do GeoGebra para a construção de gráficos e avaliar se um sistema de equações é possível, impossível ou indeterminado.
GEOGEBRA. Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 24 jun. 2022.

Orientações didáticas

Atividades

As representações geométricas indicam se o sistema de equações é possível, impossível ou indeterminado. Se julgar necessário, retome que: o sistema determinado tem apenas uma solução (um par ordenado); no sistema impossível, as retas são paralelas, não tem pontos em comum e, por isso, não há solução; e no sistema indeterminado, as retas são coincidentes, com infinitas soluções.

Nas atividades **49**, **51** e **52**, permita que os estudantes escolham a estratégia de resolução, podendo posteriormente comparar e discutir sobre a estratégia que é mais adequada.

Na atividade **50**, reforce com os estudantes que no decorrer da resolução de um sistema impossível se obtém uma equação que é um absurdo matemático.

Na olimpíada

A questão da Obmep sobre os adesivos pode ser resolvida por meio de um sistema de equações em que as incógnitas estão representadas pelos símbolos (desenhos dos adesivos).

Atividades

Faça as atividades no caderno.

48. Represente, no caderno, graficamente as equações de cada sistema e classifique-o em determinado, indeterminado ou impossível.

a) $\begin{cases} y = x - 7 \\ x = y + 3 \end{cases}$ Impossível.

b) $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ x = 2y + 2 \end{cases}$ Determinado.

c) $\begin{cases} y = x + 2 \\ x = y - 2 \end{cases}$ Indeterminado.

49. Resolva o sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$ considerando o conjunto dos números racionais. Impossível.

50. Considere o sistema $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + 4y = ▨ \end{cases}$.

a) Você deve substituir ▨ por qual número para que o sistema fique indeterminado? 16

b) Sendo indeterminado, o sistema tem infinitas soluções. Apresente quatro soluções e represente a reta em um sistema cartesiano. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

c) Se ▨ for substituído por 10, quantas soluções terá o sistema? Neste caso, qual é a posição relativa das duas retas que representam as equações? Nenhuma. Paralelas.

51. Quantas soluções tem cada sistema a seguir? Considere *x* e *y* números racionais.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases}$ Uma.

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$ Nenhuma.

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$ Infinitas.

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2y + 3x = 5 \end{cases}$ Uma.

52. Classifique os sistemas a seguir considerando o conjunto dos números racionais.

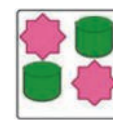
a) $\begin{cases} 2x + 3y = x + y + 7 \\ 1 + 2y = 3 - x \end{cases}$ Impossível.

b) $\begin{cases} 5x = 1 - 3y \\ 2x + 4y = y - 3x \end{cases}$ Impossível.

c) $\begin{cases} 7x - y = y - x - 7 \\ 2y - 5x - 3 = 3x + 4 \end{cases}$ Indeterminado.

Na olimpíada

Os preços dos adesivos

(Obmep) Na figura vemos três cartelas com quatro adesivos e seus respectivos preços. O preço de uma cartela é a soma dos preços de seus adesivos.

R$ 16,00 R$ 12,00 R$ 10,00

Ilustrações: Reprodução/Obmep, 2016.

Qual é o preço da cartela a seguir com seis adesivos?

a) R$ 18,00
b) R$ 20,00
c) R$ 21,00
d) R$ 22,00
e) R$ 23,00

Alternativa **e**.

O retângulo dividido

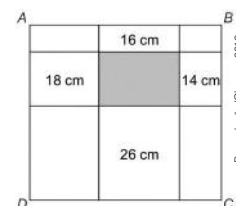
(Obmep) O retângulo *ABCD* foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo *ABCD* é 54 cm. Qual é o perímetro do retângulo cinza? Alternativa **c**.

a) 15 cm
b) 19 cm
c) 20 cm
d) 22 cm
e) 24 cm

A B 16 cm 18 cm 14 cm 26 cm D C

Reprodução/Obmep, 2016.

Na História

Faça as atividades no caderno.

Coordenadas na Geometria

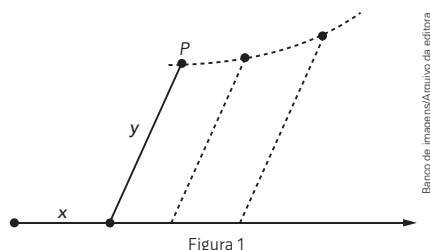
O século XVII foi especialmente favorável ao desenvolvimento da Matemática. O matemático francês François Viète (1541-1603) contribuiu para o desenvolvimento da Álgebra literal, no final do século XVI, e René Descartes teve a ideia de fundir a Álgebra com a Geometria, a fim de aproveitar o melhor de cada um desses ramos da Matemática e corrigir os "defeitos" de cada um deles.

Ocorre que na mesma época, independentemente, por outros motivos, o também francês Pierre de Fermat (1601-1665) igualmente desenvolveu ideias que conduziram ao mesmo objetivo.

A essência da ideia que uniu Fermat e Descartes na história da Matemática, quando aplicada ao plano, consiste em estabelecer uma correspondência que associe uma reta ou curva do plano a uma equação a duas variáveis que represente a figura, e vice-versa. Para isso, é preciso contar com um referencial no plano. Modernamente, o referencial é formado pelo sistema cartesiano que você estudou: duas retas numeradas (eixos coordenados) perpendiculares e com a mesma origem. Em uma carta de 1629 ao matemático francês Roberval (1602-1675), Fermat afirmou, por exemplo, que $ax + by + c = 0$, em que a, b, c são números conhecidos dados, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, é a equação de uma reta. (Lembrar que cada solução é um ponto (x, y) cujas coordenadas tornam verdadeira a equação.)

Mas Fermat e Descartes não usavam o semieixo das ordenadas nem coordenadas negativas. A Figura **1** mostra como a extremidade superior do segmento y (ordenada), levantado a partir da extremidade do segmento variável x (abscissa), representava o ponto $P(x, y)$.

Fermat faria o mesmo, só que com duas vogais maiúsculas, por exemplo (A, E). As ordenadas tinham uma inclinação constante em relação ao eixo horizontal – às vezes, de 90°. O referencial atualmente usado impôs-se com o tempo, vindo a ser adotado universalmente por volta do fim do século XVIII.

Figura 1

Fontes dos dados: BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática através dos tempos*. Tradução Elza F. Gomide e H. Castro. São Paulo: Blucher, 2010; COURANT, Richard; ROBINS, Herbert. *Que es la Matemática*. Tradução Luis Bravo Gala. Madrid: Aguilar, 1955; HODGKIN, Luke. *A History of Mathematics, from Mesopotamia to Modernity*. New York: Oxford University Press, 2005.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

1. Tudo indica que Fermat teve a ideia de usar coordenadas em Geometria antes de Descartes, mas este publicou sua obra sobre o assunto, *La Géométrie* (*A Geometria*), primeiro (em 1637). Por isso a criação desse método geométrico costuma ser atribuída a Descartes. Como você analisa esse fato?
2. Qual é a vantagem de uma simbologia algébrica que permita distinguir claramente constantes de variáveis?
3. Em cada item, faça o que se pede:
   a) Na época de Descartes, os cientistas (Fermat, por exemplo) em geral escreviam suas obras em latim. Mas a única obra matemática de Descartes, *A Geometria*, foi publicada em francês, em 1637. Essa obra, entretanto, só se tornou largamente conhecida a partir de 1649, em uma tradução para o latim, com vários comentários explanatórios feitos pelo tradutor. Por que você acha que isso ocorreu?
   b) Em 2020, 95% dos artigos científicos publicados estavam em língua inglesa (Fonte dos dados: https://brasil.elpais.com/ciencia/2021-07-28/em-95-dos-artigos-cientificos-ingles-cria-ditadura-da-lingua-apenas-1-esta-em-portugues-e-espanhol.html. Acesso em: 20 maio 2022). Em grupo com os colegas, escolham um trabalho escolar que vocês fizeram nesse ano e façam uma apresentação em língua inglesa dele.

Orientações didáticas

Na História

Na BNCC

O trabalho desta seção favorece o desenvolvimento da **CG01**, da **CEMAT01** e da **CEMAT03**, ao valorizar o conhecimento historicamente construído sobre coordenadas que articula a Álgebra com a Geometria.

Leia com os estudantes o texto desta seção.

Saliente que o plano cartesiano necessariamente relaciona-se com eixos ortogonais, e que além de formarem ângulo de 90°, são eixos orientados, ou seja, com sentidos determinados. Há vantagens em utilizar este tipo de referência ou eixo em um mundo em que a maioria dos objetos segue orientações ortogonais (por exemplo, prédios dão a ideia de comprimento, largura e altura), porém, para situações não cotidianas, há outros sistemas de coordenadas mais adequados, por exemplo, ao circundar o planeta Terra, é interessante usar outras coordenadas, chamadas de **coordenadas esféricas**. O relato histórico presente nesta seção ajuda a refletir sobre conquistas científicas serem fruto do trabalho de muitas pessoas. Estimule os estudantes a compartilhar oralmente as compreensões sobre o texto.

Após o texto, permita que os estudantes em duplas respondam às questões para favorecer a discussão e o aprendizado. Dessa maneira, eles desenvolvem a prática argumentativa em sala de aula, na qual expõem suas opiniões baseadas em argumentos coerentes, históricos e matemáticos.

O item **b** da atividade **3** aborda divulgação científica e língua inglesa. Essa é uma atividade interdisciplinar que requer um trabalho com um professor de língua inglesa. Se julgar pertinente, promova uma discussão sobre como validar pesquisas científicas por meio de diferentes referências bibliográficas. Para tanto, a pesquisa de artigos em língua inglesa pode ser necessária. Essa ação promove boas práticas de pesquisa e combate a disseminação de *fake news*.

Orientações didáticas

Na mídia

Na BNCC

O trabalho com o assunto desta seção mobiliza o TCT *Vida Familiar e Social*, ao trazer uma situação do cotidiano envolvendo a numeração de calçados. Favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA08**, ao propor a resolução de um problema modelado por uma fórmula que é uma equação do 1º grau com 2 incógnitas. Mobiliza também a **CG06**, ao apresentar um saber de outra cultura.

O texto desta seção pretende mostrar a Matemática como uma ciência viva e útil em diversas situações do cotidiano próximo dos estudantes.

Em especial, o contexto trazido envolve a aplicação de equação linear na escala de calçados, por meio de uma fórmula que relaciona 2 grandezas diferentes: o número do sapato e o comprimento do pé.

Leia o texto em voz alta, esclarecendo possíveis dúvidas que surgirem. Se julgar conveniente, proponha que os estudantes resolvam as atividades em duplas para enriquecimento da discussão e do aprendizado.

Traga outros contextos envolvendo a aplicação de equações lineares, por exemplo, a fórmula de conversão de escalas termométricas:

$\frac{T_C}{5} = \frac{T_F - 32}{9}$, em que T_C é a medida de temperatura em graus Celsius (°C) e T_F é a medida de temperatura em graus Fahrenheit (°F).

Na mídia

Faça as atividades no caderno.

A Matemática e o número que você calça

Muitas vezes não entendemos os motivos de estudar Matemática nem imaginamos em que situações poderíamos usar determinada parte do conteúdo. Por isso é comum, muitas vezes, que nos questionemos: Onde a Matemática é realmente aplicada?

Inúmeros são os exemplos e situações em que podemos ver o emprego da Matemática. Desde o momento em que acordamos até a hora de dormir, estamos sempre fazendo uso dessa ciência. Quando, ao levantar pela manhã para ir à escola ou fazer qualquer atividade, dizemos "só mais cinco minutinhos", intuitivamente estamos realizando cálculos matemáticos para averiguar se esses preciosos minutos de sono não farão com que nos atrasemos. A tecnologia não estaria tão avançada sem o fantástico auxílio da Matemática. Do mais simples ato até a mais sofisticada empregabilidade, a Matemática está sempre presente em nosso cotidiano, basta que analisemos as situações que vivenciamos.

Por mais inimaginável que possa parecer, o número que você calça também está relacionado à Matemática. Existe uma fórmula que relaciona o número que você calça e o tamanho do seu pé em centímetros.

Vamos verificar:

$$S = \frac{5p + 28}{4}$$

Em que,

S: é o número do sapato.

p: é o comprimento do pé em centímetros. [...]

HENADZI KILENT/Shutterstock

Relação entre o número que você calça e a medida de comprimento de seu pé.

RIGONATTO, Marcelo. A Matemática e o número que você calça. *Escola Kids UOL*, [s. l.], 2022. Disponível em: http://escolakids.uol.com.br/a-matematica-e-o-numero-que-voce-calca.htm. Acesso em: 17 mar. 2022.

1. Qual é o número do sapato de uma pessoa cujo comprimento do pé mede 24 cm? 37

2. Você sabia que os sapatos nos Estados Unidos têm numeração diferente daquela que costumamos ver no Brasil? A conversão dessas medidas pode ser feita utilizando o seguinte quadro:

Brasil	33	34	35	36	37	38	39	40
Estados Unidos	5	5,5	6 ou 6,5	7 ou 7,5	8 ou 8,5	9 ou 9,5	10 ou 10,5	11 ou 11,5

Nessas condições, qual é a numeração do calçado, nos Estados Unidos, de uma mulher cujo comprimento do pé mede 23,2 cm? 7 ou 7,5.

3. Mariana calça 39, mas não sabe a medida de comprimento de seu pé em centímetros. Sendo *x* essa medida, em centímetros, resolva a equação dada no texto e responda: Qual é a medida do pé de Mariana? 25,6 cm

4. Utilizando a mesma equação, calcule a medida de comprimento do seu pé, em centímetros, de acordo com o número que você calça. Resposta pessoal.

Na Unidade

Faça as atividades no caderno.

1. A raiz da equação $2x - 8 = 0$ é: Alternativa **a**.

a) 4. **c)** 8.
b) -4. **d)** -8.

2. A solução da equação $\frac{x}{120} = \frac{3}{5} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}$ é um número: Alternativa **c**.

a) primo.
b) múltiplo de 5.
c) múltiplo de 7.
d) múltiplo de 11.

3. Talita tem 6 anos e sua mãe tem 32. Daqui a n anos, Talita terá um terço da idade da mãe. O número n é: Alternativa **b**.

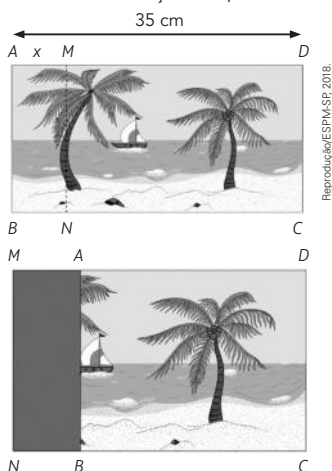
a) par. **c)** menor que 6.
b) primo. **d)** maior que 32.

4. Se gastar metade do que tenho e mais R$ 2,00, ficarei com 40% do meu dinheiro. Se não gastar nada, ficarei com: Alternativa **a**.

a) R$ 20,00. **c)** R$ 12,00.
b) R$ 15,00. **d)** R$ 10,00.

5. **(ESPM-SP)** A gravura mostrada na figura a seguir foi dobrada na linha tracejada MN, a x cm da borda AB.

35 cm
A x M D
B N C
M A D
N B C

Reprodução/ESPM-SP, 2018.

Sabendo-se que, depois da dobradura, a parte oculta da gravura representa 25% da parte visível, podemos afirmar que a medida x é de: Alternativa **a**.

a) 3,5 cm. **c)** 3 cm. **e)** 5 cm.
b) 6 cm. **d)** 4,5 cm.

6. Em uma eleição, dois candidatos tiveram no total 140 135 votos. O primeiro colocado teve 4 105 votos a mais do que o segundo. Quantos votos teve o primeiro colocado? Alternativa **c**.

a) 68 015
b) 70 825
c) 72 120
d) 74 030

7. **(UFMG)** Uma conta de R$ 140,00 é paga em cédulas de R$ 5,00 e R$ 10,00, num total de 18 cédulas. O número n de cédulas de R$ 5,00 usadas para o pagamento dessa conta é tal que: Alternativa **c**.

a) $n < 5$. **c)** $7 < n < 10$.
b) $5 \leq n < 7$. **d)** $n > 10$.

8. **(PUC-MG)** Um cofre contém x moedas de R$ 1,00, y moedas de R$ 0,50 e 12 moedas de R$ 0,25, totalizando R$ 22,00. Se $x + 2y = 49$, o valor de x é: Alternativa **c**.

a) 5. **c)** 9.
b) 7. **d)** 12.

9. **(Enem)** Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos. Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y? Alternativa **b**.

a) $5X - 3Y + 15 = 0$
b) $5X - 2Y + 10 = 0$
c) $3X - 3Y + 15 = 0$
d) $3X - 2Y + 15 = 0$
e) $3X - 2Y + 10 = 0$

10. Desenhando em um sistema cartesiano as retas que representam as equações $y = 2 + x$ e $y = 2 - x$, verificamos que elas: Alternativa **b**.

a) são paralelas.
b) são concorrentes em um ponto do eixo y.
c) são concorrentes em um ponto do eixo x.
d) são coincidentes.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02**, ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

As atividades **1** e **2** envolvem a resolução de equações lineares. As atividades **3**, **4**, **5** e **9** são problemas que demandam a modelagem por meio de equações lineares que deverão ser resolvidas. Erros de resolução nessas atividades podem indicar que os estudantes têm dificuldade em fazer as operações necessárias para isolar a incógnita, sendo necessário retomar os passos descritos no tópico “Resolução de problemas”.

As atividades **6** a **8** requerem a modelagem por meio de sistemas de equações lineares. Caso os estudantes sintam dificuldades nas resoluções, retome os métodos de resolução de sistemas.

A atividade **10** também envolve a montagem de um sistema de equações lineares e sua resolução. Além disso, requer implicitamente que se classifique esse sistema, que é determinado por conter uma única solução. Se necessário, retome com os estudantes a classificação de sistemas de equações.

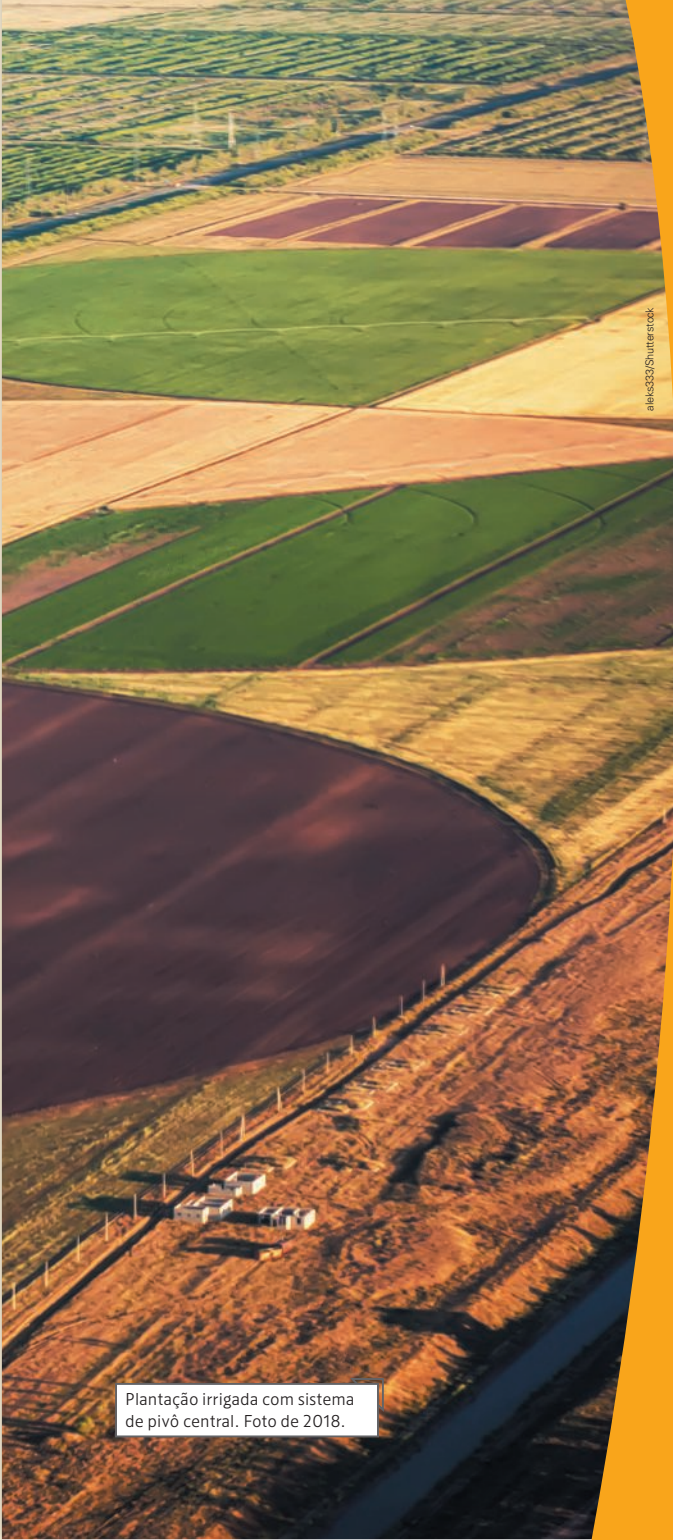
Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da Unidade favorece o desenvolvimento dos TCTs *Ciência e Tecnologia* e *Educação Ambiental*, pois apresenta fotografia e texto sobre uma tecnologia fornecedora de água e energia que permite economia da água usada na irrigação de plantações. Mobiliza a **CG07** quando os estudantes argumentam para explicar o que entenderam das informações do texto.

A abertura da Unidade traz a imagem de uma plantação em regiões com formato circular para possibilitar a aplicação de uma tecnologia de irrigação que é o sistema de pivô central. Verifique se os estudantes percebem essa relação entre o círculo de plantação e o pivô que deve ser localizado no centro dele. Pergunte o que eles notam na fotografia que se parece com figuras ou elementos geométricos. Espera-se que eles associem: a área circular ao círculo; a metade dessa área ao semicírculo; o contorno dessa área à circunferência; a linha central que atravessa a área circular ao diâmetro; a metade do comprimento dessa linha ao raio, entre outras formas adquiridas pelas plantações.

UNIDADE 7

Circunferência e transformações geométricas

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- resolver problemas que envolvem distâncias entre pontos e retas;
- resolver problemas que envolvem posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências;
- aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz;
- resolver problemas que envolvem arcos e ângulos;
- reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas.

CAPÍTULOS

Como aproveitar ao máximo a área irrigada?

Na imagem, a plantação é irrigada por um sistema conhecido como **pivô central**, desenvolvido por Frank Ziback, fazendeiro do Colorado, Estados Unidos, nos anos 1950. As primeiras versões desse sistema eram compostas de rodas movidas a água, distribuídas em torno de uma linha lateral.

O sistema de pivô central, basicamente, é composto de diversos bocais de distribuição de água que podem ser do tipo fixo ou rotativo, acoplados à linha lateral (raio do círculo de irrigação) que rotaciona em torno do centro do círculo de irrigação. Uma torre que fica no centro das plantações gira de forma circular borrifando água e fertilizantes líquidos de maneira uniforme.

Algumas vantagens do método são eficiência no uso de água e energia, baixo custo de manutenção e mão de obra, irrigação para longas distâncias, facilidade de adaptação em locais com solo irregular e extensos, além de facilitar a aplicação de fertilizantes. Entretanto, algumas partes do solo ficam sem irrigação, como podemos notar na imagem. Para melhor aproveitamento, os círculos de irrigação costumam ser idênticos e se tangenciam. Desse modo, a distância entre os pivôs centrais precisa ser igual ao diâmetro dos círculos.

Por ser um sistema de baixo custo e de eficiência no consumo de água, o pivô central é um dos processos de irrigação mais usados.

Fonte dos dados: MARCHETTI, Delmar. *Irrigação por pivô central*. Brasília, DF: Embrapa, 1983. Disponível em: https://www.infoteca.cnptia.embrapa.br/infoteca/bitstream/doc/92443/1/Irrigacaoporpivocentral.pdf. Acesso em: 3 mar. 2022

Com base em seus conhecimentos, existe alguma relação entre a utilização de um sistema de pivô central e a adoção de métodos sustentáveis?

Respostas pessoais.

aleks333/Shutterstock

Plantação irrigada com sistema de pivô central. Foto de 2018.

Orientações didáticas

Abertura

Solicite aos estudantes que leiam o texto em duplas e anotem as palavras que não souberem o significado. Proponha uma discussão com toda a turma para que as duplas compartilhem o que entenderam, permitindo que dúvidas sejam sanadas pela explicação dos próprios estudantes. Esta ação contribui para o desenvolvimento da argumentação.

Orientações didáticas

Distância entre dois pontos

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento das habilidades: **EF08MA15** e **EF08MA17**, ao abordar a construção de lugares geométricos como a mediatriz e a bissetriz usando instrumentos de desenho e *software* de geometria dinâmica e ao aplicar esses conceitos na resolução de problemas; **EF08MA16**, ao descrever, por escrito e por meio de fluxograma, os passos para construção de polígonos regulares. Mobiliza a **CEMAT05** e a **CEMAT06**, ao propor a utilização de ferramentas matemáticas como instrumentos de desenho e tecnologias digitais para resolver problemas e a expressão em diferentes linguagens.

O contexto apresentado neste tópico poderá gerar uma prática de pesquisa articulando **Arte** e **Matemática**. Os estudantes podem, por exemplo, pesquisar outras obras de Kazimir Malevich e/ou outros artistas suprematistas, ou seja, que produzem obras abstratas. Uma sugestão é solicitar que criem suas próprias obras de arte abstratas, fazendo releituras de algumas obras desses artistas.

Baseando-se no *Círculo negro* desenhado por Malevich, instigue os estudantes a analisar o ambiente escolar e peça que apontem objetos que se parecem com círculos e circunferências.

Revise com eles conceitos relacionados a círculo e circunferência que aprenderam anteriormente, como centro, raio e diâmetro.

Participe

O trabalho com este boxe representa um momento de resgatar saberes prévios e modos próprios que os estudantes possuem de conceber uma atividade matemática. Em algumas situações, ao resgatar o contexto em que o estudante faz parte, a Etnomatemática pode ser um caminho interessante.

Se possível, utilize um projetor de imagens para reproduzir a ilustração exposta no boxe, a qual representa as possibilidades de caminhos que Carlos pode utilizar para chegar até a casa de João, e assim resolver a atividade coletivamente com os estudantes. Essa atividade envolve o conceito de reta.

Ressalte que essa atividade pode ser melhor compreendida após o estudo que seguirá, pois ela serve como uma introdução ao conceito de distância entre 2 pontos.

CAPÍTULO 13

Circunferência e círculo

NA BNCC
EF08MA15
EF08MA16
EF08MA17

Distância entre dois pontos

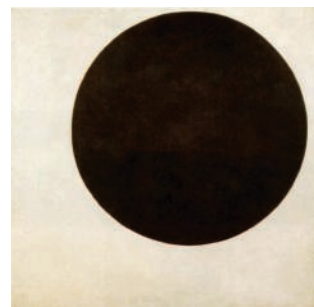
Círculo negro

O pintor russo Kazimir Malevich (1878-1935) foi o criador da corrente artística de pintura abstrata chamada Suprematismo, que consiste na representação de formas de figuras geométricas como círculo, quadrado e triângulo.

Considerada sua principal obra, *Quadrado negro*, de 1915, caracterizou uma ruptura com a arte da época e gerou muita discussão.

O *Círculo negro* é um grande círculo que chama a atenção por "deslocar-se" para o canto superior direito da tela quadrada de fundo branco. Pintada em 1923, pertence ao Museu Estatal Russo, de São Petersburgo, Rússia.

Algumas obras de Malevich, cujos originais pertencem a museus, estiveram em exposição no Brasil em 2009.

Neste capítulo, aprofundaremos nossos conhecimentos sobre o círculo e a circunferência. Para iniciar, estudaremos a distância entre dois pontos.

Reprodução/Museu Estatal Russo, São Petersburgo, Rússia.

Círculo negro, de Kazimir Malevich, 1923 (óleo sobre tela de 105,5 cm × 105,5 cm).

As imagens não estão representadas em proporção.

Participe

Faça as atividades no caderno.

Carlos pretende ir de sua casa até a casa de João fazendo o menor percurso.

A
B
D
C
Casa de Carlos
Casa de João

Artur Fujita/Arquivo da editora

a) Indique a letra que representa o menor percurso para Carlos chegar à casa de João. Letra D.

b) Como se chama a grandeza que indica o comprimento desse percurso em relação às duas casas? Distância.

Proposta para o estudante

Para engajar os estudantes ainda mais, leve-os para o pátio da escola para desenhar uma circunferência no chão com o auxílio de um barbante: um estudante fixa uma extremidade do barbante, que será o centro, e outro segura a outra extremidade do barbante esticado, gira em torno do centro e vai traçando a linha curva no chão. Depois, trace o diâmetro e peça que um estudante conte quantos passos há de uma extremidade à outra da linha do diâmetro. Multiplique a quantidade de passos pelo valor aproximado de π (3,14) e, assim, encontrará a medida de comprimento aproximada da circunferência traçada, em número de passos. Peça ao mesmo estudante que conte quantos passos ele dá percorrendo a circunferência em 1 volta completa. Dessa maneira, pode-se conferir o valor calculado para a medida de comprimento da circunferência.

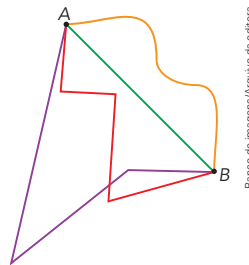
Dados dois pontos, A e B, podemos traçar várias curvas unindo-os.

Cada uma dessas curvas tem um comprimento. A curva de menor comprimento é o segmento de reta $\overline{AB}$.

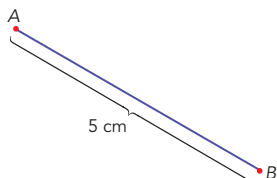
Por isso, dizemos que o comprimento de $\overline{AB}$ é a **distância** entre A e B.

A
B

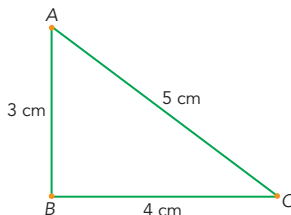
Banco de imagens/Arquivo da editora

A **distância entre dois pontos** é o comprimento do segmento de reta que tem as extremidades nesses pontos.

Exemplos

- Considere o segmento de reta $\overline{AB}$, de medida 5 cm. Dizemos que a distância entre os pontos A e B mede 5 cm.

A
5 cm
B

Banco de imagens/Arquivo da editora

- Os lados de um triângulo ABC medem: $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm e $AC = 5$ cm. A distância entre A e B mede 3 cm. A distância entre B e C mede 4 cm. A distância entre A e C mede 5 cm.

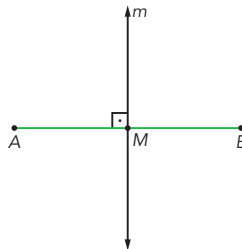
A
3 cm
5 cm
B
4 cm
C

Banco de imagens/Arquivo da editora

- Um segmento de reta $\overline{AB}$ mede 4 cm e seu ponto médio é M. A distância entre A e M mede 2 cm. A distância entre B e M mede 2 cm.

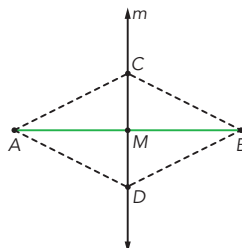
2 cm
2 cm
A
M
B

Banco de imagens/Arquivo da editora

A reta m, perpendicular ao segmento de reta $\overline{AB}$ que passa por M, ponto médio de $\overline{AB}$, é a mediatriz desse segmento de reta.

m
A
M
B

Banco de imagens/Arquivo da editora

Se tomarmos qualquer ponto pertencente à reta m, ele tem a mesma distância de A e de B, por exemplo:

m
C
A
M
B
D

Banco de imagens/Arquivo da editora

$CA = CB$; $DA = DB$; ...

Você já estudou na Unidade **3** que o termo **lugar geométrico** é atribuído a uma figura geométrica cujos pontos têm uma mesma propriedade e só eles a têm.

Biscotto Design/Shutterstock

A mediatriz de um segmento de reta $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos que estão à mesma distância das extremidades A e B do segmento.

Orientações didáticas

Distância entre dois pontos

Este tópico retoma o conceito de mediatriz como lugar geométrico e apresenta os passos para a construção da mediatriz utilizando instrumentos de desenho.

Proposta para o professor

Na geometria euclidiana, a menor distância entre 2 pontos é uma reta. Nas geometrias que admitem o espaço não plano, a distância entre 2 pontos é a medida do arco de geodésica que tem extremidades nesses pontos.

Qual é a importância dessas descobertas? O estudo das geometrias não euclidianas abriu o caminho para a correta descrição de novas teorias, por exemplo, a Relatividade Geral e a Gravitação.

Segue uma referência para mais informações:

OBSERVATÓRIO Nacional. *A Geometria dos espaços curvos ou Geometria não euclidiana*. Disponível em: http://wwwp.fc.unesp.br/~hsilvestrini/a_geometria_dos_espacos_curvos.pdf. Acesso em: 24 jun. 2022.

Orientações didáticas

Circunferência e círculo

Após essa discussão inicial, informe aos estudantes que podemos entender a circunferência como o lugar geométrico dos pontos que estão à mesma distância de um ponto fixo, ou seja, o centro da circunferência. Uma circunferência divide o plano em 2 regiões: uma região limitada denominada como interior da circunferência e outra região ilimitada denominada como exterior da circunferência.

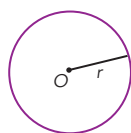
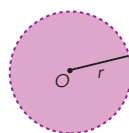
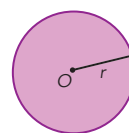
Este tópico apresenta a diferença entre circunferência e círculo. Instigue os estudantes, sempre que possível, a utilizar o suporte visual para entender os elementos da circunferência: centro, corda, diâmetro e raio.

Posições relativas entre ponto e circunferência

Neste tópico, relacionamos o conceito de distância entre 2 pontos com as regiões de uma circunferência – pontos internos, pontos da circunferência e pontos externos a ela.

Cuide para que os estudantes percebam que o termo “pertence” tem exatamente o mesmo significado de um elemento pertencer ou não a um conjunto numérico. Estamos tratando de elementos geométricos que pertencem ou não a um conjunto denominado lugar geométrico.

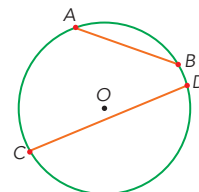
Circunferência e círculo

Considere as figuras geométricas representadas e o nome de cada uma delas.

Circunferência.

Conjunto dos pontos internos à circunferência (interior).

Círculo.

Banco de imagens/Arquivo da editora

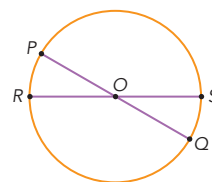
A **circunferência** de centro O e raio medindo r é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam de O exatamente a medida r do raio. O **círculo** é definido pela circunferência e o seu interior.

Corda

Corda é um segmento de reta que tem como extremidades dois pontos da circunferência. Na figura, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são exemplos de cordas.

Banco de imagens/Arquivo da editora

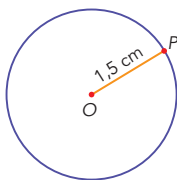
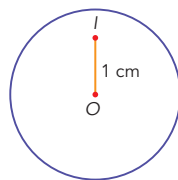
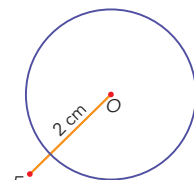
Diâmetro

Diâmetro é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Na figura, $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$ são exemplos de diâmetros.

A **medida do diâmetro** de uma circunferência é igual ao dobro da medida do raio.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Posições relativas entre ponto e circunferência

Em um plano, dados uma circunferência de centro O e raio medindo r e um ponto qualquer, podem ocorrer três situações. Considere a representação de três circunferências que têm centro O e raio medindo 1,5 cm.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A distância entre P e O mede 1,5 cm. Essa distância é **igual** ao comprimento do raio. Então, o ponto P **pertence** à circunferência.

A distância entre I e O mede 1 cm. Essa distância é **menor** do que o comprimento do raio. Então, o ponto I é **interno** à circunferência.

A distância entre E e O mede 2 cm. Essa distância é **maior** do que o comprimento do raio. Então, o ponto E é **externo** à circunferência.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

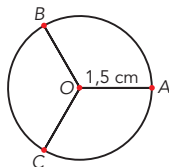
1. Desenhe um segmento de reta $\overline{AB}$ com medida 60 mm. Construa o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de A e de B. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. Marque um ponto O. Construa o conjunto dos pontos do plano que estão à medida de distância de 45 mm de O.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

3. Construa a circunferência que passa pelos três vértices do triângulo ABC, no qual $AB = 11$ cm, $BC = 6$ cm e $AC = 7$ cm. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

4. Carolina tem 3 roseiras em seu jardim; elas estão dispostas de modo a formar um triângulo de lados medindo 4 m, 5 m e 6 m, cada uma em um vértice. Carolina deseja instalar um tanque de água para molhar as roseiras, que se localize à mesma distância de cada uma delas. Para encontrar o local da instalação, construa um triângulo ABC com $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm e $AC = 5$ cm. Em seguida, encontre o ponto P, que dista igualmente de A, de B e de C. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

5. Considere a circunferência cujo centro está indicado na figura a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Agora, responda:

a) Quanto mede $\overline{OA}$? 1,5 cm

b) Quanto mede $\overline{OB}$? 1,5 cm

c) Quanto mede $\overline{OC}$? 1,5 cm

d) A distância dos pontos A, B e C ao ponto O é a mesma? Sim.

e) Qual é o centro da circunferência? Quanto mede o raio dessa circunferência? O ponto O; 1,5 cm.

6. Como são chamados os pontos cuja distância em relação ao centro de uma circunferência é menor do que o comprimento do raio? Pontos internos à circunferência.

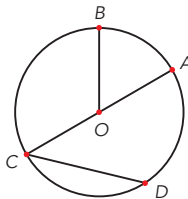
7. Considere uma circunferência de centro O e raio que mede 25 mm. Verifique se os pontos X, Y e Z, do mesmo plano da circunferência, são internos, pertencentes ou externos a ela.

a) X dista 1,5 cm de O; Interno.

b) Y dista 3 cm de O; Externo.

c) Z dista 2,5 cm de O. Pertencente.

8. Dos segmentos de reta representados na figura, que representa uma circunferência de centro O, indique no caderno os que são:

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) raios; $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$.

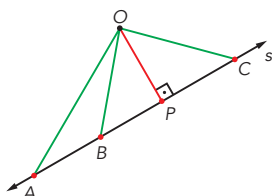
b) cordas; $\overline{CD}$ e $\overline{AC}$.

c) diâmetro. $\overline{AC}$.

Distância de um ponto a uma reta

Dados uma reta s e um ponto O fora dela, sempre podemos traçar vários segmentos de reta com uma extremidade em O e a outra em algum ponto de s.

Cada um dos segmentos de reta ($\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OP}$, etc.) tem um comprimento. O segmento de reta de menor comprimento é $\overline{OP}$, que é perpendicular à reta s. O comprimento de $\overline{OP}$ é a distância do ponto O à reta s.

Banco de imagens/Arquivo da editora

A **distância de um ponto a uma reta** é o comprimento do segmento de reta perpendicular à reta com uma extremidade no ponto e a outra na reta.

d) Podemos concluir que a reta t é a mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$.

Na atividade **3**, utilize a mesma ideia da atividade **1** para construir com os estudantes o que se pede.

Na atividade **4**, comente que, na construção, o local de instalação do tanque é no encontro das mediatrizes dos lados do triângulo. Esse ponto é o **circuncentro**, ou seja, o centro da circunferência que passa pelos vértices do triângulo; dessa maneira, o triângulo é inscrito à circunferência.

Antes de seguir com o conteúdo, converse com os estudantes sobre a importância de utilizar ferramentas, como os instrumentos de desenho compasso, régua, esquadros, transferidor e/ou um *software* de geometria dinâmica, que são essenciais para a resolução de exercícios de Geometria.

Distância de um ponto a uma reta

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA15** e **EF08MA17** ao propor a construção da bissetriz usando instrumentos de desenho e a aplicação desse conceito na resolução de problemas.

Este tópico trata do conceito de distância de um ponto a uma reta, sendo que o ponto não pertence a ela.

Utilize a primeira figura apresentada neste tópico para iniciar uma discussão sobre a eficiência do deslocamento entre pontos de um plano. Faça o questionamento: "Qual é a maneira mais eficiente de ir do ponto O até a reta s? Por quê?". Espera-se que os estudantes percebam que o deslocamento de O até P é menor do que os demais, o que demanda um tempo menor de percurso (considerando a mesma velocidade para os 4 percursos apresentados). Só então identifique essa característica com o segmento de reta perpendicular à reta s, passando pelo ponto O.

Proposta para o professor

Para informações sobre o circuncentro e outros pontos notáveis de um triângulo, segue a referência:
LUIZ, Robson. Pontos notáveis de um triângulo. *Brasil Escola*, [s. *l.*], c2022. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/pontos-notaveis-de-um-triangulo.htm. Acesso em: 24 jun. 2022.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **1**, se possível, construa o conjunto de pontos com os estudantes, utilizando régua e compasso ou o GeoGebra, e reforce estes passos:

a) Com centro em A e raio r, tal que $r > \frac{AB}{2}$, construímos o arco γ_1.

b) Com centro em B e mesmo raio r, construímos da mesma maneira o arco γ_2.

c) Traçamos uma reta t, que passa pelos pontos P e Q, que interceptam os arcos γ_1 e γ_2.

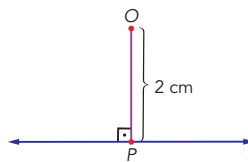
Orientações didáticas

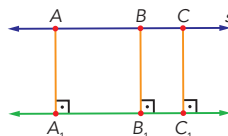
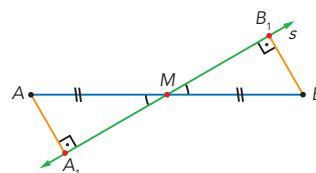
Distância de um ponto a uma reta

Na sequência, há um exemplo que utiliza propriedades já estudadas de congruência de triângulos para mostrar que, dada uma reta transversal a um segmento de reta $\overline{AB}$ que passa por seu ponto médio M, a distância entre as extremidades do segmento de reta e a reta é a mesma.

Essa discussão é fundamental para a introdução da bissetriz como lugar geométrico.

Exemplos

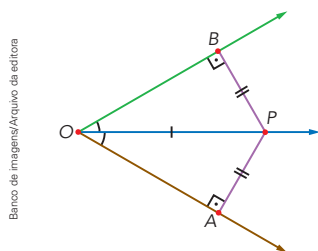
- Na figura, o segmento de reta $\overline{OP}$ é perpendicular à reta s e mede 2 cm.
  A distância do ponto O à reta s mede 2 cm.

- As retas s e t, representadas a seguir, são paralelas. Os pontos A, B e C são pontos de s. Os pontos A_1, B_1 e C_1 são pontos de t. As distâncias de A, B e C à reta t são iguais.

$$\overline{AA_1} \cong \overline{BB_1} \cong \overline{CC_1}$$

- Na figura, M é o ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$, e s é uma reta que passa por M.

Traçando por A o segmento de reta $\overline{AA_1} \perp s$ e por B o segmento de reta $\overline{BB_1} \perp s$, pelo critério LAA_o de congruência de triângulos:

$$\triangle AA_1M \cong \triangle BB_1M$$

E, então, $\overline{AA_1} \cong \overline{BB_1}$.

A distância de A a s é igual à distância de B a s, ou seja, os pontos A e B distam igualmente da reta s.

- A semirreta $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. O ponto P é um ponto qualquer da bissetriz.

A distância de P a $\overrightarrow{OA}$ é igual à distância de P a $\overrightarrow{OB}$, ou seja, o ponto P dista igualmente de $\overrightarrow{OA}$ e de $\overrightarrow{OB}$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

9. Desenhe uma reta r. Em seguida, construa o conjunto dos pontos do plano que estão à medida de distância de 3 cm da reta r. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

10. Desenhe duas retas, r e s, que formam entre si ângulos medindo 60° e 120°. Depois, construa o conjunto dos pontos que distam igualmente de r e de s. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

11. Uma salamandra se desloca sobre a base retangular de um tanque. Partindo de um vértice da base, em qual direção deverá seguir de modo a permanecer igualmente afastada de duas paredes adjacentes do tanque? Para visualizar, desenhe no caderno duas retas perpendiculares, r e s, e construa o conjunto dos pontos que distam igualmente de r e de s. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

12. Construa um triângulo ABC com $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm e $AC = 10$ cm. Em seguida, encontre o ponto P que dista igualmente dos três lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Posições relativas entre reta e circunferência

Reta e circunferência secantes

Se uma reta intersecta uma circunferência C em dois pontos distintos, dizemos que ela é **secante** à circunferência.

Nesse caso, a medida d de distância do centro da circunferência à reta secante é menor do que a medida r do raio.

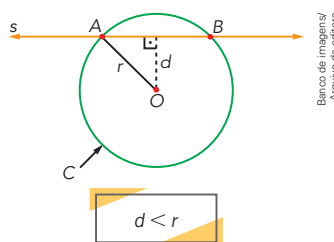
Na figura a seguir:

- s intersecta a circunferência C nos pontos A e B;
- s é secante a C;
- $\overline{AB}$ é uma corda.

s A B r d O C

Banco de imagens/ Arquivo da editora

$d < r$

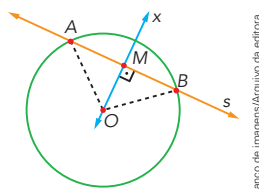
Secante: do latim *secans*, significa "que corta".

Propriedade

Vamos considerar uma reta secante $\overleftrightarrow{AB}$ ou s que determina uma corda $\overline{AB}$ em uma circunferência de centro O.

Por O, traçamos a reta x perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. As retas x e s intersectam-se em M.

Como o triângulo OAB é isósceles e $\overline{OM}$ é a altura relativa à base $\overline{AB}$, $\overline{OM}$ é também mediana; portanto, M é o ponto médio da corda $\overline{AB}$.

A x M B s O

Banco de imagens/Arquivo da editora

A reta que contém o centro da circunferência e é perpendicular à secante $\overleftrightarrow{AB}$ passa pelo ponto médio da corda $\overline{AB}$.

Também vale a recíproca:

A reta que contém o centro da circunferência e que passa pelo ponto médio da corda $\overline{AB}$ é perpendicular à secante $\overleftrightarrow{AB}$.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades aqui comentadas podem estimular a argumentação e comunicação matemática, além de inserir os estudantes no trabalho coletivo de construção de ideias. Aproveite para fazer as construções geométricas utilizando instrumentos de desenho na lousa convencional ou na lousa digital.

Na atividade **9**, é solicitada a construção de uma reta paralela a uma reta dada como o lugar geométrico dos pontos que estão à mesma distância da reta dada.

A atividade **10** remete ao lugar geométrico bissetriz, contudo, destaque aos estudantes que, nesse caso, há 2 retas que satisfazem o enunciado, a bissetriz do ângulo que mede 60° e a bissetriz do ângulo que mede 120°.

A atividade **11** apresenta outra oportunidade de transpor o enunciado escrito para a representação gráfica. Faça isso com a participação da turma, tente retratar o percurso da salamandra caracterizando-a ao mesmo tempo como figura geométrica.

Na atividade **12**, aparece outro ponto notável do triângulo; comente com os estudantes que o ponto que dista igualmente dos lados do triângulo é o encontro das bissetrizes dos ângulos do triângulo, o **incentro**, já estudado anteriormente.

Posições relativas entre reta e circunferência

Na BNCC

Os conteúdos abordados neste tópico permitem trabalhar com a habilidade **EF08MA17**, pois são avaliadas as posições relativas entre elementos geométricos por meio do traçado de mediatrizes.

Neste tópico, relacionamos retas a circunferências, observando a distância do centro da circunferência à reta e comparando essa distância com a medida do raio da circunferência.

Quando a distância é menor do que o raio, a reta é secante à circunferência, ou seja, corta-a obrigatoriamente em 2 pontos. Se o termo secante parecer sem sentido, reforce que ele vem do latim e significa "que corta".

Orientações didáticas

Posições relativas entre reta e circunferência

Neste momento do capítulo, é essencial que os estudantes tenham suporte visual para compreender melhor o que determina uma reta tangente a uma circunferência. Para isso, o ideal seria o uso do GeoGebra, mas, caso isso não seja possível, é importante explorar as figuras do livro ou até mesmo produzir alguns *slides* e projetá-los em sala de aula.

Destaque que a igualdade $d = r$ significa que a distância entre o centro O da circunferência e o ponto P da reta tangente é igual à medida do raio da circunferência. Se o termo tangente parecer sem sentido, reforce que ele vem do latim e significa "que toca". A reta tem 1 único ponto comum com a circunferência, ou seja, ela toca a circunferência.

A determinação da recíproca de uma propriedade pode ser considerada um raciocínio por analogia.

Finalmente, exponha o caso da reta externa à circunferência como um fechamento deste tópico; deixe claro que foram esgotadas todas as possibilidades de comparação entre a distância de uma reta ao centro de uma circunferência e a medida do raio dessa circunferência.

Reta e circunferência tangentes

Se uma reta tem apenas um ponto comum com uma circunferência, dizemos que ela é **tangente** a essa circunferência.

Na figura:

- P é o único ponto comum a t e C;
- t é tangente a C;
- P é o ponto de tangência;
- a medida d de distância do centro da circunferência à reta tangente é igual à medida r do raio $(d = OP = r)$, conforme demonstraremos a seguir.

Tangente: do latim *tangens*, significa "que toca".

$d = r$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Propriedade

Vamos considerar uma reta t tangente em P à circunferência de centro O e raio medindo r.

Qualquer ponto X de t, com exceção de P, é externo à circunferência; portanto, a distância de X até o centro O é maior do que o comprimento do raio. Assim, temos:

$$\left.\begin{matrix} OX > r \\ OP = r \end{matrix}\right\} \Rightarrow OX > OP$$

Concluímos, então, que $\overline{OP}$ é a distância do ponto O à reta t e, desse modo, a reta t é perpendicular a $\overline{OP}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio dessa circunferência no ponto de tangência.

Também vale a recíproca da propriedade:

Toda reta perpendicular ao raio na extremidade diferente do centro da circunferência é tangente a essa circunferência.

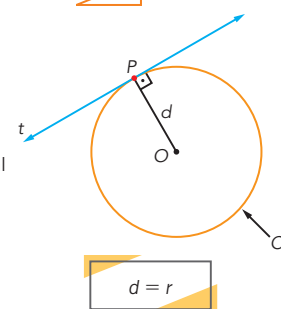
Reta e circunferência externas

Se uma reta não tem ponto comum com uma circunferência, dizemos que ela é **externa** à circunferência.

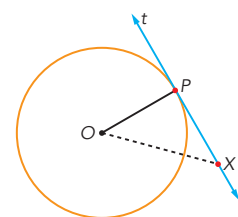
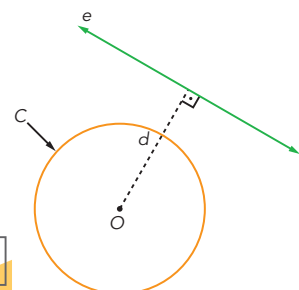
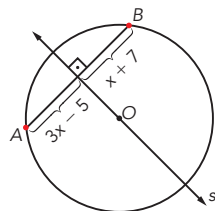
Nesse caso, a medida d de distância do centro da circunferência à reta externa é maior do que a medida r do raio.

Pela figura, temos:

- C e e não têm ponto comum;
- e é externa a C.

$d > r$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

Faça as atividades no caderno.

13. Considere a figura a seguir, com uma circunferência de centro O. Sabendo que s é perpendicular a $\overline{AB}$, determine o valor de x. $x = 6$

Banco de imagens/Arquivo da editora

14. Em cada item, sendo d a medida de distância do centro de uma circunferência, de raio medindo r, a uma reta, dê a posição relativa da reta em relação à circunferência.

a) $d = 5$ cm e $r = 3$ cm Externa.

b) $d = 7$ cm e $r = 8$ cm Secante.

c) $d = 2$ cm e $r = 1{,}5$ cm Externa.

d) $d = 4$ cm e $r = 4$ cm Tangente.

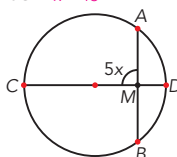
e) $d = 5$ cm e $r = 2{,}5$ cm Externa.

f) $d = 0$ cm e $r = 2$ cm Secante.

15. Uma reta s determina sobre uma circunferência de centro O e raio medindo r uma corda $\overline{AB}$. O ponto médio de $\overline{AB}$ é M.

a) Quantos ângulos a reta s forma com a reta $\overleftrightarrow{OM}$? Quais são as medidas desses ângulos? **a)** 4 ângulos retos (medem 90°).

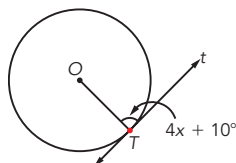
b) Compare as medidas de $\overline{OA}$, $\overline{OM}$ e $\overline{OB}$. $OA = OB$ e $OM < OA$

16. Considere a figura a seguir. Sabendo que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ e que $\overline{CD}$ é um diâmetro da circunferência, determine o valor de x. $x = 18°$

Banco de imagens/Arquivo da editora

17. Prove que, se duas cordas de uma circunferência estão à mesma distância do centro, então elas são congruentes. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

18. A distância do centro de uma circunferência de 7 cm de medida do raio a uma reta mede $d = \left(5 + \frac{9x}{2}\right)$ cm.

Sabendo que a reta é tangente à circunferência, determine o valor de x. $x = \frac{4}{9}$ cm

19. Sabendo que a reta t e a circunferência de centro O só têm em comum o ponto T, determine o valor de x. $x = 20°$

Banco de imagens/Arquivo da editora

20. Construa uma circunferência de centro O e raio que mede 4 cm. Marque um ponto T qualquer sobre a circunferência. Depois, construa a reta que passa por T e é tangente à circunferência.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Posições relativas de duas circunferências

Circunferências tangentes

Duas circunferências que têm um único ponto comum são **tangentes**.

Temos dois casos:

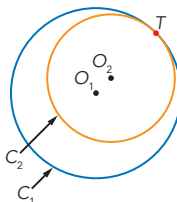
- Uma circunferência é **tangente interna** à outra.

Nesse caso, as circunferências têm um único ponto comum, e os demais pontos de uma são internos à outra. Na figura, C_1 e C_2 são circunferências tangentes internamente (ou interiormente).

Assim, temos:

- T é o único ponto comum a C_1 e C_2;
- T é o ponto de tangência.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **14**, instigue os estudantes a utilizar o pensamento computacional. Eles poderão construir um fluxograma com os passos para analisar as medidas dadas por d e r, em cada item, e assim classificar a posição da reta em relação à circunferência.

A atividade **17** demanda uma demonstração matemática. Se necessário, resolva-a com os estudantes.

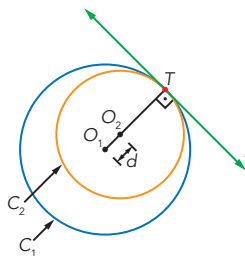
A atividade **18** não é um exercício de construção geométrica, mas sim um exercício algébrico que impõe uma condição: a reta é tangente, ou seja, a distância do centro da circunferência ao ponto de tangência da reta é igual à medida do raio da circunferência ($d = r$).

Orientações didáticas

Posições relativas de duas circunferências

Neste tópico, para definir a posição de 2 circunferências no plano, os estudantes devem compreender a relevância da distância entre os respectivos centros e das relações entre as medidas dos respectivos raios. Porém, devido à diversidade de casos (são 6), as medidas dos raios nem sempre são somadas, elas podem ser subtraídas uma da outra. Espera-se que os estudantes percebam que a subtração ocorre quando há regiões internas comuns a ambas as circunferências.

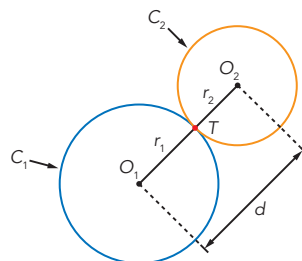
Se traçarmos a reta t, passando pelo ponto T e tangente à circunferência C_2, t também será tangente a C_1. Teremos, então: $\overline{O_1T} \perp t$ e $\overline{O_2T} \perp t$.

Como existe uma única reta perpendicular a t que passa pelo ponto T, teremos O_1, O_2 e T alinhados (sobre a mesma reta).

Banco de imagens/Arquivo da editora

Sendo r_1 e r_2 as medidas dos raios, com $r_1 > r_2$, e d a medida de distância entre os centros, temos:

$$O_1O_2 + O_2T = O_1T \Rightarrow d + r_2 = r_1 \Rightarrow \boxed{d = r_1 - r_2}$$

- As circunferências são **tangentes externas**.

  Nesse caso, as circunferências têm um único ponto comum, e os demais pontos de uma são externos à outra. Na figura, as circunferências são tangentes externamente (ou exteriormente).

Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, temos:

- T é o único ponto comum a C_1 e C_2;
- T é o ponto de tangência.

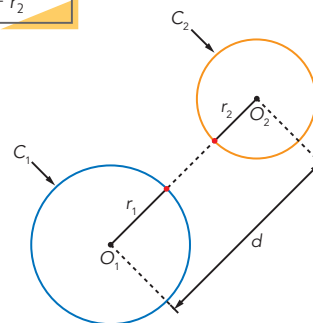
Aqui também temos O_1, O_2 e T alinhados. Sendo r_1 e r_2 as medidas dos raios e d a medida da distância entre os centros, temos:

$$O_1T + TO_2 = O_1O_2 \Rightarrow r_1 + r_2 = d \Rightarrow \boxed{d = r_1 + r_2}$$

Circunferências externas

Duas circunferências são **externas** se os pontos de cada uma delas são externos à outra.

Nesse caso, as circunferências não têm ponto comum.

$$\boxed{d > r_1 + r_2}$$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Circunferência interna a outra circunferência

Uma circunferência é **interna a outra** se todos os seus pontos são internos a essa outra circunferência.

Nesse caso, as circunferências também não têm ponto comum.

Sendo r_1 e r_2 as medidas dos raios, com $r_1 > r_2$, e d a medida de distância entre os centros, temos:

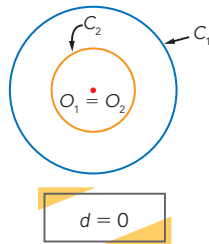
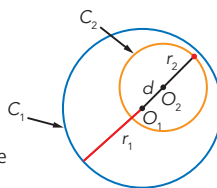
$$d + r_2 < r_1 \Rightarrow \boxed{d < r_1 - r_2}$$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Caso particular: circunferências concêntricas

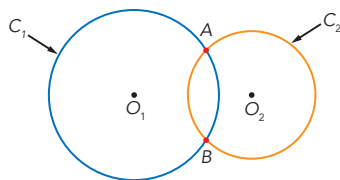
Na figura, a circunferência C_2 é interna à circunferência C_1. O centro de C_2 e o centro de C_1 coincidem. Portanto, as duas circunferências têm o mesmo centro.

Nesse caso, dizemos que C_1 e C_2 são internas e **concêntricas**. A medida d de distância entre os centros é zero.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\boxed{d = 0}$$

Circunferências secantes

Duas circunferências são **secantes** se têm em comum apenas dois pontos distintos.

Banco de imagens/Arquivo da editora

A e B são os pontos comuns a C_1 e C_2.
C_1 e C_2 são secantes.

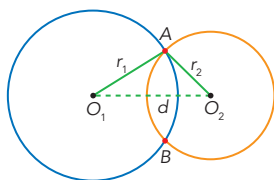
Vamos supor que duas circunferências secantes apresentem:

- centros O_1 e O_2;
- pontos comuns: A e B.
- raios medindo r_1 e r_2, com $r_1 > r_2$;

No triângulo AO_1O_2, a medida de cada lado é menor do que a soma das medidas dos outros dois (condição de existência do triângulo). Então: $r_1 < d + r_2$ e $d < r_1 + r_2$

E, assim, concluímos: $r_1 - r_2 < d$ e $d < r_1 + r_2$; ou seja:

Banco de imagens/Arquivo da editora

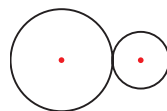
$$\boxed{r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2}$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

21. Indique se são secantes, concêntricas ou tangentes duas circunferências que têm:

a) só dois pontos comuns; Secantes. **b)** só um ponto comum; Tangentes. **c)** o mesmo centro. Concêntricas.

22. As circunferências da figura são tangentes externamente. Se a distância entre os centros mede 28 cm e a diferença entre as medidas dos raios é 8 cm, determine essas medidas dos raios. 18 cm e 10 cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **21**, é exercitada apenas a nomenclatura do par de circunferências, tendo em vista o número de pontos comuns entre elas. Aproveite para mencionar a situação em que todos os pontos são comuns – as circunferências são então denominadas **coincidentes**.

Para a atividade **22**, relembre com os estudantes os sistemas de equações do 1º grau com 2 incógnitas e os métodos de resolução – substituição e adição – e que, nesse caso, o método da adição fornece um encaminhamento mais ágil para a solução do problema. Isso ocorre porque, pelo enunciado e a situação de tangência externa entre as circunferências, as informações fornecidas envolvem a diferença entre as medidas dos raios e a soma dessas mesmas medidas.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **23** aborda o assunto apresentado na abertura desta Unidade. Retome o texto, se necessário, comentado a importância da irrigação para os produtores do campo, problematizando a questão da seca, por exemplo. Dessa maneira, pode-se promover positivamente os povos do campo.

As atividades **24**, **25**, **32** e **33** são similares à atividade **22**, pois demandam a montagem de sistemas de equações do 1º grau com 2 incógnitas para a resolução.

Na atividade **27**, assim como proposto para a atividade **14**, instigue os estudantes a utilizar o pensamento computacional. Eles poderão construir um fluxograma com os passos para analisar as medidas dadas por d, r_1 e r_2 em cada item, e assim classificar a posição relativa das 2 circunferências.

23. Um fazendeiro decidiu adotar o sistema de irrigação por pivô central. A região a ser irrigada tem formato retangular com dimensões medindo 12 km × 6 km.

a) A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Qual deve ser a medida de distância entre os pivôs centrais para que seja irrigada a maior região possível com 8 círculos idênticos, tangentes e dispostos em grade? Faça um desenho no caderno.

b) Qual é a medida do raio dos círculos de irrigação? 1,5 km

24. Duas circunferências são secantes, e a distância entre seus centros mede 20 cm. Sabendo que o raio da menor circunferência mede 11 cm, determine a medida do raio da maior, em centímetros, que é um múltiplo de 6. 12 cm, 18 cm, 24 cm ou 30 cm.

25. Duas circunferências são tangentes internamente, e a soma das medidas dos raios é 30 cm. Se a distância entre os centros mede 6 cm, determine as medidas dos raios. 18 cm e 12 cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

26. Considere r a reta que passa pelo ponto de tangência de duas circunferências tangentes entre si. Além disso, r é perpendicular à reta que passa pelos centros dessas circunferências. Qual é a posição relativa de r a cada uma dessas circunferências? É tangente a ambas.

27. Sejam r_1 e r_2 as medidas dos raios de duas circunferências C_1 e C_2, respectivamente, e d a medida de distância entre os centros. Determine as posições relativas dessas circunferências em cada item. Sugestão: Use régua e compasso.

a) $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 5$ cm e $d = 10$ cm Externas.

b) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 7$ cm e $d = 4$ cm C_1 tangente interna a C_2.

c) $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 5$ cm e $d = 8$ cm Secantes.

d) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 3$ cm e $d = 7$ cm Tangentes externas.

e) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 10$ cm e $d = 4$ cm C_1 interna a C_2.

f) $r_1 = r_2 = d = 2$ cm Secantes.

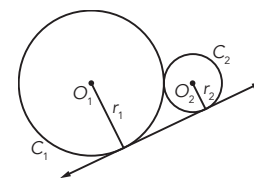
28. Considere r_1 e r_2 as medidas dos raios de duas circunferências C_1 e C_2, respectivamente, com $r_1 > r_2$. Sendo d a medida de distância entre os centros, determine o número de pontos comuns a C_1 e C_2 em cada item a seguir.

a) $d < r_1 - r_2$ 0 ponto.

b) $d = r_1 - r_2$ 1 ponto.

c) $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ 2 pontos.

d) $d = r_1 + r_2$ 1 ponto.

29. Se $r_1 = 20$ cm, $r_2 = 8$ cm e C_1 e C_2 são tangentes, determine a medida de distância entre O_1 e a reta s, paralela a t por O_2. 12 cm

Banco de imagens/Arquivo da editora

30. Determine a quantidade de retas tangentes comuns a duas circunferências que podemos traçar, no caso em que as circunferências são:

a) concêntricas distintas; 0 ponto.

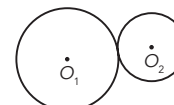
b) exteriores; 4 pontos.

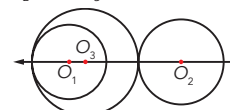
c) secantes; 2 pontos.

d) tangentes exteriormente; 3 pontos.

e) tangentes interiormente. 1 ponto.

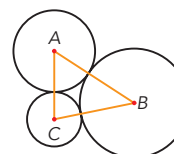
31. Determine a medida de distância O_1O_2 em cada item.

a) $r_1 = 6$ e $r_2 = 4$ 10

Banco de imagens/Arquivo da editora

b) $r_1 = 7$, $r_2 = 8$ e $r_3 = 10$ 21

Banco de imagens/Arquivo da editora

32. A distância entre os centros de duas circunferências tangentes internamente mede 5 cm. Sabendo que a soma das medidas dos raios é 11 cm, determine essas medidas. 8 cm e 3 cm.

33. A distância entre os centros de duas circunferências tangentes exteriormente mede 33 cm. Determine as medidas dos seus diâmetros sabendo que a razão entre as medidas dos seus raios é $\frac{4}{7}$. 24 cm e 42 cm.

34. Na figura, as circunferências são tangentes duas a duas, e os centros são os vértices do triângulo ABC. Sendo $AB = 7$ cm, $AC = 5$ cm e $BC = 6$ cm, determine as medidas dos raios das circunferências. 2 cm, 3 cm e 4 cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Arcos de circunferência

Arcos arquitetônicos

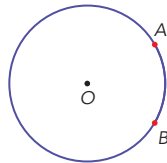
As ruínas de Anjar, cidade libanesa, foram declaradas Patrimônio Mundial pela Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco) em 1984.

Na imagem, os arcos de uma das ruínas.

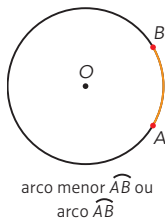
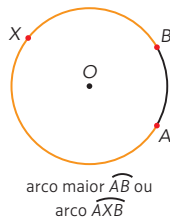
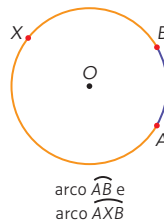
Para projetar arcos arquitetônicos, é necessário utilizar conceitos de **arcos de circunferência**, assunto que será abordado neste capítulo.

Richard Yoshida/Shutterstock

Ruínas de palácio da dinastia Omíada, na cidade de Anjar, no Líbano. Foto de 2016.

A figura seguinte representa uma circunferência de centro O e dois de seus pontos, A e B, que não são extremidades de um mesmo diâmetro.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Os dois pontos, A e B, permitem decompor a circunferência em duas partes chamadas de **arcos**:

- o arco menor $\overset{\frown}{AB}$;
- o arco maior $\overset{\frown}{AB}$, mais bem caracterizado com um ponto auxiliar X: arco $\overset{\frown}{AXB}$.

arco menor $\overset{\frown}{AB}$ ou arco $\overset{\frown}{AB}$

arco maior $\overset{\frown}{AB}$ ou arco $\overset{\frown}{AXB}$

arco $\overset{\frown}{AB}$ e arco $\overset{\frown}{AXB}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Os pontos A e B são extremidades ou extremos do arco $\overset{\frown}{AB}$ em qualquer um dos casos.

Sempre que se faz referência a um arco $\overset{\frown}{AB}$, considera-se o arco menor $\overset{\frown}{AB}$.

Orientações didáticas

Arcos de circunferência

Esse tópico permite uma articulação com outras áreas de conhecimento. Estimule os estudantes a pesquisar informações sobre as ruínas da cidade de Anjar em outras fontes. Também podem buscar com autonomia compreender o que caracteriza um Patrimônio Mundial.

Aproveite que o conceito de arco será abordado e proponha que os estudantes pesquisem na internet a importância e a função dos arcos na arquitetura e, também, o uso deles em diferentes culturas, por exemplo: romana, grega, árabe. Peça que redijam um texto contendo as informações pesquisadas e o que eles acham a respeito dessas obras.

É importante fazer com que o estudante perceba que um arco pode representar em algumas circunstâncias uma semicircunferência. Para isso, represente graficamente, na lousa, semicircunferências em diferentes posições de orientação.

Orientações didáticas

Semicircunferência

Trabalhe com os estudantes os saberes prévios sobre semicircunferência, ângulo central de uma circunferência e ângulos congruentes. Utilize ferramentas como régua, compasso, transferidor e aplicativos digitais para realizar desenhos de arcos.

Ângulo central

Neste tópico e nos 2 tópicos que seguem, existe uma importante conexão entre os conceitos de medida de comprimento do arco de circunferência (medida linear) e medida do ângulo central correspondente (medida angular). Utilize comparações para sugerir como as medidas de comprimento de linhas curvas podem ser realizadas – barbante, fita métrica, etc. Comente que como é mais difícil realizar essas medições, em geral, se dá preferência à medida angular.

Este é um conhecimento prévio útil na trigonometria do Ensino Médio, tratando de ângulo com medida superior a 180° no plano, e em assuntos correlatos de outras disciplinas, como a Física, no estudo dos movimentos circulares.

Arcos congruentes

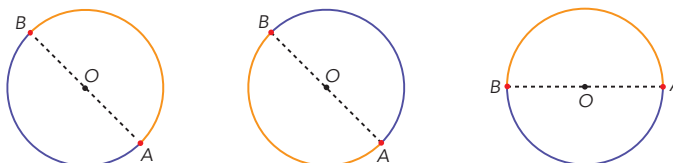
Ressalte que a cada arco de circunferência corresponde um ângulo central e vice-versa; eles têm a mesma medida angular.

Semicircunferência

Se os pontos A e B são extremidades de um diâmetro, cada uma das partes da circunferência determinadas por A e B é uma **semicircunferência**.

Uma semicircunferência também é um arco. Note as figuras a seguir.

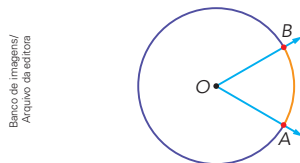
B O A B O A B O A

Banco de imagens/Arquivo da editora

Ângulo central

Um ângulo que tem o vértice no centro de uma circunferência é chamado **ângulo central** dessa circunferência.

Considere esta figura.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

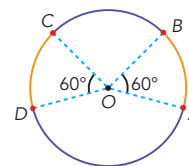
O B A

$A\hat{O}B$ é um ângulo central.
$\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$.

Arcos congruentes

Considere esta figura.
Os ângulos centrais $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são congruentes.
Os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ também são congruentes.
$\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$ se, e somente se, $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$.

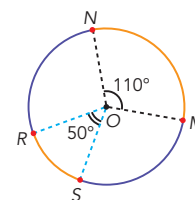
C B 60° 60° O D A

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Dois **arcos** de uma mesma circunferência são **congruentes** somente se os ângulos centrais correspondentes forem congruentes.

Em uma circunferência de centro O, um arco $\overset{\frown}{MN}$ é maior do que um arco $\overset{\frown}{RS}$ se a medida do ângulo central correspondente a $\overset{\frown}{MN}$ for maior do que a medida do ângulo central correspondente a $\overset{\frown}{RS}$.

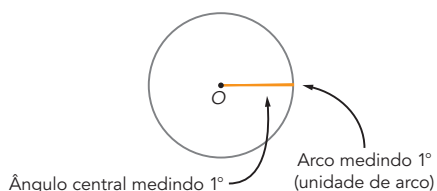
$$\text{med}(\overset{\frown}{MN}) > \text{med}(\overset{\frown}{RS}) \text{ se, e somente se, } \text{med}(M\hat{O}N) > \text{med}(R\hat{O}S).$$

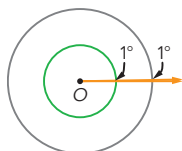
N 110° O M R 50° S

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Medida angular de um arco

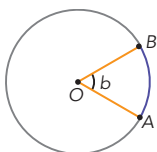
A **unidade de medida angular de arco** (ou arco unitário) é o arco determinado na circunferência por um **ângulo central de medida 1°**.

Ângulo central medindo 1°

Arco medindo 1° (unidade de arco)

Banco de imagens/Arquivo da editora

Considere a figura.

Banco de imagens/Arquivo da editora

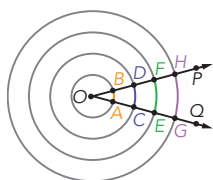
Nela estão representados **dois arcos** que medem 1° em circunferências concêntricas.

Considere agora a figura a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida angular do arco $\widehat{AB}$ é igual à medida do ângulo central $A\hat{O}B$, ou seja, $med(\widehat{AB}) = med(A\hat{O}B)$.

A **medida angular de um arco** é igual à medida do ângulo central correspondente a ele.

Exemplo

Banco de imagens/Arquivo da editora

$med(\widehat{AB}) = 30°$

$med(\widehat{CD}) = 30°$

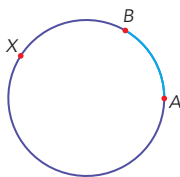
$med(P\hat{O}Q) = 30°$

$med(\widehat{EF}) = 30°$

$med(\widehat{GH}) = 30°$

Medida angular do arco maior

Na figura, o arco (menor) $\widehat{AB}$ mede 60°, ou seja, a medida angular dele é 60°. Vamos determinar quanto mede o arco (maior) $\widehat{AXB}$.

Como a circunferência completa corresponde a um ângulo que mede 360°, $med(\widehat{AB}) + med(\widehat{AXB}) = 360°$, então $med(\widehat{AB}) = 360° - med(\widehat{AXB}) = 360° - 60° = 300°$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Medida angular de um arco

Neste tópico, as medidas de comprimento de um arco são relacionadas às correspondentes medidas angulares.

Para compreensão da medida de arco, explore a figura apresentada como exemplo no livro e o tópico “Medida angular do arco maior”. Uma atividade interessante é propor aos estudantes que construam essa figura em papel sulfite utilizando compasso, régua e transferidor. Vá, gradativamente, fazendo-os perceber a relação entre o ângulo central dessas circunferências concêntricas e a medida angular de cada arco colorido.

Comente que aqui a medida do arco foi dada em termos do ângulo central, mas também é possível associar uma medida de comprimento a cada um dos arcos coloridos. Dessa maneira, espera-se que os estudantes reconheçam que, quanto maior é a medida do raio da circunferência, maior é o comprimento do arco associado. Claramente, o arco verde, por exemplo, é maior do que o arco laranja.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **35** parte do pressuposto de que a medida angular de uma circunferência completa é 360°; daí, é possível explorar com os estudantes a divisão da circunferência em ângulos de 60° e enumerar a quantidade de ângulos que componha uma volta inteira. Desse modo, reforce com os estudantes o conceito de medida angular de um arco, estimulando-os a utilizá-lo para resolver a atividade.

A atividade **37** associa o conceito de fração à parte de uma circunferência.

Na atividade **38**, relembre com os estudantes o conceito de medida angular abordado no tópico anterior e, se necessário, faça com eles a atividade na lousa convencional, na lousa digital ou até mesmo utilizando o GeoGebra.

Construção de polígonos regulares

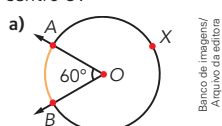
Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA15** e **EF08MA16** ao descrever os passos para a construção de polígonos regulares, por escrito e por meio de fluxograma, usando instrumentos de desenho, e mobiliza a **CEMAT06** ao propor a expressão em diferentes linguagens.

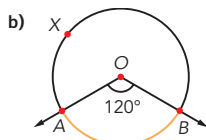
Este tópico apresenta procedimentos para que o estudante, munido de régua e compasso, consiga realizar a inscrição de um quadrado, de um triângulo equilátero e de um hexágono regular em circunferências.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

35. Determine a medida angular dos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AXB}$ e a medida dos ângulos $A\hat{O}B$ das circunferências de centro O.

a)

$med(A\hat{O}B) = 60°$; $med(\widehat{AB}) = 60°$; $med(\widehat{AXB}) = 300°$

b)

$med(A\hat{O}B) = 120°$; $med(\widehat{AB}) = 120°$; $med(\widehat{AXB}) = 240°$

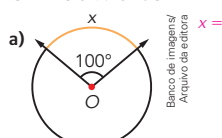
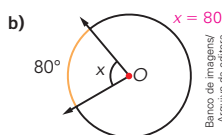
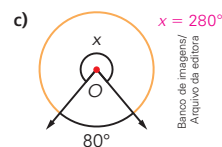
36. Sabendo que O é o centro da circunferência, determine o valor de x.

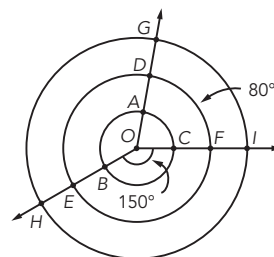
a)

$x = 100°$

b)

$x = 80°$

c)

$x = 280°$

37. Um arco corresponde a $\frac{1}{8}$ de uma circunferência. Quanto mede o ângulo central correspondente? 45°

38. Na figura, as circunferências são concêntricas, $med(\widehat{DF}) = 80°$ e $med(B\hat{O}C) = 150°$.

Determine as medidas:

a) dos ângulos $A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$;

b) angulares dos arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{EF}$, $\widehat{DE}$ e $\widehat{HI}$.

38. a) $med(A\hat{O}C) = 80°$; $med(A\hat{O}B) = 130°$

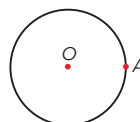
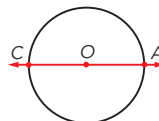
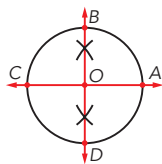
b) $med(\widehat{AB}) = 130°$; $med(\widehat{EF}) = 150°$; $med(\widehat{DE}) = 130°$; $med(\widehat{HI}) = 150°$

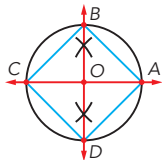
Construção de polígonos regulares

Nas construções a seguir, vamos fazer a divisão de uma circunferência em partes congruentes e construir polígonos regulares inscritos.

Divisão da circunferência em 4 partes congruentes

Dada uma circunferência, vamos dividi-la em 4 partes congruentes e construir um quadrado inscrito na circunferência usando régua e compasso.

1º) Marcamos um ponto A em qualquer lugar da circunferência.

2º) Traçamos a reta $\overleftrightarrow{OA}$ e chamamos de C o outro ponto em que essa reta intersecta a circunferência.

3º) Construímos a mediatriz do segmento de reta $\overline{AC}$ e chamamos de B e D os pontos em que a mediatriz intersecta a circunferência.

Banco de imagens/Arquivo da editora

4º) Ligamos os pontos obtendo o polígono $ABCD$, que é o quadrado procurado.

Banco de imagens/Arquivo da editora

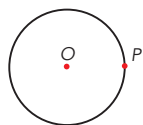
O procedimento equivale a dividir o ângulo central de 360° em 4 ângulos congruentes que medem 90° cada.

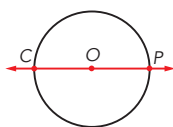
$$\text{med}(A\hat{O}B) = \text{med}(B\hat{O}C) = \text{med}(C\hat{O}D) = \text{med}(D\hat{O}A) = 90°$$

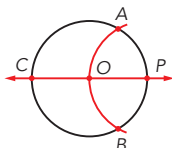
Os 4 triângulos obtidos, AOB, BOC, COD, DOA, são isósceles e congruentes.

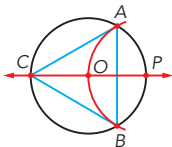
Divisão da circunferência em 3 partes congruentes

Dada uma circunferência, vamos dividi-la em 3 partes congruentes e construir um triângulo equilátero inscrito na circunferência usando régua e compasso.

1º) Marcamos um ponto P em qualquer lugar da circunferência.

Banco de imagens/Arquivo da editora

2º) Traçamos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e chamamos de C o outro ponto em que essa reta intersecta a circunferência.

Banco de imagens/Arquivo da editora

3º) Com centro em P e raio $\overline{PO}$, construímos um arco de circunferência e chamamos de A e B os pontos em que ele intersecta a circunferência.

Banco de imagens/Arquivo da editora

4º) Ligamos os pontos obtendo o polígono ABC, que é o triângulo equilátero procurado.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Os triângulos POA e POB são equiláteros; assim:

$$\text{med}(A\hat{O}B) = \text{med}(B\hat{O}C) = \text{med}(A\hat{O}C) = 120°.$$

Os 3 triângulos, AOB, BOC, COA, são isósceles e congruentes.

Orientações didáticas

Construção de polígonos regulares

As construções são detalhadas passo a passo, inclusive com o auxílio de imagens das etapas intermediárias. Ao final de cada construção, o procedimento é justificado pela congruência de triângulos.

Recomenda-se fortemente a realização conjunta das construções com a turma. Repare se os estudantes utilizam os instrumentos de desenho de modo seguro e correto. A estratégia de demonstrar o porquê de uma sequência construtiva em geometria é fundamental para reforçar o caráter completamente lógico da disciplina. Tudo decorre dos axiomas fundamentais, que por sua vez geram teoremas mais genéricos, que, utilizados com sabedoria, fornecem os ingredientes para a demonstração de qualquer propriedade específica.

Orientações didáticas

Construção de polígonos regulares

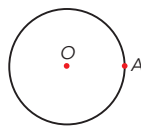
Na sequência, continuamos com a estratégia das construções geométricas iniciadas. Agora, a intenção é inscrever um hexágono regular em uma circunferência.

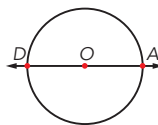
Novamente, o recurso usado com o compasso emula a construção de triângulo equilátero auxiliar. Esse polígono será formado 6 vezes. O lado mais externo de cada triângulo coincide com um dos 6 lados do hexágono procurado, e o vértice oposto a cada um desses lados coincide com o centro da circunferência. A estratégia é válida porque 2 triângulos equiláteros consecutivos nessa construção formam um ângulo que mede 120° (60° + 60°), que é a medida exata de cada ângulo interno do hexágono regular.

Há procedimentos específicos para a inscrição de outros polígonos regulares com régua e compasso – pentágono, heptágono, octógono, etc. Mas essa abordagem, nesse momento, fugiria do escopo do material.

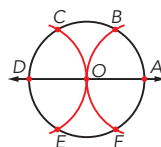
Divisão da circunferência em 6 partes congruentes

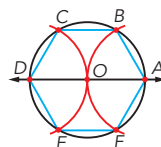
Dada uma circunferência, vamos dividi-la em 6 partes congruentes e construir um hexágono regular inscrito na circunferência usando régua e compasso.

1º) Marcamos um ponto A em qualquer lugar da circunferência.

Banco de imagens/Arquivo da editora

2º) Traçamos a reta $\overleftrightarrow{OA}$ e chamamos de D o outro ponto em que essa reta intersecta a circunferência.

Banco de imagens/Arquivo da editora

3º) Com centro em A e raio $\overline{AO}$, construímos um arco de circunferência que a intersecta nos chamados pontos B e F.

Com centro em D e raio $\overline{DO}$, construímos outro arco, que intersecta a circunferência nos chamados pontos C e E.

Banco de imagens/Arquivo da editora

4º) Ligamos os pontos obtendo o polígono $ABCDEF$, que é o hexágono regular procurado.

Banco de imagens/Arquivo da editora

O triângulos AOB, COD, DOE e AOF são equiláteros por construção. Agora, os triângulos BOC e EOF são isósceles com ângulo do vértice em O medindo 60° (180° − 120°), e, então, esses triângulos também são equiláteros. Um dos lados de cada um desses 6 triângulos equiláteros é uma corda, e a disposição dessas 6 cordas forma um hexágono regular.

Participe

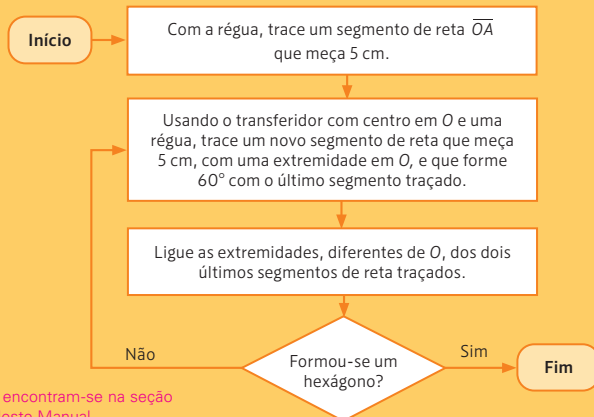
Faça as atividades no caderno.

Vamos recordar como ler e construir fluxogramas?

O fluxograma é um diagrama que detalha uma sequência de instruções para resolver um problema. Para isso, é preciso usar símbolos gráficos que representam cada etapa do processo.

Símbolo	Função
Início / Fim	Indica o início e o fim do fluxograma.
Ação	Indica a execução de uma ação.
Decisão	Indica uma pergunta com duas respostas possíveis: sim ou não.
Setas	Conectam os demais símbolos e indicam o sentido do fluxo do processo.

Agora, vamos conhecer outra maneira de construir um hexágono regular. O fluxograma a seguir apresenta as etapas de construção de um hexágono regular usando régua e transferidor.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

1. Transforme o fluxograma dado em um texto explicativo passo a passo, isto é, descreva o processo de construção do hexágono regular.
2. Adapte esse fluxograma para a construção de um hexágono regular de lado com qualquer medida, usando régua e transferidor.

Atividades

39., **40.** e **41.** As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Faça as atividades no caderno.

39. Construa um quadrado inscrito em uma circunferência de raio medindo 4 cm.

40. Construa um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência cujo diâmetro mede 6 cm.

41. A prefeitura de uma cidade está planejando realizar eventos esportivos anuais. Para a abertura de cada evento, será construído um lago circular com 6 chafarizes localizados em pontos da circunferência que delimita o lago, mantendo a mesma distância entre eles e todos a 3 m do centro do lago, onde as águas serão jorradas. Faça um esboço da vista superior dessa construção.

Orientações didáticas

Participe

As atividades presentes neste boxe favorecem o trabalho com a habilidade **EF08MA16**, ao descrever os passos da construção de um polígono regular por escrito e por meio de um fluxograma, e mobiliza a **CEMAT06**, ao propor a expressão em diferentes linguagens.

Retome com os estudantes o que é um fluxograma, os símbolos presentes nesse diagrama e suas funções para comunicar os comandos. Fluxogramas contribuem para a organização das ideias e a argumentação, aspectos importantes para o desenvolvimento do pensamento computacional, uma vez que são seguidas instruções, um passo a passo, para obter o resultado final.

Mas a fluência na língua materna também exige clareza e concisão. Por isso, a proposta de conversão do fluxograma em um texto explicativo passo a passo, que aparece como primeira atividade desse boxe, é bastante rica.

A segunda atividade propõe modificar o fluxograma apresentado para utilização na construção dadas quaisquer medidas.

Atividades

Este bloco final de atividades propõe que os estudantes pratiquem a construção de polígonos regulares (quadrado, triângulo equilátero e hexágono regular) na circunferência. Verifique se eles seguem os passos para cada construção e se utilizam os instrumentos de desenho corretamente. Auxilie-os, se necessário.

Orientações didáticas

Matemática e tecnologias

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA15**, ao propor a construção de polígonos regulares utilizando um *software* de Geometria, e mobiliza a **CEMAT05**, ao propor a utilização de tecnologias digitais para resolver problemas.

Ao final da construção **I**, que aborda mediatriz, proponha aos estudantes as seguintes atividades complementares utilizando o GeoGebra:

1) Explore com os estudantes a medida de abertura dos 4 ângulos formados pela mediatriz e o segmento de reta. Para isso, peça que selecionem o ícone "Ângulo" e cliquem no segmento de reta e depois na mediatriz. A medida de cada ângulo é 90°.

2) Peça aos estudantes que selecionem o ícone "Ponto" e marquem um ponto de intersecção da mediatriz com o segmento de reta (ponto *C*). Depois, selecionem o ícone "Distância, comprimento" e cliquem nos pontos *A* e *C*, e depois em *C* e *B*, obtendo assim a medida de comprimento e comprovando que o ponto *C* é equidistante dos pontos *A* e *B*.

3) Peça aos estudantes que selecionem o ícone "Mover" para alterar a posição do segmento de reta. Cliquem no ponto *A* e o movam pela tela. O que acontece com a mediatriz? E com as medidas de abertura dos ângulos e de comprimento no segmento de reta? A mediatriz se move junto com o segmento de reta, mas mantendo a medida de abertura dos 4 ângulos como 90°. Ao aumentar ou diminuir a medida de comprimento do segmento de reta, as medidas das 2 partes também se alteram, mas continuam congruentes entre si.

No 1º passo da construção **II**, comente que no GeoGebra a medida de abertura do ângulo é chamada de **amplitude**.

No 3º passo, deixe claro aos estudantes que as letras indicadas para nomear os pontos conforme as imagens que estão no Livro do Estudante podem ser outras, mas que a ordem em que os pontos são clicados é importante, por exemplo, se queremos a bissetriz do ângulo com origem no ponto *B*, então a bissetriz também deve ter origem no ponto *B*.

Matemática e tecnologias

Faça as atividades no caderno.

Construções geométricas no GeoGebra

Neste momento, vamos utilizar o GeoGebra para construir a mediatriz de um segmento de reta, os ângulos medindo 90° e 60° e as bissetrizes desses ângulos.

I – Construção da mediatriz de um segmento de reta

Para construir a mediatriz de um segmento de reta, siga estes passos:

1º) Na aba "Ferramentas", selecione o ícone "Segmento" e clique em 2 pontos distintos da tela.

Tela do GeoGebra após o 1º passo.

2º) Selecione o ícone "Mediatriz" e depois clique nos 2 pontos construídos no passo anterior.

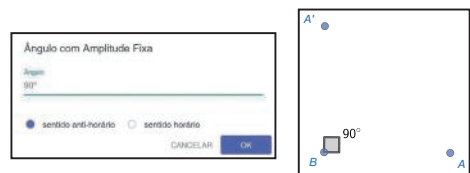
Tela do GeoGebra após o 2º passo.

Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

II – Construção de ângulos de medida dada e suas bissetrizes

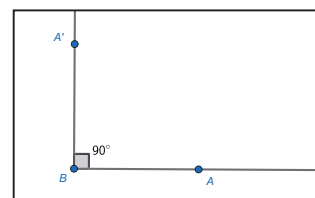
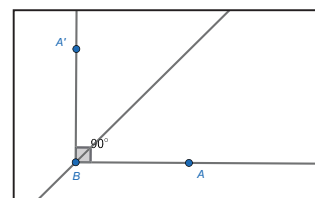
Para iniciar um novo trabalho, salve as construções já feitas e comece uma nova construção, clicando em "Limpar tudo".

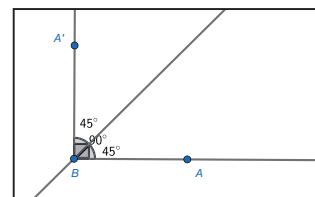
Agora, vamos construir ângulos medindo 90°, 60° e suas bissetrizes, formando os ângulos que medem 45° e 30°, respectivamente.

1º) Na aba "Ferramentas", selecione o ícone "Ângulo com amplitude fixa", depois clique em 2 pontos diferentes na tela de construção do GeoGebra. Na janela que abrir, digite 90°, escolha o sentido da construção do ângulo e clique em "OK".

Tela do GeoGebra após o 1º passo.

2º) Selecione o ícone "Semirreta", clique no ponto de origem do ângulo e depois em cada ponto já marcado.

Tela do GeoGebra após o 2º passo.

Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

3º) Selecione o ícone "Bissetriz" e clique nos pontos *A*, *B* e *A'*, nessa ordem. Uma reta com origem no ponto *B* será construída.

Tela do GeoGebra após o 3º passo.

4º) Para verificar a medida dos ângulos formados pela bissetriz, selecione o ícone "Ângulo" e clique na reta da bissetriz e em uma das semirretas que formam o ângulo inicial.

Tela do GeoGebra após o 4º passo.

1. Aplique o que você aprendeu! Repita os 4 passos anteriores e construa um ângulo de medida 60° e a bissetriz desse ângulo. Qual é a medida dos ângulos formados pela bissetriz do ângulo que mede 60°? 30°

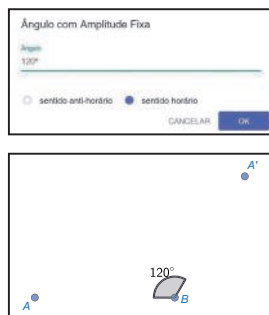
III – Polígonos regulares inscritos na circunferência

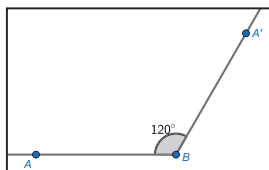
Vamos continuar utilizando o GeoGebra, agora para construir polígonos regulares inscritos na circunferência a partir da medida do ângulo central. Mas antes vamos aprender como calcular a medida do ângulo central de um polígono regular.

Para isso, temos que dividir 360° pela quantidade de lados que o polígono tem. Logo, se vamos construir um triângulo equilátero inscrito na circunferência a partir do ângulo central, devemos dividir 360° por 3, obtendo um ângulo central que mede 120°.

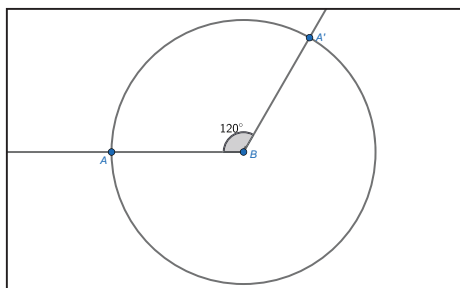
Para construir um triângulo equilátero inscrito na circunferência a partir do ângulo central, siga estes passos:

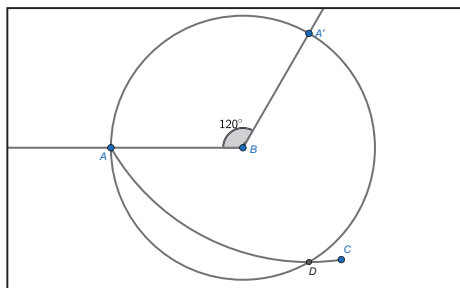
1º) Na aba "Ferramentas", selecione o ícone "Ângulo com amplitude", depois clique em dois pontos diferentes na tela de construção do GeoGebra. Na janela que abrir, digite 120°, selecione "Sentido horário" e clique em "OK", obtendo um ângulo que mede 120°.

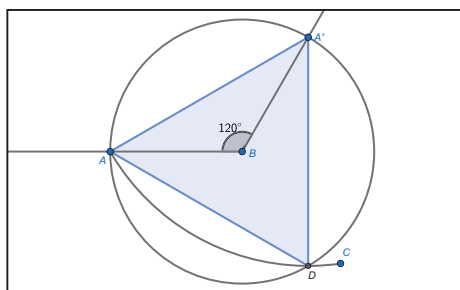
Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

Tela do GeoGebra após o 1º passo.

2º) Selecione o ícone "Semirreta", clique no ponto B e depois no ponto A, obtendo a semirreta $\overrightarrow{BA}$. Depois, clique no ponto B e no ponto A', obtendo a semirreta $\overrightarrow{BA'}$.

Tela do GeoGebra após o 2º passo.

3º) Agora, selecione o ícone "Círculo dados centro e um ponto", clique no ponto B e depois no ponto A, obtendo uma circunferência de centro B e com os pontos A e A' pertencentes a ela.

Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

Tela do GeoGebra após o 3º passo.

4º) Para transportar a medida de $\overset{\frown}{AA'}$, selecione o ícone "Arco circular", clique no ponto A' e depois em A. Um arco será formado ao deslocar o *mouse* de modo a obter um ponto de intersecção entre o arco e a circunferência. Selecione o ícone "Ponto" e marque o ponto D nessa intersecção.

Tela do GeoGebra após o 4º passo.

5º) Agora, selecione o ícone "Polígono" e clique nos pontos A, A', D e A nessa ordem, obtendo o triângulo equilátero $AA'D$.

Tela do GeoGebra após o 5º passo.

2. No caderno, escreva o passo a passo para a construção de um hexágono regular a partir da medida do ângulo central usando o GeoGebra.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Matemática e tecnologias

Ao final da construção **II**, que aborda da bissetriz, proponha aos estudantes a seguinte atividade complementar utilizando o GeoGebra:

Pergunte a eles qual é a relação entre a medida de abertura do ângulo formado e a medida dos ângulos que a bissetriz determina. A medida de abertura dos ângulos que a bissetriz determina é a metade da medida de abertura do ângulo formado.

Conhecer e utilizar ferramentas computacionais favorece o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes.

Orientações didáticas

Na mídia

Na BNCC

Esta seção, além de articular a Matemática com outras áreas de conhecimento, evidencia conquistas científicas como fruto da necessidade humana e do trabalho de muitas pessoas, mobilizando assim as **CEMAT01** e **CEMAT03**. Mobiliza também a **CEMAT08** ao propor pesquisas para responder a questionamentos. O texto apresentado favorece a exploração do TCT *Ciência e Tecnologia*, ao abordar o descobrimento e o estudo de fósseis.

O texto sobre a descoberta de um esqueleto de dinossauro instiga a curiosidade da maioria dos estudantes adolescentes. Proponha a eles que pesquisem as profissões de Geólogo e Paleontólogo, mobilizando assim o TCT *Trabalho*.

As descobertas paleontológicas decorrem de modelos cuidadosamente pensados, em confronto com as observações experimentais dos registros fósseis coletados, e com auxílio de técnicas e dispositivos dos mais modernos.

O trabalho normalmente é feito por uma equipe de grande porte, e há necessidade de fundos robustos para a pesquisa. Há os investigadores de campo, e os que tratam as informações coletadas para exibir as conclusões. Sem falar da logística envolvida em viagens a locais inóspitos, outros continentes, etc.

São exemplos a se destacar para a classe: trabalho em equipe, divisão de tarefas, utilização do método científico.

Aproveite as práticas de pesquisa sugeridas para reforçar a importância de nos basearmos em dados científicos para responder às perguntas propostas.

Na mídia

Faça as atividades no caderno.

Cientistas descobrem esqueleto de dinossauro

Uma equipe de paleontólogos apresentou [...] um dinossauro gigantesco que viveu há 77 milhões de anos na Patagônia argentina, com o esqueleto "mais completo" encontrado até hoje.

Este novo dinossauro, descrito na revista *Scientific Reports*, pertence à família dos titanossauros – dinossauros herbívoros encontrados em grande número no período Cretácico Superior – na região em que esse fóssil foi descoberto em 2005, na província de Santa Cruz (sul). A Patagônia argentina é o local onde habitaram os maiores dinossauros da Terra.

Mark A. Klinger/Carnegie Museum of Natural History/AFP

Ilustração do dinossauro *Dreadnoughtus schrani*, que viveu há 77 milhões de anos na Patagônia argentina.

Os cientistas estimam que o animal, que teria um pescoço muito comprido, media cerca de 26 metros de comprimento e pesava 60 toneladas. [...]

Durante quatro sessões de escavações, entre 2005 e 2009, os paleontólogos encontraram mais de 70% dos ossos, exceto os da cabeça, ou seja, mais de 45% do conjunto do esqueleto. [...]

Os cientistas também têm praticamente todos os ossos dos membros inferiores e superiores, incluindo um fêmur de 1,80 metro e um úmero. Isso permitiu descrever detalhadamente o animal e calcular de forma confiável suas impressionantes medidas.

Kenneth Lacovara, da universidade americana de Drexel (Filadélfia), coordenou a equipe que estudou o fóssil. [...]

Este dinossauro foi batizado de *Dreadnoughtus schrani*. *Dreadnought* significa "que não teme nada" em inglês antigo.

"Com um corpo do tamanho de uma casa, o peso de uma manada de elefantes e uma cauda usada como arma, o *Dreadnoughtus* não devia ter medo de nada", explicou Lacovara.

[...]

O termo *schrani* é uma homenagem ao empresário Adam Schran, que apoiou as pesquisas.

[...]

CIENTISTAS descobrem esqueleto de dinossauro "mais completo". *Exame*, São Paulo, 4 set. 2014. Disponível em: https://exame.com/ciencia/cientistas-descobrem-esqueleto-de-dinossauro-mais-completo/. Acesso em: 3 mar. 2022.

Sobre o texto, responda no caderno às questões a seguir.

1. O auge dos dinossauros foi no período chamado Cretáceo (ou Cretácico) – um período geológico da Terra dividido em Cretáceo Superior e Cretáceo Inferior. Pesquise: Há quantos milhões de anos decorreu o período Cretáceo Superior? Entre 100 milhões e 65 milhões de anos atrás.

2. Se o *Dreadnoughtus schrani* pudesse encostar a ponta de sua cauda na boca, adquirindo o formato aproximado de uma circunferência, a medida do diâmetro desta seria aproximadamente um terço da medida de comprimento do dinossauro. Quanto mediria o raio dessa circunferência? Aproximadamente 4,3 m

3. Pesquise qual é a medida de massa média de um elefante adulto. O dinossauro dessa reportagem tinha a medida de massa de aproximadamente quantos elefantes? Aproximadamente 6 000 kg ou 6 toneladas; aproximadamente 10 elefantes.

CAPÍTULO 14

Transformações geométricas

NA BNCC
EF08MA18

Recordando transformações

É possível encontrar na natureza, na arte e na arquitetura algumas transformações geométricas, como reflexão, translação e rotação.

Na arquitetura, por exemplo, temos os azulejos portugueses que decoram ambientes internos e externos, e em muitos deles é possível notar transformações geométricas.

Sergio Delle Vedove/Shutterstock

Fachada de casas tradicionais em Porto (Portugal). Foto de 2022.

No *site* https://www.natgeo.pt/historia/2020/02/esta-e-a-historia-por-tras-do-azulejo-portugues (acesso em: 8 abr. 2022) é possível saber mais da história do azulejo português e conhecer alguns locais em Portugal famosos por apresentar esses azulejos nas fachadas ou em ambientes internos. Aproveite para investigar características arquitetônicas presentes no município ou no estado em que você mora e, em grupo com os colegas, apresente sua pesquisa para a turma.

Prática de pesquisa

Participe

Faça as atividades no caderno.

Considere que o azulejo a seguir é um azulejo-padrão, pois será utilizado para fazer algumas transformações geométricas.

As imagens não estão representadas em proporção.

Ilustrações: Irina Primavera/Shutterstock

Analise as imagens e responda no caderno qual foi ou quais foram os movimentos necessários para formar as seguintes imagens. Exemplo de respostas:

a) Antes. Depois. Reflexão em relação ao lado direito do azulejo.

b) Translação na direção inclinada para cima e para a direita. Antes. Depois.

c) Antes. Depois. Rotação de 180° no sentido horário em relação ao canto inferior direito do azulejo.

Orientações didáticas

Recordando transformações

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA18** ao reconhecer e construir figuras obtidas por transformações geométricas com o uso de instrumentos de desenho e de *software* de geometria dinâmica. Mobiliza a **CEMAT05** ao propor a utilização de ferramentas matemáticas como instrumentos de desenho e tecnologias digitais para resolver problemas.

A introdução deste capítulo traz a imagem de uma das ruas estreitas em uma das cidades históricas de Portugal. A partir dela é possível que um debate seja instaurado na sala de aula mediado por você, de modo que os estudantes compartilhem seus saberes prévios e relembrem alguns conceitos de translação, reflexão e rotação e comentem exemplos dessas transformações que eles podem ter observado no dia a dia. É um momento importante para instaurar um ambiente de comunicação e argumentação de ideias matemáticas e, também, de investigação sobre o tema.

Participe

Este boxe traz a imagem de um azulejo cuja estampa remete a azulejos portugueses. Para representar a diversidade histórica e cultural do Brasil, pode-se usar esse contexto para destacar a presença desse tipo de azulejo em muitas construções arquitetônicas, consideradas patrimônios da humanidade, em cidades como São Luís, no Maranhão, e Olinda, em Pernambuco.

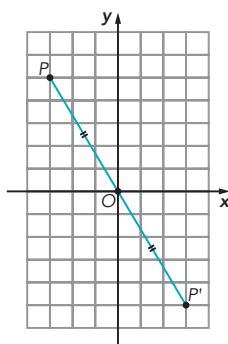
A atividade prepara os estudantes para o estudo que virá na sequência, explorando os 3 tipos de transformações geométricas: reflexão, translação e rotação, em muitos momentos com o apoio de malha quadriculada.

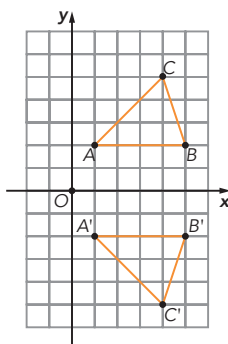
Orientações didáticas

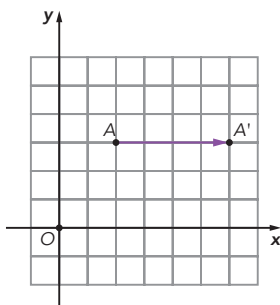
Recordando transformações

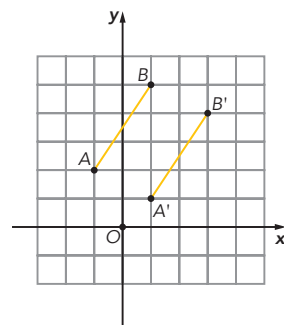
Para recordar com os estudantes as transformações geométricas, converse sobre os conceitos de simetria, abertura de ângulo, paralelismo e perpendicularismo entre retas, colinearidade de pontos e medida de segmento de reta. Explore com eles, por exemplo, na lousa digital, representações envolvendo esses conceitos para reforçar a aprendizagem.

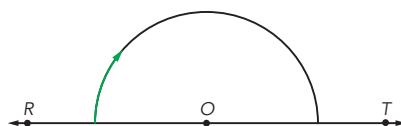
Já estudamos reflexões, translações e rotações no plano. Vamos relembrar:

- P' é o ponto simétrico de P em relação à origem O, ou P' é o ponto que se obtém pela reflexão de P na origem O.

Banco de imagens/Arquivo da editora

- O triângulo $A'B'C'$ é obtido pela reflexão do triângulo ABC em relação ao eixo x. Dizemos que $\triangle A'B'C'$ e $\triangle ABC$ são simétricos em relação ao eixo x.

Banco de imagens/Arquivo da editora

- Aplicando ao ponto A uma translação de 4 unidades para a direita, obtemos A'.

Banco de imagens/Arquivo da editora

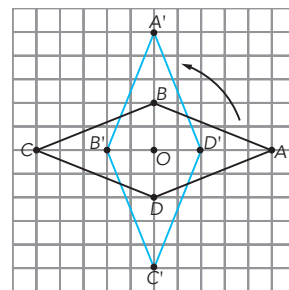
- O segmento de reta $\overline{A'B'}$ é obtido a partir do segmento de reta $\overline{AB}$ por meio de uma translação de 2 unidades à direita e 1 unidade para baixo.

Banco de imagens/Arquivo da editora

- A semirreta $\overrightarrow{OT}$ é obtida a partir da semirreta $\overrightarrow{OR}$ por rotação de 180°, em torno do ponto O, no sentido horário.

Banco de imagens/Arquivo da editora

O ponto A da semirreta $\overrightarrow{OR}$, a 2 cm de O, ficará sobre o ponto A' da semirreta $\overrightarrow{OT}$, a 2 cm de O.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dizemos que A' é o ponto que se obtém fazendo uma rotação de 180° do ponto A em torno do ponto O, no sentido horário.

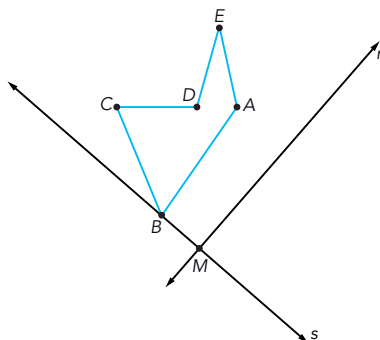
- O losango $A'B'C'D'$ é obtido pelo losango $ABCD$ por rotação de 90° em torno do seu centro O no sentido anti-horário.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Construção geométrica da reflexão

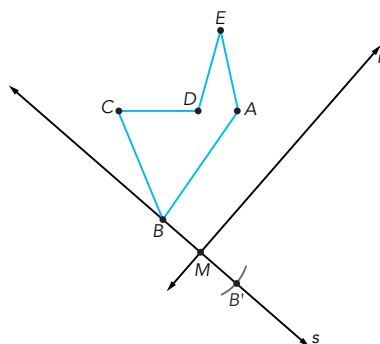
No 7º ano estudamos a reflexão em relação a uma reta usando, como apoio para as construções, uma malha quadriculada. Agora, vamos aprender a fazer essa construção com régua, compasso e esquadro.

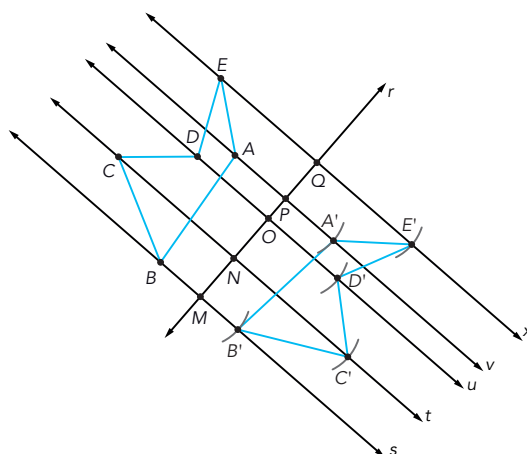
Vamos fazer a reflexão do polígono *ABCDE* em relação à reta *r*.

- **1º passo**: trace uma reta *s* perpendicular à reta *r* que passe pelo ponto *B*. Para isso, posicione o esquadro com um lado do ângulo que mede 90° alinhado com a reta *r* e o outro lado sobrepondo o ponto *B*. Justaponha a régua a esse lado do esquadro e trace a reta *s*. Nomeie *M* o ponto de intersecção das retas *r* e *s*.

E
C
D
A
r
B
M
s

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- **2º passo**: com a ponta-seca do compasso no ponto *M* e abertura até *B*, trace um arco que intersecta a reta *s*. Nomeie esse ponto *B*', pois é o ponto simétrico de *B* em relação a *M*.

E
C
D
A
r
B
M
B'
s

- **3º passo**: repita o 1º e o 2º passo para os pontos *C*, *D*, *A* e *E*, obtendo os respectivos pontos simétricos *C*', *D*', *A*' e *E*'. Depois, trace os segmentos de reta $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'A'}$, obtendo, assim, o polígono *A*'*B*'*C*'*D*'*E*'.

E
r
D
A
C
Q
P
O
A'
E'
B
N
D'
M
B'
C'
x
v
u
t
s

Orientações didáticas

Construção geométrica da reflexão

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA18** ao reconhecer e construir figuras obtidas por reflexão com o uso de instrumentos de desenho.

Este tópico apresenta um passo a passo para a construção da reflexão de um polígono. Comente que o polígono refletido é congruente ao original, ou seja, o comprimento dos lados e as medidas dos ângulos internos se mantêm e, também, é mantida a forma do polígono.

Destaque os ângulos do par de esquadros (45°, 45° e 90°; 30°, 60° e 90°) e deixe claro que, para traçar a reta perpendicular, o esquadro e a régua devem estar em contato.

É relevante trabalhar com a classe a conversão das instruções escritas passo a passo em um fluxograma, já que para cada vértice do polígono ocorre a repetição dos passos 1 e 2. Instruções que repetem passos são mais bem visualizadas na estrutura de fluxograma.

Orientações didáticas

Construção geométrica da translação

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA18** ao reconhecer e construir figuras obtidas por translação com o uso de instrumentos de desenho.

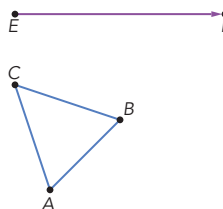
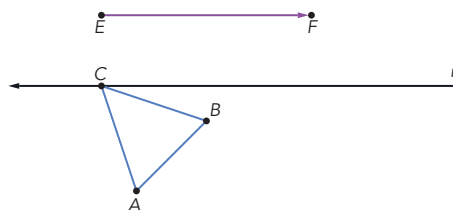
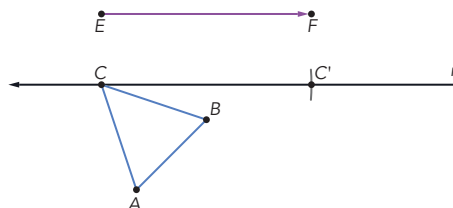
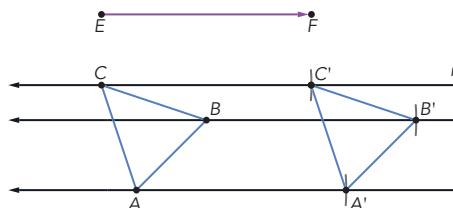
Neste tópico, a translação é realizada mediante o transporte de comprimento do segmento de reta com o compasso, e o transporte da direção do segmento de reta com o traçado de paralelas usando régua e esquadro. Comente que o polígono transladado é congruente ao original, ou seja, o comprimento dos lados e as medidas dos ângulos internos se mantêm e, também, é mantida a forma do polígono.

É relevante trabalhar com a classe a conversão das instruções escritas passo a passo em um fluxograma, já que para cada vértice do polígono ocorre repetição dos passos 1 e 2. Instruções que repetem passos são mais bem visualizadas na estrutura de fluxograma.

Construção geométrica da translação

No 7º ano estudamos a translação usando uma malha quadriculada como apoio para as construções. Agora, vamos aprender a fazer essa construção com régua, compasso e esquadro.

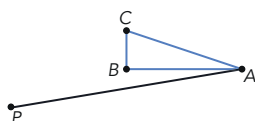
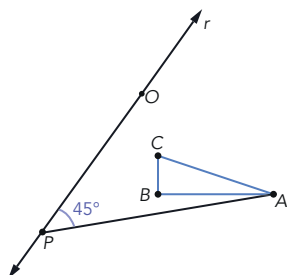
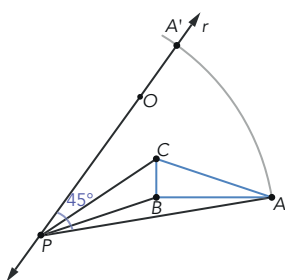
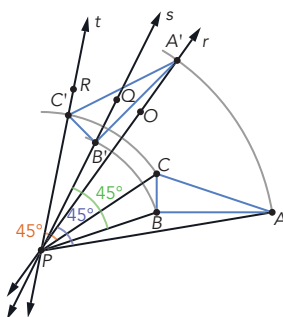
Vamos fazer a translação do triângulo *ABC* em relação ao segmento de reta $\overline{EF}$ orientado para a direita.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- **1º passo**: construa uma reta *r* paralela ao segmento de reta $\overline{EF}$ passando pelo ponto *C*. Para isso, alinhe o lado maior do esquadro com o segmento de reta $\overline{EF}$ e, com o auxílio da reta, deslize o esquadro paralelamente até o ponto *C* e trace a reta *r*.

- **2º passo**: precisamos transportar a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{EF}$ para a reta *r*; para isso, fixe a abertura do compasso colocando a ponta-seca no ponto *E* e abrindo-o até o ponto *F*. Depois, sem alterar a abertura do compasso, coloque a ponta-seca no ponto *C* e trace um arco que intersecte a reta *r*. Nomeie esse ponto de *C*', pois é o ponto simétrico de *C*.

- **3º passo**: repita o 1º e o 2º passo para os pontos *A* e *B*, obtendo os respectivos pontos simétricos *A*' e *B*'. Depois, trace os segmentos de reta $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{C'A'}$, obtendo, assim, o triângulo *A*'*B*'*C*'.

Construção geométrica da rotação

No 7º ano, estudamos a rotação usando uma malha quadriculada como apoio para as construções. Agora, vamos aprender a fazer essa construção com régua, compasso e transferidor.

Vamos fazer a rotação do triângulo *ABC* em relação ao ponto *P*, com uma medida de ângulo de 45°, no sentido anti-horário.

Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

- **1º passo**: com a régua, trace o segmento de reta $\overline{AP}$.
- **2º passo**: com o centro do transferidor no ponto *P* e alinhado com o segmento de reta $\overline{AP}$, marque um ponto *O* para indicar a medida de abertura de 45° do ponto *P* com o segmento de reta $\overline{AP}$. Depois, com a régua, trace uma reta *r* que passe pelos pontos *O* e *P*.
- **3º passo**: com a ponta-seca do compasso no ponto *P* e com a abertura até o ponto *A*, trace um arco, no sentido anti-horário, que intersecte a reta *r*. Nomeie o ponto de *A*', pois é o simétrico do ponto *A*.
- **4º passo**: repita o 1º, o 2º e o 3º passo para os pontos *B* e *C*, obtendo os respectivos pontos simétricos *B*' e *C*'. Depois, trace os segmentos de reta $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{C'A'}$, obtendo, assim, o triângulo *A*'*B*'*C*'.

Rotação é um movimento em torno de um ponto fixo, chamado **centro**.
Uma rotação fica determinada conhecendo-se o centro, a medida do ângulo de rotação e o sentido, horário ou anti-horário.

Orientações didáticas

Construção geométrica da rotação

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA18** ao reconhecer e construir figuras obtidas por rotação com o uso de instrumentos de desenho.

Novamente, o transporte de comprimentos de segmento de reta ocorre com o uso do compasso, enquanto a rotação das direções de cada segmento de reta com giro em ângulo fixo é obtida com o transferidor. Comente que o polígono rotacionado é congruente ao original, ou seja, o comprimento dos lados e as medidas dos ângulos internos se mantêm e, também, é mantida a forma do polígono.

É relevante trabalhar com a classe a conversão das instruções escritas passo a passo em um fluxograma, já que para alguns vértices do polígono ocorre repetição dos passos 1, 2 e 3. Instruções que repetem passos são mais bem visualizadas na estrutura de fluxograma.

Orientações didáticas

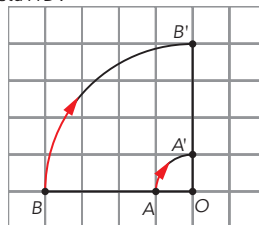
Construção geométrica da rotação

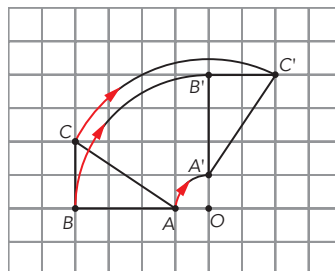
Nesta página há uma continuidade do estudo dos processos de construção geométrica da rotação de figuras. Agora, os exemplos apresentam ênfase em imagens apoiadas em malha quadriculada. O uso da malha favorece rotações de ângulos cujas medidas são frações simples da volta completa: meia-volta, um quarto de volta, um oitavo de volta, três quartos de volta, etc.

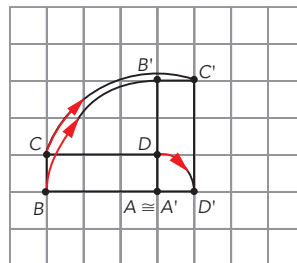
Se possível, exponha os exemplos na lousa digital, realizando as rotações. Questione os estudantes sobre dúvidas que possam ter.

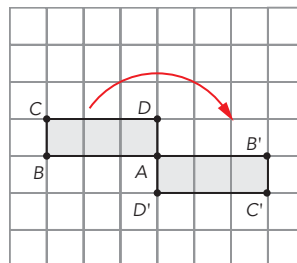
Acompanhe outros exemplos:

- Aplicando ao segmento de reta $\overline{AB}$ uma rotação de um quarto de volta no sentido horário, em torno do ponto O, obtemos o segmento de reta $\overline{A'B'}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

- Aplicando ao triângulo ABC uma rotação de um quarto de volta no sentido horário, em torno do ponto O, obtemos o triângulo $A'B'C'$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

- Vamos rotacionar um retângulo $ABCD$ em torno do vértice A.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Rotação do retângulo $ABCD$ em torno do ponto A, de 90°, no sentido horário.

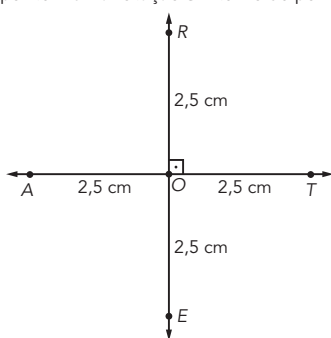
Banco de imagens/Arquivo da editora

Rotação do retângulo $ABCD$ em torno do ponto A, de 180°, no sentido horário.

3. c) Exemplo de resposta: Reflexão em torno do lado $\overline{CD}$ e rotação de 90° no sentido horário em torno do ponto de intersecção das diagonais do quadrado.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Na figura a seguir, que ponto se obtém aplicando ao ponto *A* uma rotação em torno do ponto *O*:

R
2,5 cm
A 2,5 cm O 2,5 cm T
2,5 cm
E

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) de meia-volta no sentido horário? *T*

b) de meia-volta no sentido anti-horário? *T*

c) de 90° de volta no sentido horário? *R*

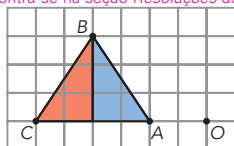
d) de 90° de volta no sentido anti-horário? *E*

e) de 270° (três quartos de volta) no sentido horário? *E*

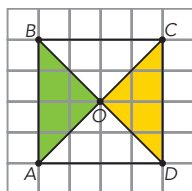
f) de uma volta completa no sentido horário? *A*

Nas atividades **2** a **7**, copie as figuras em malhas quadriculadas e faça as construções usando régua, compasso e transferidor. Pinte as figuras colocando as cores no devido lugar em suas posições finais.

2. Aplique ao triângulo *ABC* uma rotação de 90°, em torno do ponto *O*, no sentido horário.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

B
C A O

Banco de imagens/Arquivo da editora

3. Considerando o quadrado *ABCD*:

B C
O
A D

Banco de imagens/Arquivo da editora

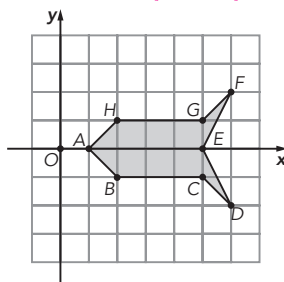
3. a) e b) A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) aplique uma rotação de 90° no sentido horário em torno do ponto *D*;

b) aplique uma rotação de meia-volta no sentido horário em torno do ponto *D*;

c) indique uma composição de translações e/ou rotações e/ou reflexões que produzam o mesmo efeito da transformação do item **a**.

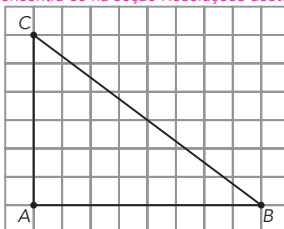
4. Aplique ao polígono *ABCDEFGH* uma rotação de meia-volta em torno da origem *O* no sentido anti-horário. Depois, responda às perguntas.
As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

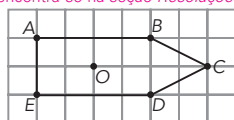
y
F
H G
A E
O x
B C
D

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Se a rotação for no sentido horário, como ficará o polígono?

b) Fazendo a reflexão do polígono *ABCDEFGH* no eixo *y*, como ficará a imagem?

5. Aplique ao triângulo *ABC* uma rotação de 45° no sentido anti-horário em torno do vértice *A*.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

C
A B

Banco de imagens/Arquivo da editora

6. Aplique ao polígono *ABCDE* uma rotação, no sentido anti-horário, de 90° em torno do ponto *O*.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

A B
O C
E D

Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

Proponha aos estudantes que façam essas atividades coletivamente, divididos em pequenos grupos. Após a realização, é interessante socializar todas as construções.

Repare que só foi apresentado um trecho muito restrito da malha por ser o livro não consumível. Para as transformações geométricas propostas nas atividades **2** a **6**, é necessário que haja espaço disponível na malha em torno da figura a ser transportada. Por isso, forneça papel quadriculado aos estudantes.

Na atividade **6**, verifique se eles percebem que o centro de rotação *O* é interno à imagem do polígono.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **7**, **8** e **12** continuam sendo apoiadas em malha quadriculada. Novamente, no livro aparece uma versão reduzida de um trecho de malha, por isso será necessária a aplicação da transformação em uma região maior do plano.

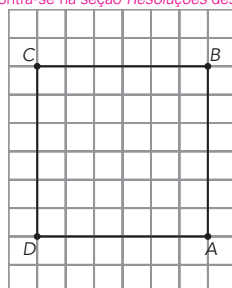
A atividade **11** não apresenta malha quadriculada porque propõe transformações de um segmento de reta. Mas os estudantes deverão copiar a figura no caderno ou em uma folha de papel avulsa e fazer as transformações pedidas. Corrija a atividade na lousa convencional ou, se possível, na lousa digital.

Na atividade **12**, não há uma única resposta para cada item – há diversas maneiras possíveis de transportar os polígonos pela malha até a posição final. Mesmo que sejam usadas as mesmas transformações, se a ordem dos passos for invertida, se trata de uma solução distinta.

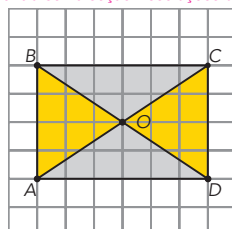
Faça as atividades no caderno.

7. Aplique ao quadrado *ABCD* uma rotação de 135° no sentido horário em torno do vértice *A*.

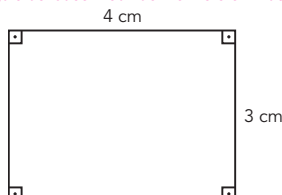
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Banco de imagens/Arquivo da editora

8. Aplique ao retângulo *ABCD* uma translação de 8 unidades para a direita, seguida de uma rotação de 90°, em torno do centro *O* no sentido horário.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Banco de imagens/Arquivo da editora

9. Aplicando uma translação a um retângulo de lados medindo 4 cm e 3 cm, que figura geométrica se obtém? E se for uma rotação?

Retângulo de lados medindo 4 cm e 3 cm. Idem.

Banco de imagens/Arquivo da editora

10. A translação e a rotação são movimentos que deslocam os pontos de uma figura.

Em uma figura geométrica, aplicar uma:

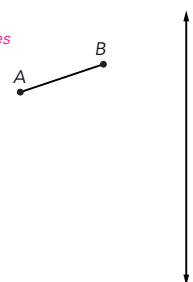
a) translação altera a forma da figura? Não.

b) translação altera o tamanho (as dimensões) da figura? Não.

c) rotação altera a forma ou o tamanho da figura? Não.

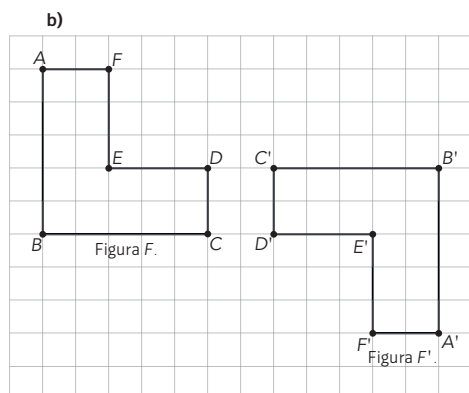
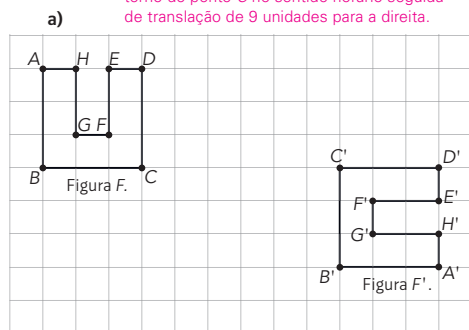
11. Aplique uma translação de 5 cm para baixo no segmento de reta $\overline{AB}$, obtendo $\overline{A'B'}$. Depois, obtenha $\overline{A''B''}$ pela reflexão de $\overline{A'B'}$ em relação à reta *r*.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Banco de imagens/Arquivo da editora

12. Identifique, em cada item, as transformações geométricas cuja composição leva a figura *F* à figura *F'*. Exemplo de resposta: Rotação de 90° em torno do ponto *C* no sentido horário seguida de translação de 9 unidades para a direita.

a)

Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

b)

Exemplo de resposta: Rotação de 180° em torno do ponto *D* no sentido horário seguida de translação de 2 unidades para baixo e 2 unidades para a direita.

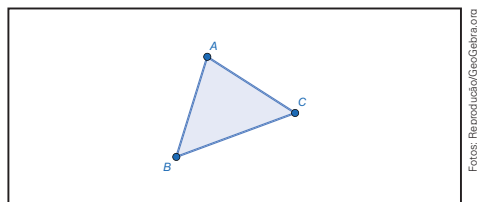
Matemática e tecnologias

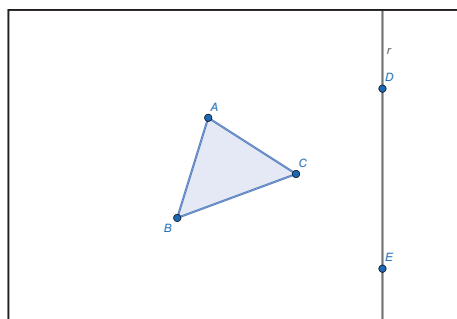
Faça as atividades no caderno.

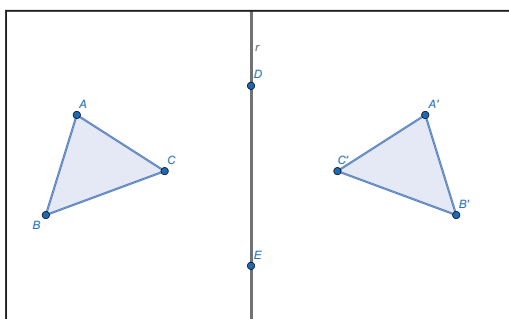
Transformações geométricas no GeoGebra

Verifique os passos que devem ser seguidos no GeoGebra para fazer as transformações geométricas estudadas neste capítulo.

1º) Na aba "Ferramentas", clique em "Polígono" e construa um triângulo *ABC* em qualquer lugar da tela.

Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

Tela do GeoGebra após o 1º passo.

2º) Selecione o ícone "Reta" e clique em 2 pontos distintos na tela de modo que não coincidam com o triângulo desenhado. Nomeie a reta de *r*.

Tela do GeoGebra após o 2º passo.

3º) Para fazer a **reflexão** do triângulo *ABC* em relação à reta *r*, clique no ícone "Reflexão em relação a uma reta", depois clique na região interna do triângulo e na reta *r*.

Tela do GeoGebra após o 3º passo.

Orientações didáticas

Matemática e tecnologias

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA18** ao propor a construção de figuras obtidas por transformações geométricas com o uso de *software* de geometria dinâmica. Mobiliza a **CEMAT05** ao propor a utilização de ferramentas matemáticas como instrumentos de desenho e tecnologias digitais para resolver problemas.

Para enriquecer o aprendizado, leve os estudantes ao laboratório de informática da escola para utilizar de maneira conjunta o *software* GeoGebra. Com as informações presentes no livro, permita que, de maneira autônoma, realizem as transformações geométricas aplicando os conhecimentos adquiridos neste capítulo.

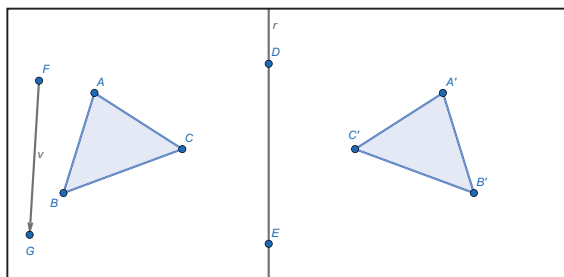
Comente com os estudantes que, no 1º passo, o GeoGebra nomeia o objeto como polígono, mas, na verdade, é construída uma região poligonal, pois a parte interna é preenchida.

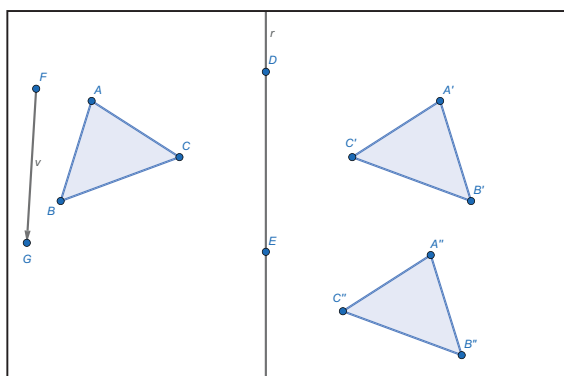
Orientações didáticas

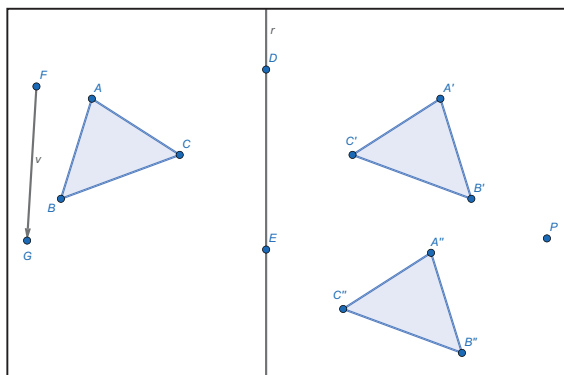
Matemática e tecnologias

Comente com os estudantes que, no 4º passo, a simbologia correta para representar um vetor é $\vec{v}$, mas o GeoGebra nomeia apenas como *v*. A orientação do vetor vai do primeiro ponto ao segundo ponto clicados.

4º) Selecione o ícone "Vetor" e clique em 2 pontos distintos na tela de modo a não coincidir com nenhuma construção feita anteriormente. Nomeie o vetor de *v*.

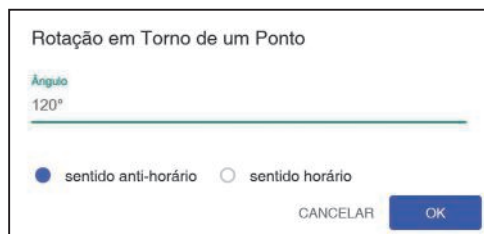
Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

Tela do GeoGebra após o 4º passo.

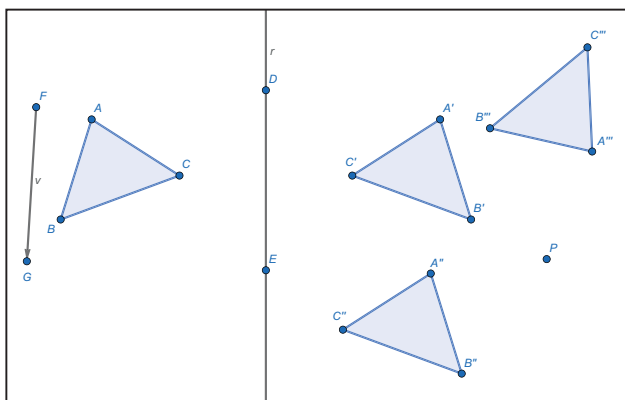
5º) Para fazer a **translação** do triângulo $A'B'C'$ em relação ao vetor *v*, clique no ícone "Translação por um vetor", depois clique na região interna do triângulo $A'B'C'$ e no vetor *v*.

Tela do GeoGebra após o 5º passo.

6º) Selecione o ícone "Ponto" e clique em 1 ponto na tela de modo a não coincidir com nenhuma construção feita anteriormente. Nomeie o ponto de *P*.

Tela do GeoGebra após o 6º passo.

Faça as atividades no caderno.

7º) Para fazer a **rotação** do triângulo $A''B''C''$ em relação ao ponto P, clique no ícone "Rotação em torno de um ponto" e depois clique na região interna do triângulo $A''B''C''$ e no ponto P. Na janela que abrir, escolha uma medida do ângulo e o sentido da rotação, depois clique em OK.

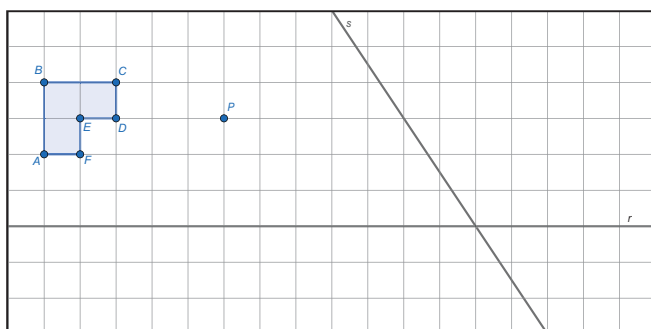
Rotação em Torno de um Ponto
Ângulo
120°
sentido anti-horário   sentido horário
CANCELAR   OK

Janela com indicação de rotação de 120° no sentido horário.

Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

Tela do GeoGebra após o 7º passo.

1. Aplique ao polígono *ABCDEF* cada uma das seguintes transformações:

a) rotação de 180° no sentido anti-horário em torno do ponto P;

b) translação de 5 unidades para a direita na direção da reta r;

c) reflexão em relação à reta s. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. Construa outras figuras, use sua criatividade e faça várias composições utilizando as transformações geométricas. Resposta pessoal.

Orientações didáticas

Matemática e tecnologias

A eficiência do trabalho com as transformações geométricas é ampliada quando um aplicativo como o GeoGebra é utilizado. Com esse tipo de programa, rotações de ângulos com medida não inteira são facilitadas.

Compreender o funcionamento das ferramentas tecnológicas e utilizá-las para resolver problemas contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

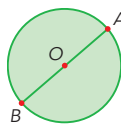
As atividades **1** e **2** abordam elementos da circunferência e do círculo, e as atividades **3** e **4** envolvem as posições relativas entre circunferências. Se os estudantes tiverem dificuldades em resolver essas atividades, retome os tópicos correspondentes fornecendo mais exemplos.

Se os estudantes tiverem dificuldades na atividade **5**, incentive-os a relembrar conceitos prévios, como ângulo e regra de três. Solicite que desenhem um círculo e o dividam em 12 partes iguais para representar o mostrador de relógio apresentado na atividade e, assim, efetuar as etapas propostas concretamente.

A atividade **6** requer que o estudante interprete qual é a escrita correta da distância do meteoro à Terra, usando notação científica. Essa atividade mobiliza o conhecimento aprendido sobre distância entre ponto e reta.

Na Unidade

1. Determine a medida do raio do círculo de centro O, dados: $AB = 3x - 3$ e $OA = x + 3$. $OA = 12$

Banco de imagens/Arquivo da editora

2. O raio de uma circunferência mede $r = \left(\frac{3x}{2} - 5\right)$ cm. Se o diâmetro mede 20 cm, determine x. $x = 10$

3. Duas circunferências de centros A e B são tangentes externamente e tangenciam internamente uma circunferência de centro C. Sendo $AB = 12$ m, $AC = 17$ m e $BC = 13$ m, determine as medidas dos raios dessas circunferências. 4 m, 8 m e 21 m.

4. Sejam C_1 e C_2 duas circunferências de raios medindo $r_1 = 2$ cm e $r_2 = 5$ cm, e d a medida de distância entre seus centros. Quantas retas tangentes comuns têm C_1 e C_2 para cada valor de d a seguir?

a) $d = 10$ cm 4 tangentes.
b) $d = 7$ cm 3 tangentes.
c) $d = 3$ cm 1 tangente.
d) $d = 4$ cm 2 tangentes.
e) $d = 1$ cm 0 tangente.

5. **(Saresp)** Um professor forneceu aos seus alunos um mostrador de relógio com um só ponteiro, conforme mostra a figura ao lado.

Em seguida, pediu aos alunos que seguissem as seguintes etapas, na ordem:

1ª etapa: girar o ponteiro 240° no sentido horário;

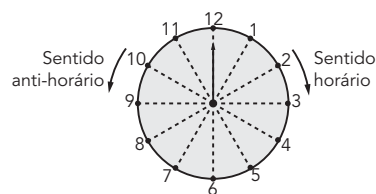
2ª etapa: a partir do ponto onde o ponteiro parou na 1ª etapa, girá-lo novamente 180° no sentido anti-horário;

3ª etapa: a partir do ponto onde o ponteiro parou na 2ª etapa, girá-lo novamente 90° no sentido horário.

Os alunos que executaram corretamente as três etapas pararam o ponteiro no número: Alternativa **d**.

a) 8.
b) 7.
c) 6.
d) 5.

Sentido anti-horário · Sentido horário

Banco de imagens/Arquivo da editora

6. **(Enem)** A Agência Espacial Norte-Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.

PD, JFS/VL/AFP

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a: Alternativa **d**.

a) $3,25 \cdot 10^2$ km.
b) $3,25 \cdot 10^3$ km.
c) $3,25 \cdot 10^4$ km.
d) $3,25 \cdot 10^5$ km.
e) $3,25 \cdot 10^6$ km

Faça as atividades no caderno.

7. (Enem) O losango representado na Figura **1** foi formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes, de raios de mesma medida.

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtém-se uma situação conforme ilustrada pela Figura **2**.

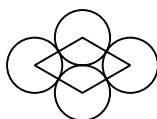



Figura 1.

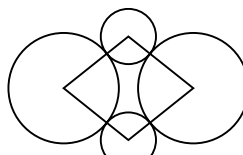



Figura 2.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

O perímetro do losango da Figura **2**, quando comparado ao perímetro do losango da Figura **1**, teve um aumento de: Alternativa **e**.

a) 300%.
b) 200%.
c) 150%.
d) 100%.
e) 50%.

8. Entre 2 cidades, cujos centros delas foram representados pelos pontos *A* e *B*, será construída uma via férrea de modo que ela seja equidistante de ambos os centros das cidades.

Analisando o mapa da região, os engenheiros precisam determinar o local onde a via férrea será construída. Qual conceito de lugar geométrico eles podem usar? Justifique sua resposta.

8. Mediatriz, pois a mediatriz do segmento de reta formado pelos pontos *A* e *B* é uma reta perpendicular que passa pelo ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$, dividindo-o em duas partes equidistantes do ponto médio, que será o local onde a via férrea deve ser construída.

9. Um condomínio com 3 torres de apartamentos, representadas pelos pontos *A*, *B* e *C*, está sendo reformado e os engenheiros estão analisando onde a piscina será construída.

A imagem a seguir é um esboço do mapa desse condomínio. Sabendo que a piscina deve ficar equidistante dos pontos *A* e *C* e, também, à mesma medida da distância das retas que representam as ruas que partem de *A*, reproduza o desenho no caderno e localize o ponto *D*, que representa a piscina que será construída.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

As imagens não estão representadas em proporção.

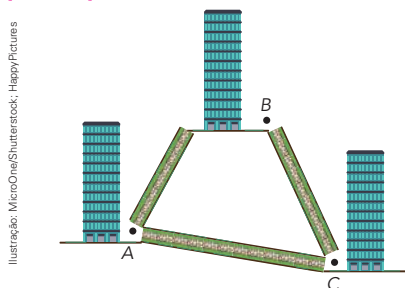



Ilustração: MicroOne/Shutterstock; HappyPictures

A B C

10. Um observador vê uma árvore sob um ângulo que mede 44°. Sabendo que os pontos *A* e *B* pertencem a uma circunferência de centro em *O*, qual é a medida angular do arco $\overset{\frown}{AB}$? 44°

Nikitina Olga/Shutterstock

A O B 44°

Yusril Habibu Kamla/Shutterstock

Orientações didáticas

Na Unidade

A atividade **7** requer que os estudantes relembrem os conceitos de circunferências tangentes entre si, propriedades do losango e porcentagem. Se tiverem dificuldades, é interessante resolver essa atividade coletivamente para ampliar a revisão e a exploração dos conteúdos.

Para a atividade **8**, é importante que os estudantes desenhem um esboço para representar a situação e assim visualizar o lugar geométrico. Erros nessa atividade indicam que os estudantes não compreenderam o conceito de mediatriz. Retome o tópico que traz esse conteúdo para sanar as dúvidas. Essa atividade favorece a argumentação matemática.

A atividade **9** já tem parte do esboço desenhado. Os estudantes devem copiá-lo para construir sobre ele a mediatriz do segmento de reta $\overline{AC}$ e a bissetriz do ângulo com vértice em *A*. O ponto de intersecção dessas figuras representa o local onde será construída a piscina. Erros nessa atividade indicam que os estudantes não compreenderam os conceitos de mediatriz e bissetriz. Retome-os para sanar as dúvidas.

A atividade **10** envolve a relação entre a medida angular do arco $\overset{\frown}{AB}$ e a medida do ângulo em *O*, que seria um ângulo central de uma circunferência com centro em *O* e cujos pontos *A* e *B* pertencem a ela. Erros nessa atividade indicam que os estudantes não compreenderam essa relação. Retome o tópico que traz esses conceitos, explorando as figuras lá representadas.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Proposta para o estudante

A atividade **10** menciona o **teodolito**, um instrumento de precisão óptico que mede ângulos e é aplicado em diversos setores, como na navegação, na construção civil, na agricultura e na meteorologia. Proponha aos estudantes a construção e a utilização de um teodolito.

Para a construção, acesse:

COMO fazer um teodolito caseiro (tutorial). [*s. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (6 min 33 s). Publicado pelo canal Felipe Olavo – Experimática. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Av-knx92Eho.

Para a utilização, acesse:

TEODOLITO para calcular altura de objetos inacessíveis. [*s. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (23 min 48 s). Publicado pelo canal Felipe Olavo – Experimática. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=vHy--h5HYwM. Acesso em: 24 jun. 2022.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da Unidade mobiliza com maior ênfase a **CEMAT03** e a **CEMAT05** ao abordar ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais, aplicadas a situações da Economia, integrando assim a Matemática com essa área do conhecimento. Por isso, favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Financeira*, ao explorar a temática de investimentos como uma operação financeira.

O texto de abertura da Unidade contém informações importantes sobre Economia que podem contribuir para a compreensão de aspectos relacionados ao TCT *Educação Financeira*.

UNIDADE 8

Área, volume e variação de grandezas

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- resolver e elaborar problemas que envolvem medidas de área de figuras geométricas;
- resolver e elaborar problemas que envolvem medidas de volume;
- identificar a relação de proporcionalidade direta, inversa ou de não proporcionalidade entre duas grandezas;
- resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

CAPÍTULOS

Reprodução do Livro do Estudante em tamanho reduzido.

O que são investimentos?

Entendemos investimento como uma operação financeira na qual se aplica uma quantia em um negócio visando um retorno (lucro) dessa aplicação. Alguns investimentos adotam como rentabilidade os principais índices e taxas dos mercados financeiros nacional e internacional; no caso do Brasil, temos as taxas Certificado de Depósito Interbancário (CDI), Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), Sistema Especial de Liquidação e Custódia (Selic) e Índice da Bolsa de Valores do Estado de São Paulo (Ibovespa). Os investimentos são classificados em relação à incerteza de se obter a rentabilidade esperada – essa incerteza é chamada de risco (baixo, médio ou alto risco) – e à medida de tempo para gerarem retorno (curto, médio ou longo prazo).

- CDI: taxa média que os bancos praticam emprestando valores entre si, sempre considerando a quitação do empréstimo em 1 dia;
- IPCA: principal indicador de inflação do Brasil, calculado mensalmente pelo IBGE;
- Selic: taxa básica de juros do país, definida pelo Banco Central em reuniões periódicas do Comitê de Políticas Monetárias (Copom);
- Ibovespa: soma das cotações das principais ações listadas na Bolsa de Valores de São Paulo.

A partir dos anos 2000, com o avanço das tecnologias de criptografia, surgiram criptomoedas, um tipo de ativo financeiro por meio do qual as operações (compra, venda, transferências, etc.) são validadas eletronicamente, sem a necessidade de uma instituição financeira para intermediá-las.

Fonte dos dados: CORACCINI, Raphael. Selic, IPCA e CDI: saiba o que são esses indicadores e qual a relação entre eles. *CNN Brasil*, [s. l.], 23 ago. 2021. Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/business/selic-ipca-e-cdi-saiba-o-que-sao-esses-indicadores-e-qual-a-relacao-entre-eles/. Acesso em: 17 fev. 2022.

Você conhece alguém que costuma fazer investimentos? De que tipos de investimento você já ouviu falar?

Você já ouviu falar de criptomoeda? Sabe como fazer para comprar e vender esse tipo de ativo financeiro? Respostas pessoais. Sobre criptomoedas, consulte: CASTELLO, Melissa Guimarães. *Bitcoin é moeda?* Classificação das criptomoedas para o direito tributário. *Revista Direito GV*, São Paulo, 28 out. 2019. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rdgv/a/vz4x6BdS7znmfYFVmFrCY3C/. Acesso em: 8 mar. 2022.

Rocketclips, Inc./Shutterstock

Analistas financeiros lançam mão de diferentes gráficos para a tomada de decisão por um ou outro ativo financeiro. A análise de gráficos no mercado financeiro é conhecida também por análise técnica.

Orientações didáticas

Abertura

Desenvolva estratégias de leitura que promovam a argumentação e a formulação de inferências. Por exemplo: proponha aos estudantes uma pesquisa em diferentes fontes confiáveis para que eles identifiquem os valores atuais dos indicadores CDI, IPCA, Selic e Ibovespa, e emitam posicionamentos críticos sobre a interferência desses índices no aumento da inflação e, consequentemente, no aumento dos preços das mercadorias, dos aluguéis, etc.

Orientações didáticas

Área

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento das habilidades: **EF08MA19** e **EF08MA21** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo a área de polígonos e do círculo e o volume de bloco retangular; **EF08MA20**, ao relacionar volume e capacidade e suas unidades de medida. Mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02** e a **CEMAT03** ao relacionar diferentes campos da Matemática, permitindo que se desenvolvam a investigação, o raciocínio lógico, a reflexão e a análise crítica na busca de soluções; e a **CG02**, quando os estudantes usam a imaginação e a criatividade para formular problemas.

Para iniciar este tópico, pergunte aos estudantes o que eles lembram do conceito de área e quais são as principais unidades de medida utilizadas. Comente que esse conceito já foi estudado em anos anteriores e que nesta Unidade ele é ampliado com as demonstrações para as fórmulas de cálculo da medida de área de algumas figuras geométricas.

Medida de área do retângulo

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA19** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo medida de área do retângulo e do quadrado.

Verifique se os estudantes lembram quais características um quadrilátero deve ter para ser classificado como retângulo. Comente que o quadrado também é um retângulo e, por isso, a fórmula para calcular a medida de área dele é a mesma. Chame a atenção para o fato de o quadrado ter todos os lados com mesma medida de comprimento, o que possibilita representar a fórmula da medida de área como o quadrado da medida do lado.

CAPÍTULO 15

Área e volume

NA BNCC
EF08MA19
EF08MA20
EF08MA21

Área

O gramado do campo

A direção de uma escola quer trocar a grama de um campo de futebol retangular cujas dimensões medem 66 m por 100 m. Qual será a medida de área de grama necessária?

Uma superfície plana ocupa certa porção do plano. A extensão ocupada por uma superfície plana é chamada de **área** da superfície. A **medida de área** expressa quantas vezes uma unidade de medida de área cabe na superfície.

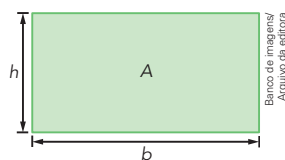
As principais unidades de medida de área são: centímetro quadrado (cm^2), metro quadrado (m^2) e quilômetro quadrado (km^2).

Nesta coleção, quando dizemos "área do retângulo", estamos nos referindo à área da região retangular, que é constituída pelo retângulo e o interior dele, e representaremos as figuras como regiões do plano (contorno + interior). Assim, usamos "área do quadrado" para a área da região quadrada, "área do triângulo" para a área da região triangular, etc.

Para medir a área de uma superfície plana cujo formato lembre um retângulo, um quadrado, um paralelogramo, um triângulo, um losango ou um trapézio, geralmente usamos fórmulas matemáticas que estudamos em anos anteriores. Nas páginas seguintes, relembraremos e ampliaremos esse estudo.

Medida de área do retângulo

A medida de área do retângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura. Indicamos: A para a medida de área, b para a medida da base, h para a medida da altura.

Temos:

$A = b \cdot h$

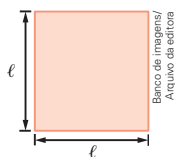
As medidas da base e da altura devem estar na mesma unidade de medida de comprimento. Se essa unidade for o centímetro, a medida de área será dada em centímetros quadrados; se a unidade for o metro, a medida de área será dada em metros quadrados, etc.

Agora, podemos resolver o problema do gramado do campo. O campo de futebol cuja medida de área queremos calcular é representado por um retângulo cuja base (ou comprimento) mede 100 m e a altura (ou largura) mede 66 m. Temos:

$$\left.\begin{matrix} b = 100 \text{ m} \\ h = 66 \text{ m} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = b \cdot h = 100 \text{ m} \cdot 66 \text{ m} = 6\,600 \text{ m}^2$$

Portanto, serão necessários 6 600 m^2 de grama para cobrir o campo de futebol.

Medida de área do quadrado

Representando a medida do lado do quadrado por ℓ e aplicando a fórmula da medida de área do retângulo, pois todo quadrado é um retângulo, temos:

Banco de imagens/ Arquivo da editora

$$\left.\begin{matrix} b = \ell \\ h = \ell \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = b \cdot h = \ell \cdot \ell = \ell^2$$

Logo, a medida de área do quadrado é igual ao quadrado da medida do lado.

$$A = \ell^2$$

Confira este exemplo.

Um quadrado cujo lado mede 2,5 cm tem medida de área:

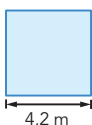
$$A = \ell^2 = (2{,}5 \text{ cm})^2 = 6{,}25 \text{ cm}^2$$

As imagens não estão representadas em proporção.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

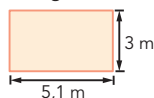
1. Determine a medida de área da figura em cada um dos itens a seguir.

a) quadrado 17,64 m²

b) retângulo 15,3 m²

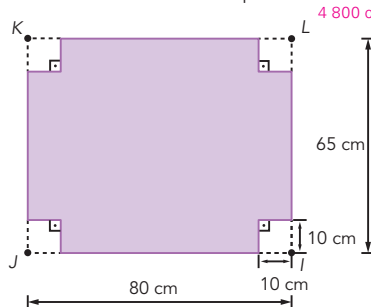
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4,2 m

3 m

5,1 m

2. De uma região retangular *IJKL* recortou-se 4 regiões quadradas com as mesmas medidas dos lados. Calcule a medida de área da superfície colorida. 4 800 cm²

Banco de imagens/Arquivo da editora

K L J I 65 cm 10 cm 80 cm 10 cm

3. A restauração florestal reconstrói a vegetação nativa de uma região afetada pela atividade humana para que a natureza, gradualmente, recupere a biodiversidade e a sustentabilidade que havia no local. No Brasil, até fevereiro de 2021, a região florestal restaurada correspondia a, aproximadamente, 110 826 campos do Maracanã. Pode parecer muito, mas a ação humana afeta a natureza em escala muito maior, sendo necessária a preservação ambiental para que iniciativas como a restauração florestal surtam efeito.

Bronis e Drones/Shutterstock

A Mata Atlântica é o bioma do Brasil com a maior restauração florestal. Foto de 2019.

Fontes dos dados: MAPEANDO a restauração, regeneração e reflorestamento no Brasil. *Observatório da restauração e reflorestamento*, [s. l.], [20–]. Disponível em: https://observatoriodarestauracao.org.br/app/dashboard. Acesso em: 17 fev. 2022; ANDRADE NETTO, Dilson S. de A. (coord.). *Cartilha de restauração florestal de áreas de preservação permanente, Alto Teles Pires, MT*. [s. l.]: The Nature Conservancy, jun. 2015. Disponível em: http://www.lerf.eco.br/img/publicacoes/TNC_Cartilha_MT_INTERATIVO_17-9-2015.pdf. Acesso em: 17 fev. 2022.

Considerando que as dimensões do campo do Maracanã medem 105 m por 68 m, aproximadamente quantos hectares foram restaurados no Brasil até fevereiro de 2021? Aproximadamente 79 130 hectares.

Hectare (ha) é uma unidade de medida de área geralmente usada para superfícies agrárias; 1 ha equivale a 10 000 m².

4. A base de um retângulo mede o dobro da altura dele. Sabendo que a área dessa figura mede 72 cm², determine as medidas das dimensões desse retângulo. 12 cm; 6 cm.

5. Elabore um problema em que seja necessário calcular a medida de área de um retângulo que tenha 20 m de medida de comprimento por 12 m de medida de largura.

5. Exemplo de resposta: A medida de comprimento de um retângulo é 20 cm, e a largura dele mede 12 cm. Calcule a medida de área desse retângulo. Resposta: 104 cm².

Orientações didáticas

Atividades

Nas atividades **1** e **2**, os estudantes devem aplicar a fórmula para calcular a medida de área de quadrados e de retângulos. Peça que compartilhem a resolução da atividade **2** com o intuito de verificar as diferentes estratégias para calcular a medida de área da superfície colorida. Eles podem decompor a área da superfície colorida em 5 retângulos, calcular a medida de área de cada um e somá-las ou calcular a medida de área do retângulo maior e subtrair a medida de área dos 4 quadrados dos cantos.

O contexto da atividade **3** possibilita promover um debate em sala de aula, de modo a favorecer o desenvolvimento dos TCTs *Educação Ambiental* e *Saúde*, ao abordar o tema sobre desmatamento e os impactos na Economia e na Saúde e os benefícios da restauração florestal. Pode ser feito um trabalho interdisciplinar com o componente curricular **Geografia**, por exemplo, uma pesquisa sobre as diversas regiões florestais do Brasil e como estão ou não sendo preservadas atualmente.

Na atividade **5**, peça que cada estudante elabore um problema de acordo com o que é proposto no enunciado da atividade e depois o troque com um colega para que cada um resolva o problema que o outro elaborou. Isso mobiliza a interação entre os pares e possibilita a análise crítica quando eles verificam se o problema elaborado apresenta todos os dados necessários para responder à pergunta. Essa atividade contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Proposta para o estudante

Pesquise as dimensões de um campo oficial de futebol e a medida de área atual de desmatamento no Brasil. Faça a equivalência comparando quantos campos de futebol representam a superfície desmatada. Escreva um texto com as informações que você pesquisou relatando a importância do reflorestamento.

Orientações didáticas

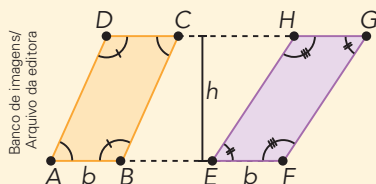
Medida de área do paralelogramo

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA19** ao propor a resolução de problemas envolvendo medida de área do paralelogramo.

A explicação neste tópico mostra porque a medida de área do paralelogramo também é calculada multiplicando os valores das medidas da base e da altura, assim como é feito para calcular a medida de área do retângulo.

Comente com os estudantes que 2 paralelogramos com mesma medida da base e mesma medida da altura possuem a mesma medida de área, independentemente se os ângulos internos têm a mesma medida ou não.

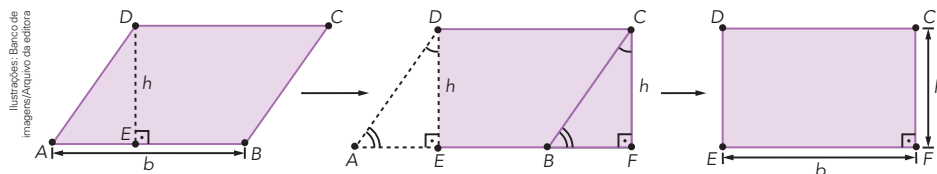
Banco de imagens/ Arquivo da editora

Atividades

As atividades **6** a **8** mobilizam a compreensão da aplicabilidade dos conceitos estudados. Explore com os estudantes a leitura e a interpretação dos enunciados. Aproveite esse momento para analisar as dificuldades dos estudantes e retome algum conceito que for importante.

Medida de área do paralelogramo

Representando por b a medida da base do paralelogramo e por h a medida de altura dele, já estudamos que sua medida de área é dada por $A_{\square} = b \cdot h$.

Podemos aplicar nossos conhecimentos sobre congruência de triângulos para mostrar esse fato. Acompanhe.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Perceba que:

- $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ lados opostos do paralelogramo;
- $D\hat{A}E \cong C\hat{B}F$ ângulos correspondentes considerando as retas paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ e a transversal $\overleftrightarrow{AB}$;
- $A\hat{E}D \cong B\hat{F}C$ ângulos retos.

Logo, pelo critério LAA$_o$, os triângulos $\triangle AED$ e $\triangle BFC$ são congruentes.

Desse modo, podemos decompor o paralelogramo e recompô-lo em um retângulo. Logo, a medida de área do paralelogramo $ABCD$ é igual à medida de área do retângulo $EFCD$.

Portanto, a medida de área do paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.

$$A = b \cdot h$$

Verifique este exemplo.

Vamos calcular a medida de área de um paralelogramo tal que $b = 8$ cm e $h = 4$ cm:

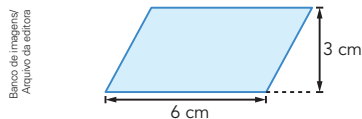
$$A = b \cdot h = 8 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 32 \text{ cm}^2$$

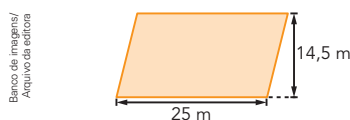
Como as medidas da base e da altura estão em centímetros, a medida da área desse paralelogramo é 32 cm^2.

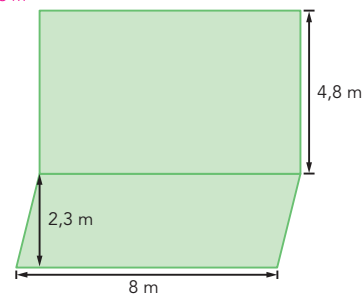
Atividades

Faça as atividades no caderno.

6. Calcule a medida de área do paralelogramo representado a seguir. 18 cm^2

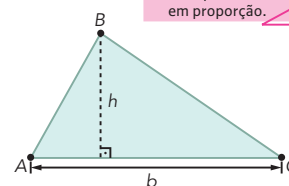
Banco de imagens/ Arquivo da editora

7. Considere o terreno de uma casa, que tem o formato de um paralelogramo, representado a seguir. Determine a medida de área do terreno. 362,5 m^2

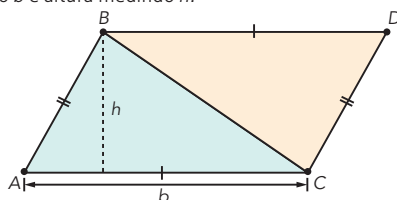
Banco de imagens/ Arquivo da editora

8. Determine a medida de área do jardim representado a seguir, cujo formato é composto da região limitada por um retângulo e um paralelogramo. 56,8 m^2

Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Medida de área do triângulo

Em um triângulo, podemos considerar qualquer um dos 3 lados como base, cuja medida será representada por b. A medida da altura relativa à base escolhida será indicada por h; ela corresponde à medida da distância de um dos vértices à reta definida pelo lado oposto a esse vértice.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Para entendermos como podemos calcular a medida de área de um triângulo, vamos considerar um paralelogramo *ABCD* de base medindo *b* e altura medindo *h*.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Observe que, traçando uma de suas diagonais, esse paralelogramo fica dividido em 2 triângulos congruentes *ABC* e *CDB*, pelo critério LLL. Como os triângulos possuem a mesma medida de área, podemos concluir que a medida de área de um triângulo corresponde à metade da medida de área de um paralelogramo de mesma medida da base e da altura:

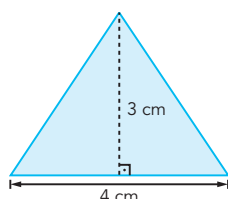
$$A_{\triangle ABC} = \frac{A_{\square ABDC}}{2} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{b \cdot h}{2}}$$

De maneira geral, a medida de área de um triângulo corresponde à metade do produto da medida da base pela medida da altura.

Analise este exemplo.

Vamos calcular a medida de área do triângulo representado a seguir:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}{2} = 6\text{ cm}^2$$

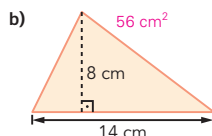
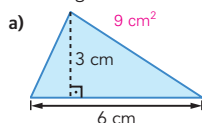
Banco de imagens/Arquivo da editora

Como as medidas da base e da altura estão em centímetros, a medida de área é 6 cm^2.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

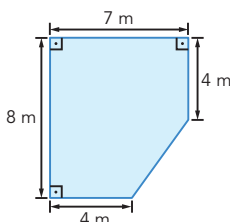
9. Calcule a medida de área de cada um dos seguintes triângulos.

a) 9 cm^2 (3 cm; 6 cm)

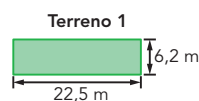
b) 56 cm^2 (8 cm; 14 cm)

10. Calcule a medida de área do terreno cuja planta baixa está representada a seguir. 50 m^2

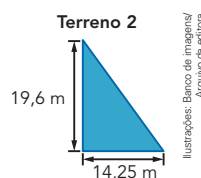
(7 m; 4 m; 8 m; 4 m)

As imagens não estão representadas em proporção.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

11. Carla deseja comprar um terreno na cidade de Teresina (PI) para construir uma casa. As opções oferecidas por uma imobiliária são as seguintes: uma retangular e uma triangular.

Terreno 1 (22,5 m; 6,2 m) — Terreno 2 (19,6 m; 14,25 m)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

O terreno **2**, pois a área dele mede 139,65 m^2, enquanto a área do terreno **1** mede 139,5 m^2.

Sabendo que Carla procura um terreno com a maior medida de área possível, qual é a melhor opção para ela?

12. No caderno, elabore um problema que envolva a medida de área de um triângulo cuja base mede 5 m e a altura mede 3 m.

Exemplo de resposta: Calcule a medida de área de um triângulo cuja base mede 5 m e a altura, 3 m. Resposta: 7,5 m^2.

Orientações didáticas

Medida de área do triângulo

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA19** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo medida de área do triângulo.

A explicação neste tópico mostra porque a medida de área do triângulo é igual à metade da medida de área do paralelogramo formado por 2 triângulos congruentes (com as mesmas medidas do triângulo inicial) justapostos.

Atividades

Nas atividades **10** e **11** é sinalizada a noção de planta baixa. Antes de solicitar que os estudantes resolvam essas atividades, discuta com eles o que é uma planta baixa e produza com eles a planta baixa da sala de aula. Na atividade **10**, oriente-os para decompor a representação da planta baixa em figuras das quais eles sabem como calcular a medida de área.

Na atividade **12**, peça que cada estudante elabore um problema e troque com um colega para cada um resolver o problema que o outro elaborou. Ao final, peça que compartilhem os problemas e as resoluções com a turma.

Proposta para o estudante

Sabendo que a medida de área do paralelogramo é 45 cm^2 e que a base dele mede 9 cm, calcule a medida da altura desse paralelogramo. Resposta: 5 cm^2.

Orientações didáticas

Medida de área do losango

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA19** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo medida de área do losango.

A explicação neste tópico mostra como obter a fórmula para calcular a medida de área do losango a partir da decomposição dele em 4 triângulos retângulos congruentes entre si, cujas medidas de área são utilizadas no cálculo.

Medida de área do trapézio

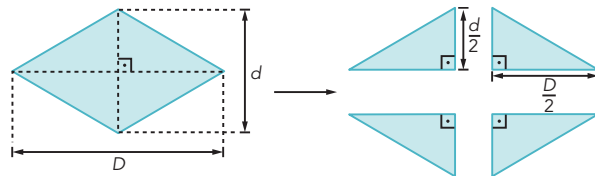
Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA19** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo medida de área do trapézio.

A explicação neste tópico mostra como obter a fórmula para calcular a medida de área do trapézio, decompondo-o em 2 triângulos cujas medidas de área são utilizadas no cálculo.

Medida de área do losango

Todo losango é um paralelogramo, mas podemos usar outra expressão para calcular a medida de área de um losango de acordo com as medidas das diagonais.

Vamos representar por D a medida da diagonal maior do losango e por d a medida da diagonal menor. Traçando essas 2 diagonais, podemos dividir o losango em 4 triângulos retângulos congruentes entre si.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de área do losango é 4 vezes a medida de área do triângulo retângulo cujos catetos medem $\frac{D}{2}$ e $\frac{d}{2}$:

$$A = 4 \cdot \frac{\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2} = 4 \cdot \frac{D \cdot d}{8} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Logo, a medida de área do losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Verifique este exemplo.

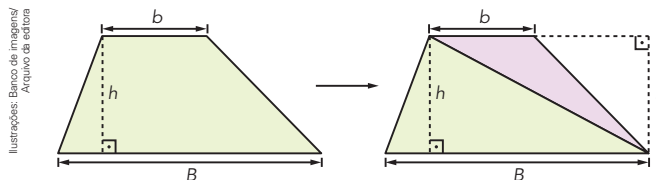
Vamos calcular a medida de área do losango cujas diagonais medem 3 m e 1,20 m:

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{3\text{ m} \cdot 1{,}20\text{ m}}{2} = 1{,}80\text{ m}^2$$

Portanto, a medida de área desse losango é 1,80 m^2.

Medida de área do trapézio

Em um trapézio, vamos representar a medida da base maior por B, a medida da base menor por b e a medida da altura por h. Note que, ao traçarmos uma das diagonais do trapézio, ele fica dividido em 2 triângulos.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de área do trapézio é igual à soma das medidas de área dos 2 triângulos, um cuja base mede B e a altura mede h e outro cuja base mede b e a altura mede h:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Logo, a medida de área do trapézio é igual à metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Lemberg Vector studio/Shutterstock

Confira este exemplo.

Vamos calcular a medida de área do trapézio cujas bases medem 6 cm e 4 cm e a altura mede 3 cm:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(6\text{ cm} + 4\text{ cm}) \cdot 3\text{ cm}}{2} = \frac{10\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}{2} = \frac{30\text{ cm}^2}{2} = 15\text{ cm}^2$$

Portanto, a medida de área desse trapézio é 15 cm^2.

Proposta para o estudante

Assista ao vídeo para verificar outra demonstração da fórmula do cálculo da medida de área do trapézio, na qual 2 trapézios congruentes justapostos correspondem a um paralelogramo cuja medida da base é igual à soma das medidas das bases do trapézio.

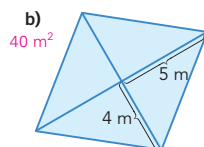
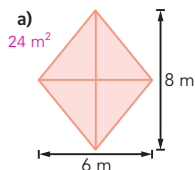
ÁREA do trapézio. [*s. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (10 min). Publicado pelo canal Gis com Giz Matemática. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=8QjE6LON_YO. Acesso em: 1º jun. 2022.

Atividades

16. Exemplo de resposta: Um losango tem a diagonal maior medindo 8 cm e a menor, 5 cm. Qual é a medida de área desse losango? Resposta: 20 cm². Faça as atividades no caderno.

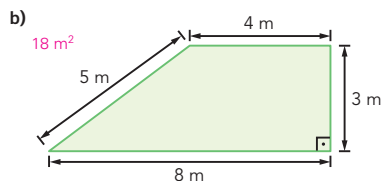
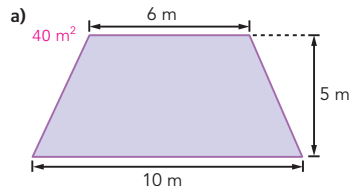
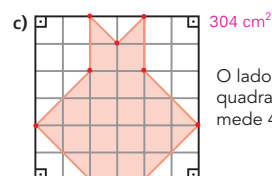
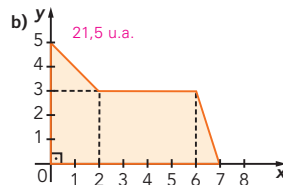
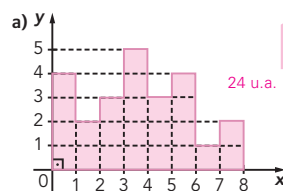
13. Calcule a medida de área de cada losango.

a) 24 m² — 8 m; 6 m

b) 40 m² — 5 m; 4 m

14. Calcule a medida de área de cada trapézio.

a) 40 m² — 6 m; 5 m; 10 m

b) 18 m² — 4 m; 5 m; 3 m; 8 m

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

15. Calcule, em cada item, a medida de área da superfície colorida. Nos itens em que não é indicada a unidade de medida, considere u.c. como a unidade de medida de comprimento e u.a. como a unidade de medida de área.

As imagens não estão representadas em proporção.

a) 24 u.a.

b) 21,5 u.a.

c) 304 cm²

O lado de cada quadradinho mede 4 cm.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

16. Elabore um problema em que seja necessário calcular a medida de área de um losango cuja diagonal menor mede 5 cm e a diagonal maior mede 8 cm.

17. Elabore um problema em que um trapézio cuja base menor mede 4 cm e a base maior mede 6 cm tenha medida de área de 25 cm² e seja necessário determinar a medida da altura dessa figura.

Exemplo de resposta: Um trapézio tem uma medida de área de 25 cm². Se a base menor mede 4 cm e a base maior, 6 cm, calcule a medida da altura desse trapézio. Resposta: 5 cm.

Medida de área de um polígono regular

Antes de calcularmos a medida de área de polígonos regulares, vamos inscrevê-los em uma circunferência e relacionar as duas figuras.

Por isso, faremos o estudo da medida de comprimento da circunferência e, em seguida, desenvolveremos o cálculo da medida de área de polígonos regulares.

Medida de comprimento da circunferência

Moldando o arame

Do arame utilizado para cercar um canteiro, sobrou um pedaço que mede 10 cm de comprimento. Helena decidiu moldá-lo em um formato parecido com uma circunferência:

Hélio Senatore/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

Nas atividades **13** e **14**, os estudantes devem utilizar as fórmulas para calcular a medida de área de losangos e de trapézios. Verifique se eles têm dificuldades e, se julgar necessário, apresente mais exemplos.

Na atividade **15**, peça aos estudantes que compartilhem as resoluções com o objetivo de verificar como eles fizeram a decomposição das figuras. Ajude-os a perceber que a medida de área total da figura, apresentada em cada item, equivale à soma das medidas de área das figuras menores que a compõem.

Nas atividades **16** e **17**, peça que compartilhem os problemas elaborados e proponha que os troquem com os colegas e depois socializem as resoluções. Essas atividades contribuem para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Medida de área de um polígono regular

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA19** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo medida de área do trapézio. Mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02** e a **CEMAT05** ao possibilitar o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e a utilização de ferramentas matemáticas, como a calculadora, para auxiliar na resolução de problemas.

Este tópico inicia com a apresentação de alguns conceitos que serão úteis para o cálculo da medida de área de um polígono regular. São eles: o comprimento de uma circunferência; os elementos notáveis de um polígono regular; e a relação entre esses elementos e a circunferência ao se inscrever um polígono regular nela.

Medida de comprimento da circunferência

Este tópico traz uma maneira de medir o comprimento de uma circunferência, abordando uma situação do cotidiano.

Reforce com os estudantes os conceitos de diâmetro e raio.

Orientações didáticas

Elementos notáveis de um polígono regular

Neste tópico, relembre com os estudantes a nomenclatura de alguns polígonos regulares e apresente os elementos: o centro do polígono, que também é o centro da circunferência circunscrita a ele; o ponto médio do lado do polígono; e o apótema.

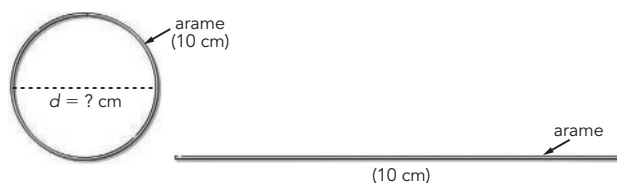
Queremos saber: Qual é a medida do diâmetro dessa circunferência? E do raio?

arame (10 cm)

$d = ?$ cm

arame

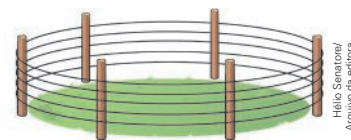
(10 cm)

Banco de imagens/Arquivo da editora

Se desejássemos obter uma circunferência cujo diâmetro mede 50 cm, qual deveria ser a medida de comprimento do arame? Em outras palavras: Se o diâmetro mede 50 cm, qual é a medida de comprimento da circunferência?

E para cercar um canteiro circular de 1 m de medida de raio com 5 voltas de arame, quantos metros (inteiros) de arame é preciso comprar?

Antes de responder a essas perguntas, retomaremos polígonos regulares para mostrar alguns cálculos que procuram justificar o experimento que fizemos no 7º ano de que a razão entre a medida de comprimento c de uma circunferência e a medida do diâmetro d dela é:

$$\frac{c}{d} = \pi\text{, ou seja, } c = \pi \cdot d$$

Hélio Senatore/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Elementos notáveis de um polígono regular

> Denomina-se **polígono regular** o polígono que tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

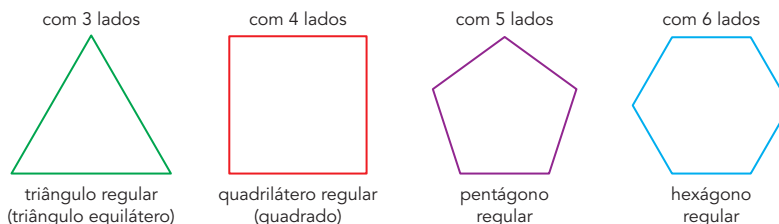
Analise estas representações de polígonos regulares:

com 3 lados — triângulo regular (triângulo equilátero)

com 4 lados — quadrilátero regular (quadrado)

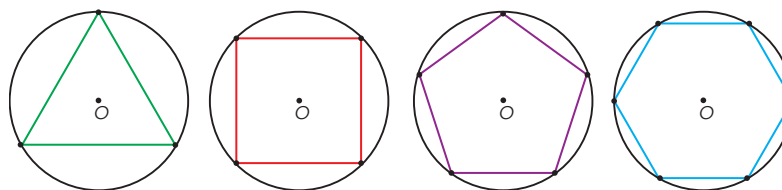
com 5 lados — pentágono regular

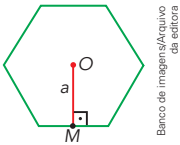
com 6 lados — hexágono regular

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

No estudo dos polígonos regulares, é importante conhecer estes elementos:

- **centro** é o ponto (O) que dista igualmente de todos os vértices do polígono; esse ponto é também o centro de uma circunferência que passa por todos os vértices do polígono;

O O O O

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- **apótema** é um segmento de reta perpendicular a um lado do polígono com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio desse lado.

  No hexágono regular representado a seguir:
  - O é o centro;
  - M é o ponto médio do lado;
  - $\overline{OM}$ é o apótema $(OM = a)$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

No quadro a seguir, em que usamos $r = 25$ cm, note o que ocorre com a medida ℓ do lado e com a medida $2p$ de perímetro dos polígonos regulares inscritos em uma circunferência cujo raio mede r e, também, o que ocorre com a razão entre a medida de perímetro e a medida d do diâmetro, $d = 2r$.

Polígono inscrito	Medida de perímetro do polígono inscrito	Razão entre a medida de perímetro e a medida do diâmetro
Triângulo equilátero	$2p = 3\ell \simeq 129{,}90$ cm $\ell \simeq 43{,}30$ cm	$\frac{2p}{d} \simeq 2{,}5980$
Quadrado	$2p = 4\ell \simeq 141{,}44$ cm $\ell \simeq 35{,}36$ cm	$\frac{2p}{d} \simeq 2{,}8288$
Hexágono regular	$2p = 6\ell = 150$ cm $\ell = r = 25$ cm	$\frac{2p}{d} = 3$
Octógono regular	$2p = 8\ell \simeq 153{,}04$ cm $\ell \simeq 19{,}13$ cm	$\frac{2p}{d} \simeq 3{,}0608$
Dodecágono regular	$2p = 12\ell \simeq 155{,}28$ cm $\ell \simeq 12{,}94$ cm	$\frac{2p}{d} \simeq 3{,}1056$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Elementos notáveis de um polígono regular

Comente que os valores apresentados no quadro são dados, e que para calculá-los precisa-se aplicar o teorema de Pitágoras, que será estudado futuramente.

Peça aos estudantes que analisem o quadro e, antes de apresentar a conclusão que está na página seguinte do Livro do Estudante, pergunte se eles identificam alguma regularidade. Essa ação promove o desenvolvimento do pensamento lógico indutivo e também do raciocínio por analogia.

Orientações didáticas

Atividades

Para as atividades **18** a **23**, promova um espaço de socialização das resoluções que os estudantes fizeram. Verifique se eles utilizaram alguma representação para ilustrar o que cada atividade demanda e comente que o desenho pode auxiliar na interpretação do enunciado.

Podemos identificar que:

- conforme a quantidade de lados do polígono cresce, a medida ℓ do lado diminui;
- conforme a quantidade de lados do polígono cresce, a medida $2p$ de perímetro cresce;
- conforme a quantidade de lados do polígono cresce, o polígono passa a ter lados tão pequenos que o seu contorno vai se aproximando à circunferência.

Para um polígono regular com 20 lados, verifica-se que a razão $\frac{2p}{d}$ é aproximadamente 3,1287. Com 72 lados, essa razão é aproximadamente 3,1406; com 144 lados, é aproximadamente 3,1413; com 360 lados, é aproximadamente 3,14158.

Se fosse calculada a razão entre a medida de perímetro de um polígono com uma quantidade de lados muito grande (da ordem de milhões de lados) e a medida do diâmetro $(2r)$, ela se aproximaria do número representado por π, que vale aproximadamente 3,141592. Então, a medida de comprimento da circunferência cujo diâmetro mede d e o raio mede r é πd ou $2\pi r$.

A medida de comprimento de uma circunferência é igual a π vezes a medida do diâmetro, ou 2π vezes a medida do raio, sendo $\pi \simeq 3{,}141592$.

Nas aplicações, costumamos usar o valor de π aproximado por 2 casas decimais $(\pi \simeq 3{,}14)$.

Agora, podemos responder às perguntas do tópico "Comprimento da circunferência".

- Para calcular a medida r do raio de uma circunferência cujo comprimento mede 10 cm, temos:

$$C = 2\pi r \Rightarrow 2\pi r = 10 \text{ cm} \Rightarrow r = \frac{10 \text{ cm}}{2\pi} \Rightarrow r = \frac{5 \text{ cm}}{\pi}$$

Logo, $r \simeq \frac{5 \text{ cm}}{3{,}14} \simeq 1{,}59$ cm.

E a medida do diâmetro é aproximadamente 3,18 cm.

- Para calcular a medida de comprimento da circunferência cujo diâmetro mede 50 cm, temos:

$$C = \pi d = \pi \cdot 50 \text{ cm} = 50\pi \text{ cm}$$

Logo, $C \simeq 50 \text{ cm} \cdot 3{,}14 = 157$ cm.

- Para cercar com 5 voltas de arame um canteiro circular cujo raio mede 1 m, temos:

$$5 \cdot 2\pi r = 5 \cdot 2\pi \cdot 1 \text{ m} \simeq 10 \text{ m} \cdot 3{,}14 \simeq 31{,}4 \text{ m}$$

Logo, é preciso comprar 32 metros de arame.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Nesta série de atividades, use $\pi \simeq 3{,}14$. Você pode também contar com auxílio de uma calculadora.

18. Calcule a medida de comprimento de uma circunferência cujo raio mede 10 cm. Aproximadamente 62,8 cm.

19. Calcule a medida de comprimento de uma circunferência cujo diâmetro mede 12 cm. Aproximadamente 37,68 cm.

20. Com um fio de arame, deseja-se construir uma circunferência com 10 cm de medida de diâmetro. Qual deve ser a medida de comprimento do fio? Aproximadamente 31,4 cm.

21. Calcule a medida do raio de uma circunferência cujo comprimento mede 120 cm. Aproximadamente 19,11 cm.

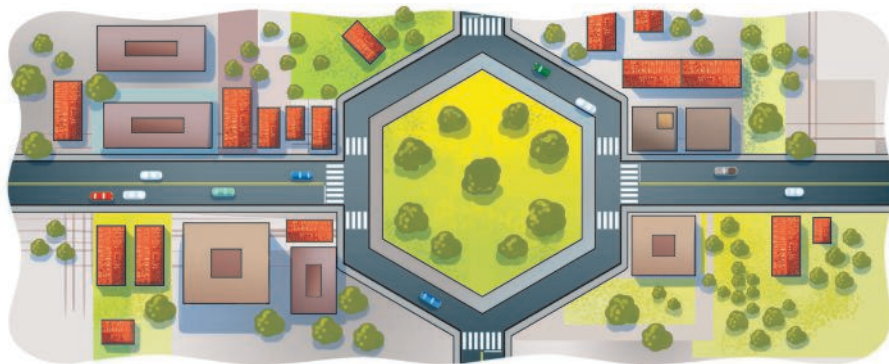
22. Quanto aumenta a medida do raio de uma circunferência quando a medida de comprimento dela aumenta 5 metros? $\frac{5 \text{ m}}{2\pi} \simeq 0{,}8$ m

23. Quanto aumenta percentualmente a medida de comprimento de uma circunferência cuja medida do raio sofreu aumento de 50%? 50%

Calculando a medida de área de um polígono regular

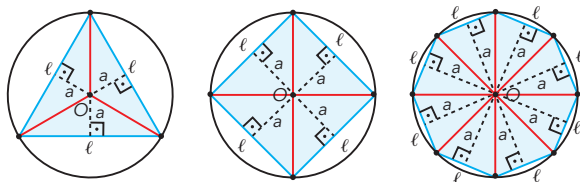
Medida de área do jardim

A prefeitura de uma cidade planeja fazer um jardim em uma praça que tem o formato de hexágono regular. Qual será a medida de área desse jardim, sabendo que ele terá 56 m de medida do lado e que a medida de distância entre 2 lados paralelos é 97 m?

As imagens não estão representadas em proporção.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Antes de responder a essa questão, vamos fazer algumas considerações.

Ao inscrever um polígono regular em uma circunferência, se traçarmos um segmento de reta que liga o centro O dessa circunferência a cada um dos n vértices do polígono, ele ficará dividido em n triângulos isósceles.

A altura de cada um desses triângulos isósceles relativa à base (lado do polígono) é um apótema do polígono, cuja medida indicamos por a.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Para um polígono regular qualquer, vamos indicar:

- n para a quantidade de lados do polígono;
- ℓ para a medida do lado;
- a para a medida do apótema;
- $2p$ para a medida de perímetro $(2p = n \cdot \ell)$.

Se o polígono tem n lados, então a medida de área dele é igual a n vezes a medida de área do triângulo isósceles cuja base mede ℓ e a altura mede a:

$$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2} = \frac{\cancel{2}p \cdot a}{\cancel{2}} = p \cdot a$$

Logo, a medida de área do polígono regular é igual ao produto da medida do semiperímetro (metade da medida do perímetro) pela medida do apótema:

$$A = p \cdot a$$

Orientações didáticas

Calculando a medida de área de um polígono regular

Neste tópico, utiliza-se o recurso de inscrever um polígono regular em uma circunferência para auxiliar no cálculo da medida de área dele. Assim, o polígono regular é decomposto em triângulos congruentes entre si, cujas medidas de área são utilizadas no cálculo.

Orientações didáticas

Medida de área do círculo

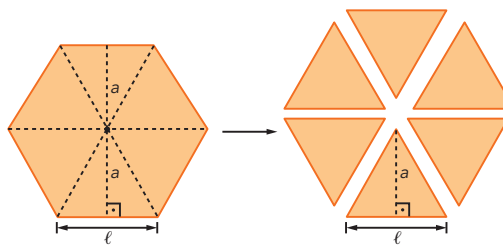
Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA19** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo medida de área do círculo.

Antes de abordar o assunto desse tópico, pergunte aos estudantes: "O que é circunferência e o que é círculo?". É comum eles pensarem que não há diferença entre essas figuras, então aproveite o momento para relembrar a definição e os elementos da circunferência e do círculo.

Para demonstrar a fórmula do cálculo da medida de área do círculo, é feita uma analogia com polígonos regulares inscritos na circunferência. Verifique se os estudantes percebem que quanto maior é a quantidade de lados do polígono regular inscrito, mais a forma dele se aproxima da forma da circunferência.

Agora, podemos voltar ao problema sobre a área do jardim e respondê-lo.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

O jardim terá o formato de um hexágono regular com lado medindo 56 m. Assim, $\ell = 56$ m e $n = 6$. Logo, temos a medida p do semiperímetro:

$$2p = 56 \text{ m} \cdot 6 \Rightarrow p = 56 \text{ m} \cdot 3 \Rightarrow p = 168 \text{ m}$$

Como a medida de distância entre 2 lados paralelos é 2 vezes a medida a do apótema, temos:

$$2a = 97 \text{ m} \Rightarrow a = 48{,}5 \text{ m}$$

Então, a medida de área do hexágono regular é:

$$A = p \cdot a = 168 \text{ m} \cdot 48{,}5 \text{ m} = 8\,148 \text{ m}^2$$

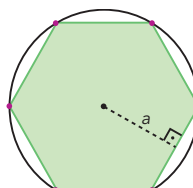
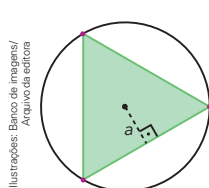
A área do jardim na praça medirá 8 148 m^2.

Medida de área do círculo

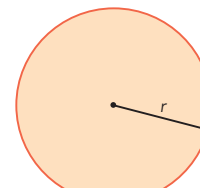
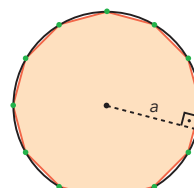
Em um campo oficial de futebol, qual é a medida de área do círculo central? Vamos aprender a calcular a medida de área do círculo e, depois, poderemos responder a essa pergunta.

A.RICARDO/Shutterstock

Estádio Beira-Rio em Porto Alegre (RS). Foto de 2018.

Nestas figuras, note 2 polígonos regulares inscritos (e as regiões limitadas por eles) em uma circunferência cujo raio mede r.

Analise o que acontece quando aumentamos a quantidade de lados de polígonos inscritos:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Perceba que, conforme aumenta a quantidade de lados dos polígonos regulares inscritos,

- a forma dos polígonos regulares vai se aproximando da forma da circunferência;
- a medida de área dos polígonos regulares inscritos vai crescendo e se aproximando da medida de área do círculo;
- a medida de perímetro ($2p$) dos polígonos regulares inscritos vai se aproximando da medida de comprimento da circunferência ($2\pi r$), e a medida dos apótemas (a) vai se aproximando da medida do raio (r).

Logo, relacionando a medida de área dos polígonos regulares com a medida de área do círculo, temos:

$$A = p \cdot a = \frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi r^2$$

A medida de área do círculo é:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Acompanhe este exemplo.

A medida de área do círculo cujo raio mede 3 cm é dada por:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (3 \text{ cm})^2 = 9\pi \text{ cm}^2$$

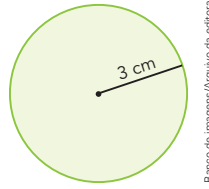
3 cm

Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de área desse círculo é 9π cm², ou seja, aproximadamente 28,26 cm².

Agora, é possível voltar à pergunta sobre a medida de área do círculo central de um campo oficial de futebol. Sabendo que o raio desse círculo mede 9,15 m, a medida de área dele é:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (9{,}15 \text{ m})^2 \simeq 263 \text{ m}^2$$

Portanto, a área do círculo central de um campo oficial de futebol mede, aproximadamente, 263 m².

Atividades

As imagens não estão representadas em proporção.

Faça as atividades no caderno.

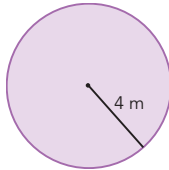
Nesta série de atividades, use $\pi \simeq 3{,}14$.

24. Calcule a medida de área.

a) de um círculo cujo raio mede 5 cm; 25π cm² $\simeq$ 78,5 cm²

b) de um círculo cujo diâmetro mede 4 cm; 4π cm² $\simeq$ 12,56 cm²

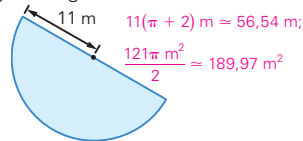
c) deste círculo. 16π m² $\simeq$ 50,24 m²

4 m

Banco de imagens/Arquivo da editora

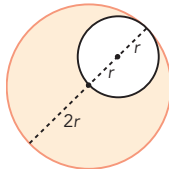
25. Calcule a medida de área do círculo cuja circunferência tem comprimento medindo 6π cm. 9π cm² $\simeq$ 28,26 cm²

26. Calcule as medidas de perímetro e área do semicírculo da figura a seguir.

11 m

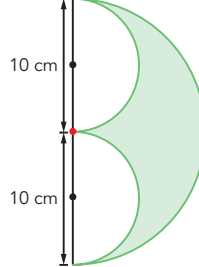
$11(\pi + 2)$ m $\simeq$ 56,54 m; $\frac{121\pi \text{ m}^2}{2} \simeq$ 189,97 m²

Banco de imagens/Arquivo da editora

27. Considerando que $r = 1$ cm, calcule a medida de área desta superfície colorida determinada por 2 circunferências. 3π cm² $\simeq$ 9,42 cm²

r r 2r

Banco de imagens/Arquivo da editora

28. Calcule a medida de área desta região colorida, determinada por 3 semicircunferências. 25π cm² $\simeq$ 78,5 cm²

10 cm

10 cm

Banco de imagens/Arquivo da editora

29. Um lojista pretende fazer cartões para divulgar sua loja. A gráfica que fará os cartões cobra R$ 0,01 por centímetro quadrado do cartão e oferece os seguintes formatos de cartões:

- círculo cujo diâmetro mede 10 cm;
- hexágono regular cujo lado mede 6 cm e o apótema mede, aproximadamente, 5,2 cm;
- retângulo cujos lados medem 11 cm e 8 cm;
- quadrado cujo lado mede 8 cm;
- triângulo equilátero cujo lado mede 12 cm e o apótema mede, aproximadamente, 3,46 cm.

Qual desses modelos foi escolhido pelo lojista de modo a minimizar o custo com a gráfica?

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

30. Elabore um problema em que seja necessário descobrir a medida de área de um círculo cujo raio mede 2 cm. Exemplo de resposta: Vanessa desenhou um círculo cuja medida do raio é 2 cm. Aproximadamente, qual é a medida de área do círculo que Vanessa desenhou? Resposta: 12,56 cm².

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **24** a **29** abordam a aplicabilidade da fórmula para calcular a medida de área do círculo.

Nas atividades **26** e **28**, verifique se os estudantes percebem que elas envolvem a medida de área do semicírculo.

Na atividade **29**, estimule os estudantes a representar o que está sendo pedido por meio de desenhos.

Na atividade **30**, peça que troquem com o colega o problema elaborado, assim cada um resolve o problema que o outro criou. Depois, peça que compartilhem as resoluções.

Proposta para o estudante

Uma das abordagens dentro das Metodologias Ativas é o uso de plataformas adaptativas. Estimule os estudantes a resolver a unidade Grandezas e medidas da plataforma Khan Academy, que é gratuita e possui interface com o Google Sala de Aula.

KHAN Academy. *Unidade: Grandezas e medidas*. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/pt-8-ano/grandezas-e-medidas-8ano. Acesso em: 3 jun. 2022.

Orientações didáticas

Volume e capacidade

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA20** e **EF08MA21** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo a capacidade de recipientes, o volume do bloco retangular e a relação entre capacidade e volume e suas unidades de medida.

Inicie o tópico relembrando que volume é a grandeza relacionada ao espaço ocupado por um corpo e que capacidade é a grandeza relacionada ao volume interno de um recipiente. Reconhecer a relação entre litro e decímetro cúbico e entre litro e metro cúbico é fundamental para a resolução de problemas envolvendo cálculo de capacidade de recipientes.

Medida de volume do prisma e do cilindro

Neste tópico é abordado o volume do prisma e do cilindro. Relembre como calculamos a medida de área de uma região retangular, para depois formalizar que a medida de volume do prisma de base retangular é calculada pela multiplicação da medida de área da base pela medida da altura do prisma. E como calculamos a medida de área de uma região circular, para depois formalizar que a medida de volume do cilindro é calculada pela multiplicação da medida de área da base pela medida da altura do cilindro.

Além disso, o problema que serve de exemplo traz um contexto sobre consumo de água que possibilita uma discussão sobre os impactos ambientais do desperdício de água, favorecendo o desenvolvimento dos TCTs *Educação para o Consumo* e *Educação Ambiental*.

Volume e capacidade

Como apresentado em anos anteriores, o **volume** é a grandeza relacionada ao espaço ocupado por um corpo, enquanto a **capacidade** é a grandeza relacionada ao volume interno de um recipiente.

O **metro cúbico (m^3)** é a unidade-padrão de medida de volume e corresponde à medida de volume de um cubo cuja aresta mede 1 m.

Da mesma maneira, o decímetro cúbico (dm^3) corresponde à medida de volume de um cubo cuja aresta mede 1 dm (1 m = 10 dm).

Relacionando essas medidas de volume, temos:

$$1\ m^3 = 1\ m \cdot 1\ m \cdot 1\ m = 10\ dm \cdot 10\ dm \cdot 10\ dm = 1\,000\ dm^3$$

Logo, $1\ m^3$ equivale a $1\,000\ dm^3$.

1 m
1 m
1 m
1 dm³

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de volume de um cubo cuja aresta mede 1 dm também corresponde ao **litro (L)**, unidade padronizada de medida de capacidade. Assim, temos:

$$1\ dm^3 \text{ corresponde a } 1\ L.$$

Como $1\ m^3 = 1\,000\ dm^3$, temos:

$$1\ m^3 = 1\,000\ L$$

Note que podemos relacionar submúltiplos do metro cúbico com submúltiplos do litro. Por exemplo, podemos relacionar centímetro cúbico (cm^3) com mililitro (mL).

$$1\ dm^3 = 1\ dm \cdot 1\ dm \cdot 1\ dm = 10\ cm \cdot 10\ cm \cdot 10\ cm = 1\,000\ cm^3$$

$$1\ L = 1\,000\ mL$$

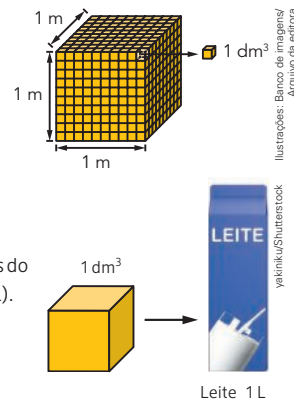
Como $1\ dm^3 = 1\ L$, temos:

$$1\,000\ cm^3 = 1\,000\ mL \Rightarrow 1\ cm^3 = 1\ mL$$

1 dm³

LEITE

Leite 1 L

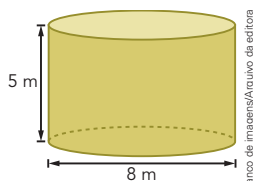
yakiniku/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

Medida de volume do prisma e do cilindro

A capacidade do reservatório de água

Um grande reservatório de água potável tem formato cilíndrico com diâmetro da base medindo 8 m e altura medindo 5 m. Quantos litros de água cabem nesse reservatório?

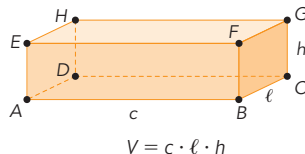
5 m
8 m

Banco de imagens/Arquivo da editora

Para calcular a medida de capacidade desse reservatório, precisamos saber como se calcula a medida de volume de um cilindro. Antes disso, estudaremos como se calcula a medida de volume de um prisma qualquer.

Sabemos que a medida V de volume de um bloco retangular é o produto da medida c do comprimento pela medida ℓ da largura e pela medida h da altura:

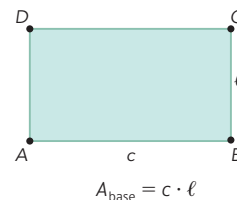
H G E F D A B C h ℓ c

$$V = c \cdot \ell \cdot h$$

Banco de imagens/Arquivo da editora

A região retangular $ABCD$ é chamada de **base** desse bloco retangular e a medida de área dela é o produto da medida c do comprimento pela medida ℓ da largura.

D C ℓ A c B

$$A_{base} = c \cdot \ell$$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Desse modo, podemos escrever:

$$V = \underbrace{c \cdot \ell}_{A_{base}} \cdot h \Rightarrow \boxed{V = A_{base} \cdot h}$$

O bloco retangular é um **prisma** de base retangular, também denominado paralelepípedo. A medida de volume dele pode ser calculada pelo produto da medida de área da base pela medida da altura. Será que podemos calcular a medida de volume de qualquer prisma usando essa fórmula?

Participe

Faça as atividades no caderno.

I. Em grupos, organizem um bloco de folhas de papel em um formato que lembre um bloco retangular. Em seguida, inclinem levemente as folhas, obtendo um formato parecido com um prisma oblíquo de base retangular.

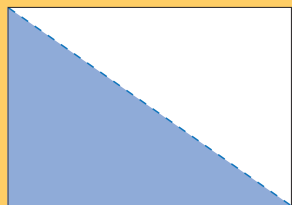
> Um bloco retangular é um **prisma reto** por ter as arestas das faces laterais perpendiculares às arestas da base, ou seja, as arestas das faces laterais formam ângulos retos com todas as arestas da base.
> Já um **prisma oblíquo** tem as arestas das faces laterais inclinadas em relação às arestas da base, ou seja, as arestas das faces laterais **não** formam ângulos retos com as arestas da base.

Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

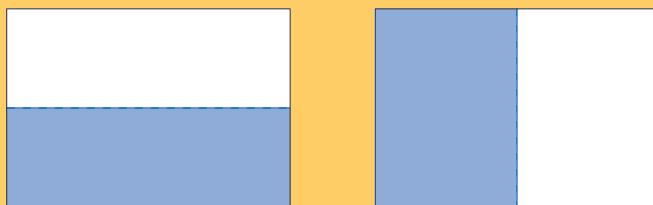
a) O que vocês podem dizer sobre a medida de área de cada folha nas 2 situações? São iguais.

b) O que vocês podem dizer sobre as medidas da altura das folhas nas 2 situações? São iguais.

c) O que vocês podem dizer sobre as medidas de volume das folhas nas 2 situações? São iguais.

II. Ao cortarmos todas as folhas de um bloco de papel ao meio, pela diagonal, e empilharmos novamente os pedaços de folhas, teremos um bloco de folhas com formato que lembra um prisma de base triangular.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplo de corte na diagonal.

Ao cortarmos todas as folhas de outro bloco de papel ao meio na vertical ou na horizontal e empilharmos novamente os pedaços de folhas, teremos um bloco com formato que lembra um prisma de base retangular.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplo de cortes na horizontal e na vertical, respectivamente.

Considerando que ambos os blocos têm a mesma quantidade de folhas, é possível relacionar essa quantidade com a medida de área de cada folha para calcular a medida de volume? O que podemos dizer sobre as medidas de volume desses blocos? Justifique sua resposta. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Participe

As experiências em grupo sugeridas neste boxe mobilizam com maior ênfase a **CG02**, a **CG09**, a **CEMAT02** e a **CEMAT08** ao favorecer o desenvolvimento do raciocínio lógico, da investigação, da reflexão e a capacidade de produzir argumentos convincentes nas respostas às questões propostas. Os estudantes têm a oportunidade de interagir entre si trabalhando coletivamente na investigação proposta e exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação.

Se achar conveniente, enuncie o princípio de Cavalieri: "Se 2 figuras tridimensionais tiverem a mesma medida da altura e a mesma medida de área de secção transversal em todos os pontos ao longo dessa altura, elas têm a mesma medida de volume.". Indique que cada folha corresponde à secção transversal dos sólidos geométricos pelo plano horizontal.

Proposta para o professor

Para saber mais sobre o princípio de Cavalieri, segue esta referência na qual podem ser encontrados vídeos e animações para enriquecer o ensino.

KHAN Academy. *Princípio de Cavalieri em 3D*. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-solids/xff63fac4:hs-geo-cavalieri-s-principle/a/cavalieri-s-principle-in-3d. Acesso em: 23 jun. 2022.

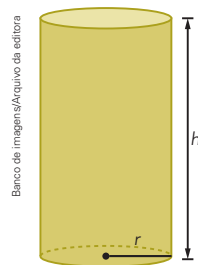
Orientações didáticas

Atividades

As atividades **31** a **36** e **38** abordam a aplicabilidade da fórmula para calcular a medida de volume do prisma e a do cilindro, e a medida de capacidade de recipientes com esses formatos. Estimule os estudantes a representar o que está sendo pedido por meio de desenhos. Se julgar necessário, retome a relação entre litro e decímetro cúbico e entre litro e metro cúbico.

A fórmula $V = A_{base} \cdot h$ pode ser usada para calcular a medida de volume de qualquer prisma, tenha ele base triangular, quadrangular, pentagonal, etc.

Com essa fórmula, também podemos calcular a medida de volume de um cilindro, em que a base é um círculo cujo raio mede r e a altura mede h:

Banco de imagens/Arquivo da editora

$$V = A_{base} \cdot h$$

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Agora, podemos responder à pergunta sobre a medida de capacidade do reservatório de água. Temos:

$$A_{base} = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{8\text{ m}}{2}\right)^2 = \pi \cdot (4\text{ m})^2 = 16\pi\text{ m}^2$$

$$V = A_{base} \cdot h = 16\pi\text{ m}^2 \cdot 5\text{ m} = 80\pi\text{ m}^3$$

$$1\text{ m}^3 = 1\,000\text{ L} \Rightarrow 80\pi\text{ m}^3 = 80\,000\pi\text{ L}$$

Portanto, nesse reservatório, cabem $80\,000\pi$ L, ou seja, cabe aproximadamente (considerando $\pi \simeq 3{,}14$) 251 200 L de água.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

31. Considerando $\pi = 3{,}14$, calcule a medida de volume de um cilindro:

a) cuja altura mede 6 cm e a área da base mede 4π cm²; $24\pi\text{ cm}^3 \simeq 75{,}36\text{ cm}^3$

b) cuja altura mede 10 cm e o raio do círculo da base mede 5 cm; $250\pi\text{ cm}^3 \simeq 785\text{ cm}^3$

c) cuja altura mede 30 mm e o diâmetro do círculo da base mede 20 cm. $300\pi\text{ cm}^3 \simeq 942\text{ cm}^3$

32. Qual é a medida de capacidade, em litros, de um garrafão de água com formato cilíndrico em que o diâmetro da base mede 3 dm e a altura do garrafão mede 4 dm? Considere $\pi = 3{,}14$. 9π L $\simeq$ 28,26 L

33. Um remédio líquido é vendido em um frasco cilíndrico cujo diâmetro da base mede 30 mm. Sabendo que ainda restam 20 mL de remédio, qual é a medida da altura, em centímetros, da parte ocupada pelo remédio que ainda resta no frasco? Considere $\pi = 3{,}14$. Aproximadamente 2,8 cm.

34. O formato de uma lata de tinta lembra um bloco retangular cujas dimensões medem 23 cm por 23 cm por 34,1 cm. Um galão de tinta tem formato parecido com o de um cilindro cuja altura mede 18 cm e o diâmetro da base mede 16 cm. Quantos galões de tinta são necessários para encher uma lata? Qual é a medida de capacidade da lata de tinta e do galão em dm³? Considere $\pi = 3{,}14$. 5 galões; aproximadamente 18 dm³ e aproximadamente 3,6 dm³.

35. Uma pastelaria vende caldo de cana, pelo mesmo preço, em 2 embalagens:

- uma garrafinha com um formato parecido com o de um prisma de base quadrangular cuja altura mede 18 cm e a base é um quadrado cujo lado mede 5 cm;
- um copo cilíndrico com altura medindo 16 cm e diâmetro da base medindo 6 cm.

- Em qual das embalagens cabe mais caldo de cana? Qual é a medida de capacidade do copo em mL? Considere $\pi = 3,14$. As medidas de capacidade são praticamente iguais, mas no copo cabe um pouco mais. A medida de capacidade do copo é, aproximadamente, 452 mL.

36. Quando o noticiário afirma que choveu 5 mm em uma cidade em determinado período, significa que toda a água que caiu ocuparia a superfície completa da cidade e ficaria com a medida da altura de 5 mm. No mês de fevereiro deste ano, em determinada região, choveu o equivalente a 280 mm. A superfície dessa região equivale à área de um círculo de 50 km de medida do diâmetro. Quantos metros cúbicos de água caíram nessa região no período mencionado? E quantos litros? Considere $\pi = 3,14$.
Aproximadamente 549 500 000 m^3 e aproximadamente 549 500 000 000 L.

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

37. O Parque da Farroupilha, localizado em Porto Alegre, dispõe de um grande canteiro de hortênsias com formato circular de 12 m de diâmetro. Os manuais de floricultura estabelecem que para cada pé de hortênsia seja reservada uma medida de área de aproximadamente 0,6 m^2. Qual é o número máximo de pés dessa flor que podem colocados no canteiro? Considere $\pi = 3$. 180 pés.

As imagens não estão representadas em proporção.

Brastock/Shutterstock

Vista aérea do Parque Farroupilha, em Porto Alegre (RS). Foto de 2022.

39. Exemplo de resposta: Uma fábrica de suco comporta uma produção em um reservatório em formato de bloco retangular cujas dimensões medem: 0,8 m, 10 m e 5 m. A fábrica está envazando o suco produzido em embalagens com formato de bloco retangular com dimensões medindo 10 cm, 10 cm e 25 cm. Quantas embalagens essa fábrica conseguirá envazando todo o suco do reservatório de uma produção? Resposta: 16 000 embalagens.

38. Uma chapa metálica retangular será enrolada de maneira a obter um recipiente com formato de um cilindro fechado com bases circulares metálicas de raio medindo 50 cm e altura do cilindro, 1,5 m. Qual é a medida de área, em metros quadrados, total da superfície metálica? Qual é a medida de capacidade, em litros, que o recipiente terá? Considere $\pi = 3$. Aproximadamente 6 m^2; aproximadamente 1 125 L.

39. Elabore um problema envolvendo a medida de capacidade de um bloco retangular que comporte a seguinte resolução:

$$0,8\ \text{m} \cdot 10\ \text{m} \cdot 5\ \text{m} = 40\ \text{m}^3 = 40\,000\ \text{L}$$
$$10\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm} \cdot 25\ \text{cm} = 2\,500\ \text{cm}^3 = 2,5\ \text{dm}^3 = 2,5\ \text{L}$$
$$40\,000\ \text{L} : 2,5\ \text{L} = 16\,000$$

40. Elabore um problema em que seja necessário determinar a medida de capacidade, em litros, de um cilindro cuja altura mede 1 m e o raio da base mede 2 m. Exemplo de resposta: Um cilindro tem altura medindo 1 m. Se o raio da base mede 2 m, qual é, aproximadamente, a medida de capacidade, em litros, desse cilindro? Resposta: Aproximadamente 12 000 L.

Orientações didáticas

Atividades

Comente que a atividade **36** traz o conceito de índice pluviométrico, que é definido como a medida de volume, em milímetros, de chuva que cai em uma região durante determinado período (que pode ser desde horas até anos).

As atividades **39** e **40** propõem que os estudantes elaborem problemas. A elaboração de um problema tem como referencial etapas predefinidas, o que contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional. Aproveite a troca com os colegas para instigar uma reflexão sobre as etapas e os procedimentos utilizados para formular e, também, para resolver um problema. Esse tipo de atividade trabalha o raciocínio de abdução, uma vez que parte de dados da resolução ou resposta para chegar à elaboração das condições ou perguntas que incorporam o enunciado do problema.

Proposta para o professor

Segue uma tese que aborda o ensino de área e volume com objetos manipuláveis.
MEDEIROS, M. R. *O ensino de áreas e volumes com o uso de objetos manipulativos*. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/4447/5649.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 23 jun. 2022.

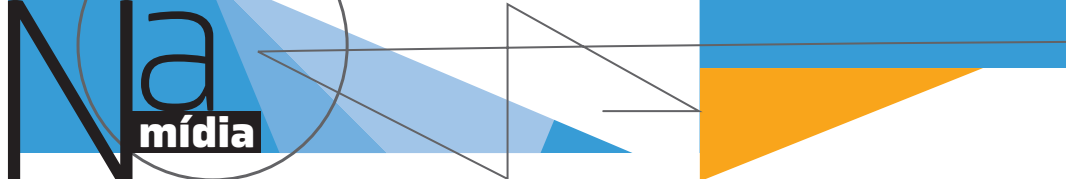
Orientações didáticas

Na mídia

Na BNCC

Esta seção mobiliza com maior ênfase a **CEMAT03** ao relacionar diferentes campos da Matemática. Favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Ambiental* ao trazer o contexto da coleta seletiva.

Desenvolva estratégias de leitura e interpretação do texto, de modo que os estudantes reflitam sobre a importância de separar o lixo reciclável do orgânico, os benefícios que a reciclagem traz ao meio ambiente, como a redução da poluição ambiental e da extração de recursos naturais, já que muitos materiais podem ser reaproveitados por meio da reciclagem, e sobre os benefícios para as pessoas, como a limpeza das cidades e a geração de empregos.

Na mídia

As imagens não estão representadas em proporção.

Coleta seletiva

Desde 1994 o Cempre [Compromisso Empresarial para Reciclagem] reúne informações sobre os programas de coleta seletiva desenvolvidos por prefeituras, apresentando dados sobre composição do lixo, custos de operação, participação de cooperativas de catadores e parcela de população atendida.

A Pesquisa Ciclosoft tem abrangência geográfica em escala nacional, e possui periodicidade bianual de coleta de dados.

[...]

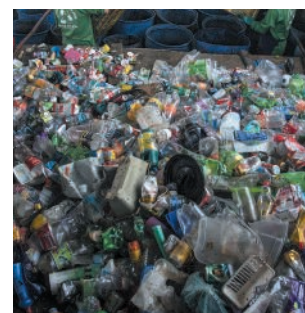
CEMPRE. Pesquisa Ciclosoft 2018: radiografando a coleta seletiva. *Cempre*, [*s. l.*], [2019?]. Disponível em: https://www.temsustentavel.com.br/wp-content/uploads/2018/12/crescimento-dos-catadores.pdf. Acesso em: 17 fev. 2022.

Divulgação/SLU/Agência Brasília/Creative Commons 2.0

Coleta seletiva de lixo em Brasília, DF. Foto de 2020.

Ismar Ingber/Pulsar Imagens

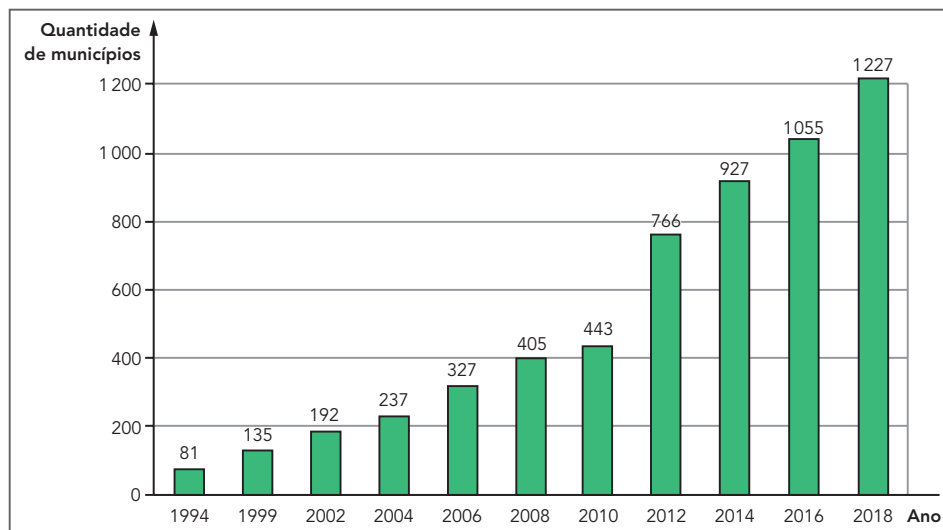
Central de triagem no Rio de Janeiro, RJ. Foto de 2019.

Luciana Whitaker/Pulsar Imagens

Separação manual de material reciclável em Arraial do Cabo, RJ. Foto de 2018.

Municípios com coleta seletiva no Brasil

Quantidade de municípios

Ano	1994	1999	2002	2004	2006	2008	2010	2012	2014	2016	2018
Quantidade de municípios	81	135	192	237	327	405	443	766	927	1055	1 227

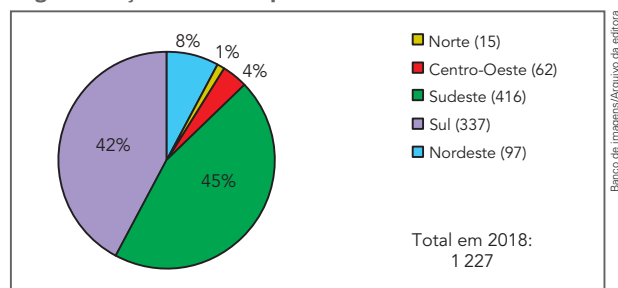
Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: Cempre.

Regionalização dos municípios com coleta seletiva no Brasil

8%
1%
4%
42%
45%

Norte (15)
Centro-Oeste (62)
Sudeste (416)
Sul (337)
Nordeste (97)

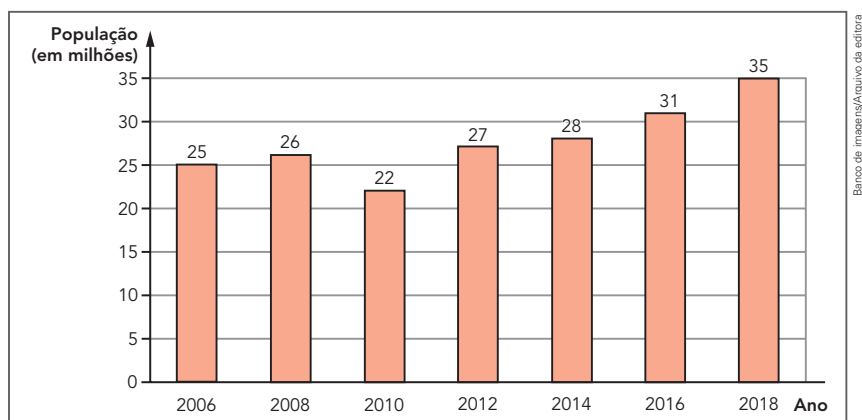
Total em 2018:
1 227

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: Cempre.

População atendida pelo serviço de coleta seletiva no Brasil

População (em milhões)

Ano	2006	2008	2010	2012	2014	2016	2018
População (em milhões)	25	26	22	27	28	31	35

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: Cempre.

De acordo com os dados dessa pesquisa, faça o que se pede a seguir.

a) Em 2018, havia 5 570 municípios no Brasil. Calcule a porcentagem, com uma casa decimal, dos municípios que tinham coleta seletiva. 22,0%

b) A população brasileira em 2018 era de 209,5 milhões de habitantes. Calcule a porcentagem, com uma casa decimal, da população que tinha acesso à coleta seletiva. 16,7%

c) De 2010 até 2018, em quanto por cento aumentou o número de municípios com coleta seletiva? No mesmo período, em quanto por cento aumentou a população atendida por esse serviço? 177%; 59%.

d) Em que regiões do país os programas de coleta seletiva estão concentrados? Sudeste e Sul.

e) Quanto mede o ângulo central do setor circular correspondente à região Sudeste no gráfico de setores anterior? 162°

Para discussão:

f) Algumas das embalagens que utilizamos podem ter o formato parecido com os sólidos geométricos que estudamos. Dê exemplos. Exemplos de resposta: Lata de suco: cilindro; caixa de leite: prisma.

g) Você costuma separar embalagens recicláveis na sua residência? E na sua escola? Converse com os colegas e o professor sobre a viabilização de um projeto de reciclagem de embalagens. Resposta pessoal.

h) Pesquise em que podem ser transformadas as embalagens de plástico coletadas para reciclagem. (Sugestão: digite "o que se faz com plástico reciclado" em um *site* de buscas.) **Prática de pesquisa**
Resposta pessoal.

Orientações didáticas

Na mídia

Peça aos estudantes que analisem os gráficos de colunas e de setores para que percebam, por exemplo, o aumento da quantidade de municípios brasileiros com coleta seletiva.

Além da prática de pesquisa proposta no item **h**, solicite aos estudantes que pesquisem se há coleta seletiva no município em que eles moram e como ela é feita. Depois, proponha um momento de socialização das informações.

CAPÍTULO 16

Proporcionalidade

NA BNCC
EF08MA12
EF08MA13

Variação de grandezas

Deslocamento de um automóvel

Um automóvel que estava parado começa a deslocar-se à medida de velocidade constante de 25 metros a cada 2 segundos. No quadro estão relacionadas a medida de tempo decorrido, *t* (em segundos), e a medida da distância percorrida pelo automóvel, *d* (em metros).

t (em s)	*d* (em m)
0	0
2	25
4	50
6	75
8	100
10	125

As duas grandezas – medida de tempo decorrido e medida da distância percorrida pelo automóvel – variam mantendo uma correspondência entre si: a cada valor de *t* corresponde um único valor de *d*. Por isso, dizemos que *d* varia em função de *t*.

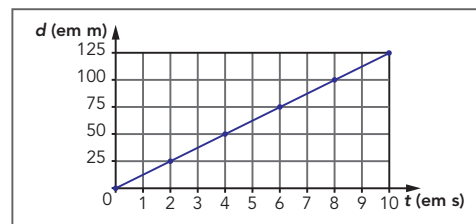
Além disso, podemos relacionar *d* e *t* por uma relação algébrica.

Note que, se a medida de velocidade é constante e há deslocamento de 25 metros a cada 2 segundos, então, a cada 1 segundo, há deslocamento de 25 m : 2, ou seja, 12,5 m. Podemos concluir que, em *t* segundos, a medida de distância percorrida será de $(t \cdot 12{,}5)$ metros. Logo:

$$d = t \cdot 12{,}5$$

Por exemplo, para $t = 4$ s, $d = 4 \cdot 12{,}5\ \text{m} = 50$ m, conforme se nota no quadro anterior.

Geometricamente, essa relação pode ser representada em um sistema de coordenadas cartesianas, como o mostrado na representação.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Grandezas diretamente proporcionais

Na situação anterior, do deslocamento do automóvel, para cada *t* positivo, a razão $\frac{d}{t}$ é sempre igual a 12,5. Conforme estudamos anteriormente, duas grandezas assim são chamadas de **grandezas diretamente proporcionais**.

> Duas grandezas variáveis são chamadas **grandezas diretamente proporcionais** em determinada situação quando a razão entre os valores da primeira grandeza e os valores correspondentes da segunda é sempre a mesma.

Quando duas grandezas são diretamente proporcionais em uma situação e o valor positivo *x* de uma delas corresponde ao valor *y* da outra, a razão $\frac{y}{x}$ é sempre a mesma, para todo valor de *x*. Por isso, podemos dizer que a razão $\frac{y}{x}$ é uma constante *k*. De $\frac{y}{x} = k$ decorre a relação algébrica:

$$y = k \cdot x$$

que é a relação característica entre as medidas de duas grandezas diretamente proporcionais.

Orientações didáticas

Variação de grandezas

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA12** e **EF08MA13** ao propor a identificação da natureza da variação de 2 grandezas, proporcionais ou não, a representação da relação existente entre elas, como sentença algébrica e no plano cartesiano, e aplicação desses conceitos para resolver e elaborar problemas. Mobiliza com maior ênfase a **CG02** ao usar a imaginação e a criatividade na elaboração de problemas e a **CEMAT02**, ao desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

O estudo de proporcionalidade entre grandezas é iniciado com uma situação do cotidiano sobre o deslocamento de um automóvel. Peça aos estudantes que analisem o quadro e verifique se eles percebem que para cada medida de tempo decorrido há um valor associado da medida da distância percorrida pelo automóvel, ou seja, a distância varia em função do tempo.

Grandezas diretamente proporcionais

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA12** e **EF08MA13** ao permitir identificar a natureza da variação de 2 grandezas diretamente proporcionais, representando a relação existente por meio de sentença algébrica e no plano cartesiano, além de resolver e elaborar problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais.

Comente que a palavra **razão** significa a divisão entre 2 grandezas, por exemplo, a razão entre a distância e o tempo significa efetuar a divisão entre a medida de distância e a medida de tempo.

Se a razão entre 2 grandezas for constante, dizemos que essas grandezas são diretamente proporcionais.

Atividades

1. d) Sim, porque a razão $\frac{v}{t}$ é constante para cada t positivo.

Faça as atividades no caderno.

1. Aníbal esqueceu a torneira da pia da cozinha aberta e deixou escorrer cerca de meio litro de água por minuto.

a) Copie o quadro no caderno e o preencha com a medida v de volume de água desperdiçada na medida t de tempo em que a torneira ficou aberta.

t (em minutos)	0	1	2	3	4	5	6
V (em litros)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

b) No caderno, represente esses dados geometricamente. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

c) Qual é a relação algébrica que relaciona v e t? $v = 0{,}5 \cdot t$

d) A medida de volume de água desperdiçada é diretamente proporcional à medida de tempo que a torneira ficou aberta? Por quê?

e) Se a torneira tivesse ficado aberta um dia inteiro, quantos litros de água teriam sido desperdiçados? 720 litros.

2. Uma estilista está desenvolvendo um novo modelo de vestido e foi a uma loja especializada para comprar tecido. O tecido que pretende comprar tem um custo de R$ 60,00 a cada metro da medida do comprimento (a medida da largura do rolo é constante).

a) Copie o quadro no caderno e o preencha com o preço y a ser pago na compra da medida x do tecido.

x (em metros)	0	1	2	3	4	5	6
y (em reais)	0	60	120	180	240	300	360

b) No caderno, represente esses dados em um sistema cartesiano.

c) Qual é a relação algébrica que relaciona y e x? $y = 60x$

d) O preço a ser pago é diretamente proporcional à medida do comprimento do tecido comprado? Por quê? Sim, porque a razão $\frac{y}{x}$ é constante para cada x positivo.

e) Sabendo que, para criar esse vestido, ela precisa de cerca de 2,2 m de medida do comprimento do tecido, qual será o valor pago pela estilista? R$ 132,00

3. Considere uma máquina em uma indústria que sempre produz 12 000 peças a cada 3 horas de funcionamento.

a) Copie o quadro no caderno e complete-o com a quantidade de peças produzidas a cada medida de tempo.

2. b) A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.
5. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Medida de tempo (em horas)	**Quantidade de peças produzidas**
3	12 000
6	24 000
9	36 000
12	48 000

b) No caderno, represente geometricamente a relação da medida de tempo (em horas) no eixo horizontal com a quantidade de peças produzidas no eixo vertical. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

c) Qual é a relação algébrica entre a quantidade y de peças produzidas e a medida t de tempo? $y = 4\,000t$

d) Em quantas horas são produzidas 30 000 peças? 7,5 h (7 horas e meia)

4. Considere a caixa-d'água de uma pequena cidade. A vazão da bomba dessa caixa é igual a 1 500 litros a cada minuto, ou seja, a cada minuto ela despeja 1 500 litros de água na caixa. Copie o quadro no caderno e complete-o com a medida de volume da caixa-d'água nos primeiros 10 minutos, considerando que ela estava inicialmente vazia. Em seguida, represente no caderno esses dados em um plano cartesiano e explicite a relação algébrica entre a medida de volume e a medida de tempo.

Medida de tempo (em minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Medida de volume (em litros)											

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

5. Um investidor decidiu aplicar 30% do salário na poupança com rendimento de 6% ao ano e mais 10% do salário em títulos públicos que rendem a taxa Selic de 5% ao ano. Sabendo que essas aplicações foram realizadas uma única vez e que o investidor recebe R$ 4.500,00 ao mês, qual será o retorno no período de 1 ano? Você acha que esse investimento teve um bom retorno? Como esse investidor poderia melhorar sua carteira?

6. Elabore, no caderno, um problema que envolva duas grandezas diretamente proporcionais e resolva-o. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Atividades

Nas atividades **1** a **4**, dialogue com os estudantes sobre a relação entre as grandezas envolvidas. Nas atividades **1** e **4**, é possível promover um debate visando à mobilização do TCT *Educação Ambiental*. Explore com eles as ideias de economia e desperdício de água e dos impactos ambientais relacionados a isso. Nessas atividades, que demandam a representação geométrica, estimule os estudantes a utilizar recursos tecnológicos, fazendo a construção de gráficos em um *software* de planilha eletrônica como o GeoGebra.

Antes de propor a atividade **5**, retome com os estudantes o conceito de porcentagem estudado anteriormente. Leia a atividade com eles e ajude-os a interpretar cada uma das partes do problema. Após a solução, promova um espaço de socialização das estratégias que eles percorreram para solucionar o problema. Aproveite o momento para conversar sobre a importância de ter uma reserva de emergência, como os investidores chamam, pois o dinheiro guardado deverá ser utilizado quando surgir um imprevisto, e de não gastar tudo ou mais do que se obtém como rendimento. As ideias sobre risco de investimento, contidas no texto de abertura desta Unidade, podem ser retomadas.

A atividade **6** demanda que os estudantes exercitem a elaboração de problemas. Estimule a produção coletiva, organizando a turma em pequenos grupos para elaborarem e resolverem os problemas propostos. Depois, promova um debate sobre as soluções encontradas e as estratégias percorridas por eles.

Orientações didáticas

Grandezas inversamente proporcionais

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA12** e **EF08MA13** ao permitir identificar a natureza da variação de 2 grandezas inversamente proporcionais, representando a relação existente por meio de sentença algébrica e no plano cartesiano, além de resolver e elaborar problemas envolvendo grandezas inversamente proporcionais.

Para desenvolver o conteúdo deste tópico, foi trazida uma situação-problema envolvendo uma viagem de ônibus, relacionando a velocidade percorrida com a duração da viagem. Quanto maior for a medida de velocidade percorrida, menor será a medida de tempo, ou seja, a duração da viagem, e vice-versa. Portanto, dizemos que as grandezas velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais.

Se o produto entre 2 grandezas for constante, dizemos que essas grandezas são inversamente proporcionais.

Grandezas inversamente proporcionais

A viagem

Uma viagem de ônibus entre as cidades de São Paulo e Rio de Janeiro tem duração de 6 horas se o veículo trafegar a uma medida de velocidade constante de 80 km/h. Sobre essa situação, uma pessoa faz esta suposição:

Viajando a uma medida de velocidade constante de 80 km/h, a viagem é realizada em 6 horas. Se essa mesma viagem fosse realizada a uma medida de velocidade constante de 40 km/h, quanto tempo levaria?

Como a medida de velocidade diminui pela metade (de 80 km/h para 40 km/h), teremos que a medida de tempo de viagem será multiplicada por 2; logo, a viagem, que antes levaria 6 horas, passa a demorar 12 horas para ser realizada.

As grandezas velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais nessa situação, pois, diminuindo a medida v de velocidade, a medida t de tempo para realizar o mesmo percurso aumenta, de modo a manter constante o produto $v \cdot t$.

O quadro a seguir relaciona a medida de velocidade com a medida de tempo de duração da viagem.

v (em km/h)	t (em h)	$v \cdot t$
80	6	480
40	12	480
120	4	480
60	8	480

Duas grandezas variáveis são denominadas **grandezas inversamente proporcionais** em determinada situação quando o produto de cada valor da primeira grandeza pelo valor correspondente da segunda grandeza é sempre o mesmo.

Quando duas grandezas são inversamente proporcionais em uma situação, se a um valor positivo x de uma delas corresponde o valor y na outra, o produto $x \cdot y$ é sempre o mesmo para todo valor de x. Por isso, podemos dizer que o produto $x \cdot y$ é uma constante k. De $x \cdot y = k$ decorre a relação algébrica:

$$y = \frac{k}{x}$$

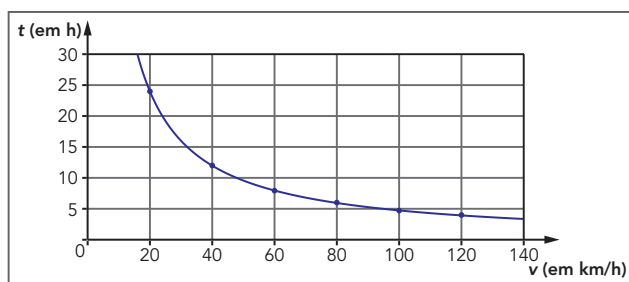
que é a relação característica entre as medidas de duas grandezas inversamente proporcionais.

Note que essa relação pode ser escrita como $y = k \cdot \frac{1}{x}$, ou seja, y é diretamente proporcional ao inverso de x.

No exemplo da viagem, temos $v \cdot t = 480$, logo, $t = \frac{480}{v}$. Para $v = 40$ km/h, temos $t = \frac{480}{40}$ h $= 12$ h.

Geometricamente, essa relação pode ser representada em um sistema de coordenadas cartesianas, como está representado a seguir.

v (em km/h)	t (em h)
20	24
40	12
60	8
80	6
100	4,8
120	4

t (em h)
v (em km/h)

Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

7. a) Inversamente proporcionais, porque, aumentando-se a quantidade de pessoas, a medida de tempo diminui proporcionalmente (por exemplo, dobrando-se a quantidade de pessoas, a medida de tempo diminui pela metade).

Faça as atividades no caderno.

7. A medida de tempo dispendido para aparar a grama de um parque depende da quantidade de pessoas que vão executar o serviço. Com apenas 2 pessoas trabalhando, o serviço dura 40 horas.

No caderno, faça o que se pede:

a) A medida de tempo gasto para executar o serviço e a quantidade de pessoas trabalhando são grandezas direta ou inversamente proporcionais? Por quê?

b) Faça um quadro marcando a medida de tempo gasto se o serviço for feito por 2, 4, 8 ou 10 pessoas. **b)** e **d)** As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

c) Qual é a relação algébrica entre a medida t de tempo e a quantidade n de pessoas? $nt = 80$

d) Represente essa relação geometricamente.

e) Com 16 pessoas trabalhando, qual seria a medida de tempo gasto? 5 h

f) Com quantas pessoas trabalhando o serviço seria executado em apenas 4 horas? 20 pessoas.

g) Elabore uma pergunta sobre a situação do enunciado, troque com um colega e, em seguida, corrijam juntos. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

8. O zelador de um clube precisa esvaziar por completo uma piscina que tem medida de capacidade de 300 000 litros de água. Para isso, ele conta com 2 bombas que retiram água da piscina. A bomba-d'água *A* tem vazão de 1 000 litros por minuto, enquanto a bomba *B* tem vazão de 2 500 litros por minuto.

a) Quanto tempo a bomba-d'água *A* leva para esvaziar essa piscina? 300 minutos (5 h).

b) Quanto tempo a bomba-d'água *B* leva para esvaziar essa piscina? 120 minutos (2 h).

c) Se as 2 bombas-d'água funcionarem simultaneamente, quantos minutos elas levarão para esvaziar a piscina por completo? Aproximadamente 86 minutos.

9. Considere o quadro a seguir, que relaciona a medida de velocidade de uma tartaruga, em centímetros por minuto, com a medida de tempo que ela leva para percorrer uma distância de 5 m (500 cm).

Copie o quadro no caderno e complete-o com as medidas de tempo associadas a cada medida de velocidade. No caderno, represente geometricamente os dados e explicite a relação algébrica entre as medidas de tempo e de velocidade.

Medida de velocidade (em cm/min)	Medida de tempo (em min)
50	10
25	20
20	25
10	50
5	100

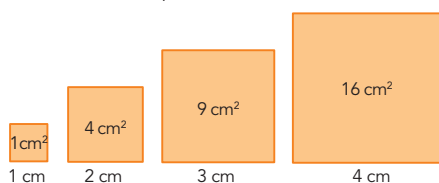
A representação geométrica encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual. $v \cdot t = 500$

10. Elabore, no caderno, um problema que envolva duas grandezas inversamente proporcionais e resolva-o. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Grandezas não proporcionais

No quadro a seguir, relacionamos a medida de comprimento do lado de cada região quadrada apresentada com as medidas de perímetro e área delas.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

1 cm² — 1 cm; 4 cm² — 2 cm; 9 cm² — 3 cm; 16 cm² — 4 cm

Medida de comprimento do lado (em cm)	1	2	3	4
Medida de perímetro (em cm)	4	8	12	16
Medida de área (em cm²)	1	4	9	16

Para as grandezas comprimento do lado e perímetro, temos:

$$\frac{\text{medida de perímetro}}{\text{medida de comprimento do lado}} = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = 4$$

Orientações didáticas

Atividades

Nas atividades **7** e **9**, que demandam a representação geométrica, estimule os estudantes a utilizar recursos tecnológicos, fazendo a construção de gráficos em um *software* de planilha eletrônica como o GeoGebra.

A atividade **10** demanda que os estudantes exercitem a elaboração de problemas. Ela pode ser utilizada como atividade diagnóstica, visando analisar se os estudantes compreenderam os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Caso identifique que algum estudante cometeu um erro conceitual, retome com a turma os conceitos estudados neste capítulo e proponha novas atividades para avaliar se as dúvidas foram sanadas.

Grandezas não proporcionais

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA12** e **EF08MA13** ao permitir identificar a natureza da variação de 2 grandezas não proporcionais, representando a relação existente por meio de sentença algébrica e no plano cartesiano, além de resolver e elaborar problemas envolvendo grandezas não proporcionais.

Neste tópico, é mostrada uma sequência de quadrados de diferentes tamanhos, relacionando a medida de perímetro com a medida do lado e concluindo que essas 2 grandezas são diretamente proporcionais.

Depois, é estabelecida uma relação entre a medida de área e a medida do lado, concluindo que essas 2 grandezas não são diretamente nem inversamente proporcionais, e, portanto, são grandezas não proporcionais. Analisar esses casos específicos para concluir uma regra geral contribui para o desenvolvimento do pensamento lógico indutivo.

Solicite aos estudantes que encontrem outros exemplos de grandezas não proporcionais.

Orientações didáticas

Atividades

Proponha que os estudantes se organizem em pequenos grupos para solucionar as atividades propostas. Crie um espaço de socialização das respostas e estimule a participação e a argumentação de todos.

As atividades **11** a **14** favorecem o desenvolvimento dos TCTs *Trabalho* e *Educação para o Consumo*. Destaque a profissão de azulejista e a Matemática empregada. Na área da construção civil são demandados diversos cálculos, como verificar o prumo de uma parede, calcular o contrapeso, as medidas de uma mangueira de nível, etc., aproximações e procedimentos que são de cunho prático e devem ser valorizados como conhecimentos das profissões dessa área.

Nesse caso, a medida de perímetro é diretamente proporcional à medida de comprimento do lado da região quadrada. A relação algébrica entre a medida y de perímetro e a medida x de comprimento do lado é $\frac{y}{x} = 4$ ou $y = 4x$.

Para as grandezas comprimento do lado e área, temos: $\frac{\text{medida de área}}{\text{medida de comprimento do lado}} = \frac{1}{1} \neq \frac{4}{2} \neq \frac{9}{3} \neq \frac{16}{4}$

Nesse caso, a razão entre as medidas correspondentes a cada uma das grandezas não é sempre a mesma, então, a área não é diretamente proporcional ao comprimento do lado. No entanto, também não é inversamente proporcional, pois, aumentando a medida de comprimento do lado, aumenta a medida de área. Concluímos que as grandezas comprimento do lado e área são **grandezas não proporcionais**.

Sabemos que a relação algébrica entre a medida A de área e a medida x de comprimento do lado do quadrado é $A = x^2$. Note que não se trata de uma relação de proporcionalidade direta nem inversa entre as grandezas área e comprimento do lado do quadrado.

Atividades

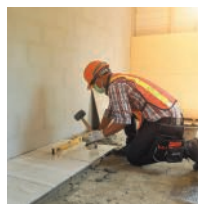
13. Sim; não; a quantidade de ladrilhos é inversamente proporcional à medida de área do ladrilho.

Faça as atividades no caderno.

Texto para as atividades **11** a **14**:

José Luiz quer revestir o piso do quintal da casa dele com ladrilhos de cerâmica, todos iguais. O quintal é retangular e as dimensões medem 4 m por 9 m.

No depósito de materiais de construção, ele encontrou ladrilhos quadrados com lados medindo 30 cm, 40 cm, 50 cm e 60 cm. Todos os ladrilhos são vendidos em caixas com 10 unidades cada uma.

Sakura Image Inc/Shutterstock

Azulejista assentando um piso cerâmico.

11. Quantos ladrilhos de cada tipo são necessários para cobrir todo o piso do quintal da casa de José Luiz? Copie o quadro no caderno e preencha-o.

Medida de comprimento do lado do ladrilho (em cm)	30	40	50	60
Medida de área do ladrilho (em cm^2)	900	1 600	2 500	3 600
Quantidade de ladrilhos	400	225	144	100

12. Na compra, o azulejista recomenda acrescentar cerca de 10% à quantidade de ladrilhos para repor possíveis perdas decorrentes de recortes ou danos no revestimento. Quantas caixas José Luiz deve comprar em cada caso? Copie o quadro a seguir no caderno e preencha-o.

Medida de comprimento do lado do ladrilho (em cm)	30	40	50	60
Quantidade de ladrilhos + 10%	440	248	159	110
Quantidade de caixas a comprar	44	25	16	11

13. Há alguma relação de proporcionalidade entre as grandezas do quadro da atividade **11**? E da atividade **12**? Se sim, quais?

14. Nesse depósito, o preço da caixa de cada um dos ladrilhos quadrados com lados medindo 30 cm, 40 cm, 50 cm e 60 cm é, respectivamente, R$ 50,00, R$ 130,00, R$ 121,00 e R$ 215,00.

Sabendo que José Luiz analisou as opções junto com o azulejista e concluiu que todos os ladrilhos são adequados para a finalidade pretendida, qual ladrilho você acredita que ele deva escolher?

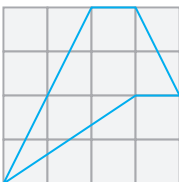
15. Uma empresa de fabricação de embalagens pretende produzir caixas de papelão com formato cúbico. Expresse por meio de sentença algébrica a relação existente entre a medida V de volume de uma caixa e a medida x de comprimento da aresta dessas caixas. Construa um gráfico que represente as medidas de volume em função das medidas das arestas das caixas que serão produzidas, sabendo que x pode variar de 15 cm a 30 cm.

Depois, responda às seguintes perguntas:

a) As grandezas volume e comprimento da aresta da caixa são diretamente proporcionais? Não.

b) As grandezas volume e comprimento da aresta da caixa são inversamente proporcionais? Não.

14. Resposta esperada: A opção mais barata, ou seja, o ladrilho cujo lado mede 50 cm, pois o preço de 16 caixas desse revestimento custa o menor valor total: R$ 1.936,00.

15. $V = x^3$; a representação gráfica encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Proposta para o professor

Segue uma sugestão de vídeo, que também pode ser sugerido aos estudantes, com aplicações da Matemática na construção civil.

MATEMÁTICA em toda parte - Matemática na construção. [*s. l.*: *s. n.*], 2015. 1 vídeo (43 min). Publicado pelo canal Matemática do cotidiano. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=1rd18w0WL_I. Acesso em: 23 jun. 2020.

Na Unidade

Faça as atividades no caderno.

As imagens não estão representadas em proporção.

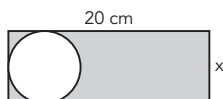
1. (PUC-MG) De uma placa quadrada de 16 cm², foi recortada uma peça conforme indicado na figura. A medida da área da peça recortada, em centímetros quadrados, é: Alternativa **c**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7

2. (Embraer-SP) De uma placa retangular de alumínio, foi recortado um círculo de área igual a 49π cm², tangenciando os lados da placa, conforme mostra a figura. Alternativa **a**.

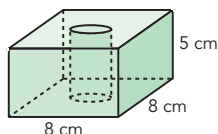
Banco de imagens/Arquivo da editora

20 cm
x

Pode-se afirmar que a medida, em centímetros, do perímetro dessa chapa de alumínio é igual a:

a) 68 **b)** 62 **c)** 58 **d)** 54

3. Uma peça de acrílico lembra o formato de um bloco retangular cujas dimensões medem 8 cm por 8 cm por 5 cm. Uma cavidade cilíndrica, com medida do diâmetro da base de 3 cm, atravessa essa peça da base inferior até a superior.

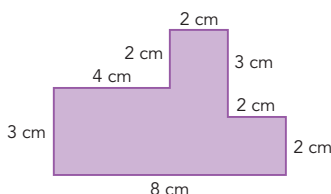
Banco de imagens/Arquivo da editora

5 cm
8 cm
8 cm

A medida de volume de acrílico nessa peça é, aproximadamente: Alternativa **d**.

a) 225 cm³ **c)** 275 cm³
b) 240 cm³ **d)** 285 cm³

4. (Unisa-SP) A figura representa a base de um prisma reto de 5 cm de medida da altura.

Banco de imagens/Arquivo da editora

2 cm
2 cm
4 cm
3 cm
2 cm
3 cm
2 cm
8 cm

Se todos os lados consecutivos dessa base formam ângulos retos, a medida de volume ocupada por esse prisma é igual a: Alternativa **e**.

a) 140 cm³ **c)** 145 cm³ **e)** 130 cm³
b) 135 cm³ **d)** 150 cm³

5. Um veterinário receitou um medicamento em gotas para uma tutora ministrá-lo ao cão dela. A dosagem recomendada foi: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. A tutora seguiu a recomendação ministrando 30 gotas do remédio ao cão a cada 8 horas. Qual é a medida de massa corporal do cão, em quilogramas? 12 kg

6. (Enem) Há, em virtude da demanda crescente de economia de água, equipamentos e utensílios como, por exemplo, as bacias sanitárias ecológicas, que utilizam 6 litros de água por descarga em vez dos 15 litros utilizados por bacias sanitárias não ecológicas, conforme dados da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

Qual será a economia diária de água obtida por meio da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica? Alternativa **b**.

a) 24 litros. **c)** 40 litros. **e)** 50 litros.
b) 36 litros. **d)** 42 litros.

7. Um abrigo para cães e gatos tem 76 animais e uma quantidade de ração, em porções individuais diárias, suficiente para 30 dias. Esse abrigo receberá mais 20 animais. Para quantos dias, no máximo, a quantidade de ração será suficiente para todos os animais? 23 dias.

8. Elabore um problema que possa ser resolvido com as operações a seguir.

1 min —— 120 L
75 min —— x
$\frac{1}{75} = \frac{120}{x}$

$x = 120 \cdot 75 = 9\,000$
$x = 9\,000$ L

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

9. Elabore um problema que possa ser resolvido com as operações a seguir.

1 h = 60 min
80 km/h —— 60 min
96 km/h —— t
$80 \cdot 60 = 96 \cdot t$

$t = \frac{80 \cdot 60}{96} = 50$
$t = 50$ min

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

As atividades **1** e **2** abordam o conceito de área de figuras geométricas. Erros nas resoluções dessas atividades podem ser indicativos de alguma dificuldade no entendimento do conceito de área e de como decompor uma figura geométrica em outras cujas fórmulas para calcular a medida de área são conhecidas. Retome o conteúdo estudado no início da Unidade dando alguns exemplos de modo a sanar as dúvidas dos estudantes.

As atividades **3** e **4** envolvem o conceito de volume. Relembre com os estudantes o que é volume e como calcular a medida de volume de um cilindro e de um prisma. Erros nas resoluções dessas atividades podem estar relacionados ao não entendimento do que é volume e como efetuar o cálculo de sua medida.

As atividades **5** a **7** abordam o conceito de grandezas proporcionais. Verifique se os estudantes conseguem identificar se as grandezas envolvidas em cada atividade são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais. A atividade **5** favorece o desenvolvimento do TCT *Saúde* e a atividade **6** favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Ambiental*.

Nas atividades **8** e **9**, eles devem elaborar problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais, respectivamente. Verifique se os problemas criados possuem todas as informações necessárias para os cálculos dados e para responder às perguntas elaboradas.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da Unidade favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação para valorização do culturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras* e *Educação em Direitos Humanos*, ao promover positivamente a imagem de comunidades quilombolas. Também mobiliza a **CG07**, a **CEMAT04** e a **CEMAT07**, por incentivar o respeito aos direitos humanos, a consciência socioambiental e a valorização das diferentes opiniões argumentadas.

O texto de abertura da Unidade tem o objetivo de trazer um contexto da realidade de uma parcela do povo brasileiro que envolve o conceito de média. Aproveite para perguntar aos estudantes o que entendem por média. É importante incentivá-los a desenvolver a consciência de igualdade de direitos a todas as pessoas, independentemente das diferenças étnicas, culturais e econômicas.

Se possível, organize um trabalho em parceria com professores de **História** para que os estudantes conheçam o processo histórico de formação das comunidades quilombolas no Brasil.

9 UNIDADE

Estatística e Probabilidade

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- obter valores de medidas de tendência central e amplitude dos dados de uma pesquisa estatística;
- verificar a adequação de vários tipos de gráfico para representar um conjunto de dados;
- construir gráficos de barras e gráficos de setores;
- aplicar o princípio fundamental da contagem e calcular a probabilidade de eventos.

CAPÍTULOS

Saúde física e mental contribuem para uma maior qualidade de vida.

Proposta para o professor

Para aprofundar os conhecimentos sobre comunidades quilombolas e seus direitos, indicamos as seguintes referências:

COSTA FILHO, Aderval. Quilombos e Povos Tradicionais. *Texto analítico do Mapa dos Conflitos Ambientais*, GESTA, UFMG, 2010. Disponível em: https://conflitosambientaismg.lcc.ufmg.br/wp-content/uploads/2014/04/TAMC-COSTA_FILHO_Aderval_Quilombos_e_Povos_Tradicionais.pdf. Acesso em: 23 jun. 2022.

GOMES, Lilian C. B. O direito quilombola e a democracia no Brasil. *Revista de Informação Legislativa*, Brasília, DF, ano 50, n. 199, jul./set. 2013.

Como se mede a qualidade de vida?

HTWE/Shutterstock

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é um indicador socioeconômico que visa estabelecer um critério de comparação da qualidade de vida em diferentes países, estados ou regiões. Proposto em 1990 por dois economistas, o paquistanês Mahbub ul Haq (1934-1998) e o indiano Amartya Sem (1935-), o índice considera três pilares fundamentais para medir a qualidade de vida: a renda (R), a escolaridade (E) e a saúde (S). A proposta inicial do IDH era calcular a média aritmética das variáveis associadas a esses três pilares, em que cada variável poderia assumir um valor positivo até 1:

$$\text{IDH} = \frac{R + E + S}{3}$$

Desse modo, se a região de interesse assumisse $R = 0{,}9$ como indicador de renda, $E = 0{,}8$ como indicador de escolaridade e $S = 0{,}7$ como indicador de saúde, o IDH dessa região seria dado por:

$$\frac{0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}7}{3} = \frac{2{,}4}{3} = 0{,}8$$

Com o passar dos anos, os índices utilizados no cálculo do IDH foram atualizados a fim de minimizar diferenças ao comparar os países. Por causa dessas atualizações, fez-se necessário o uso de outra média para o cálculo do IDH, a média geométrica das variáveis. A média geométrica de três números positivos é obtida extraindo a raiz cúbica do produto deles. Analogamente ao conceito de raiz quadrada, que você estudou, a raiz cúbica desse produto (que é positivo) é o número positivo que, elevado ao cubo, é igual a esse produto. Portanto, o cálculo do IDH passou a ser $\text{IDH} = \sqrt[3]{R \cdot E \cdot S}$ e o IDH da mesma região que exemplificamos seria:

$$\sqrt[3]{0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7} \simeq 0{,}796$$

Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU), em 2019, a Noruega ocupava o topo da lista do IDH, com o índice de 0,957, seguida por Irlanda e Suíça (ambas com IDH 0,955), Hong Kong e Islândia (ambas com IDH 0,949). O Brasil ocupava a 84ª posição no *ranking* de 189 nações, com IDH de 0,765.

Fontes dos dados: PROGRAMA DAS NAÇÕES UNIDAS PARA O DESENVOLVIMENTO. *Relatório do desenvolvimento humano 2020.* Nova York: PNUD, 2020. Disponível em: https://hdr.undp.org/system/files/documents/global-report-document/hdr2020overviewportuguesepdf.pdf. MACKENZIE. *O que é IDH e como ele é calculado.* Disponível em: https://blog.mackenzie.br/vestibular/materias-vestibular/o-que-e-idh-e-como-ele-e-calculado/. Acesso em: 28 maio 2022.

Para saber mais sobre a história do IDH e os cálculos envolvidos, visite: A Matemática do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) – parte 1. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=fARITzyUPgY. Acesso em: 28 maio 2022.

Você sabe qual é o IDH do município onde mora? Junte-se a 3 colegas, pesquisem essa informação no *site* IBGE Cidades (disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/; acesso em: 28 maio 2022) e discutam sobre ações que vocês acreditam que possam melhorar esse índice. Em seguida, apresentem as ações que vocês discutiram para toda a turma.

Prática de pesquisa

Respostas pessoais.

Orientações didáticas

Abertura

Como o conceito de porcentagem é importante para o desenvolvimento desta Unidade, sugerimos que, após trabalhar com o texto de abertura, o professor proponha uma atividade diagnóstica a fim de identificar a necessidade de retomar o conceito de porcentagem com maior profundidade. Caso existam lacunas, é possível utilizar-se de metodologias ativas, como sala de aula invertida, para a recuperação, indicando vídeos sobre esse tema e separando parte da aula para que os estudantes compartilhem os aprendizados.

Proposta para o professor

Para conhecer mais da metodologia ativa de sala de aula invertida, indicamos a seguinte referência, que apresenta uma maneira de implementar essa metodologia e possibilidades de aplicação dela em sala de aula.
SILVEIRA JUNIOR, Carlos R. da. *Sala de aula invertida*: por onde começar? Goiás: IFG, 2020.

Proposta para o estudante

Caso queira retomar o conceito de porcentagem, indicamos o material do Portal da Obmep, que disponibiliza vídeos e exercícios que podem ser utilizados. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=21. Acesso em: 23 jun. 2022.

Orientações didáticas

Média aritmética

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA25** ao introduzir o conceito de média aritmética.

Neste capítulo é dado um enfoque maior na habilidade **EF08MA25**, uma vez que são introduzidos ou aprofundados os conceitos de média, moda, mediana e amplitude. A habilidade **EF08MA04** é trabalhada de maneira transversal ao longo do conteúdo, pois envolve cálculo de porcentagem e uso da calculadora.

Inicie o capítulo lendo a tirinha com os estudantes e aproveite para realizar perguntas com o objetivo de verificar conhecimentos prévios: "Qual é a diferença de sentido da palavra 'média' empregada nos 2 momentos?"; "Estar abaixo da média é sempre ruim?"; "Em que outros contextos você já viu a palavra 'média' ser utilizada?"; "O que você imagina ser a média aritmética?". Aproveite a oportunidade para realizar um trabalho interdisciplinar com o componente curricular **Língua Portuguesa**, explorando o gênero textual tirinha.

Com base nas respostas, construa em conjunto com a turma o conceito de média e valorize as diferentes ideias que surgirem.

Média ponderada

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA25** ao introduzir o conceito de média ponderada.

Ao apresentar o critério do professor Antônio, peça aos estudantes que calculem a média aritmética simples das 4 notas de Alexandre nos trabalhos e nas provas de História, a fim de notarem a diferença nos resultados. A partir disso, proponha as seguintes reflexões: "Quais seriam os possíveis motivos para a utilização de média ponderada no fechamento de uma média escolar?"; "Em que outros contextos esse tipo de média é utilizado?".

É esperado que os estudantes percebam que um dos motivos que levam a média ponderada a ser utilizada em uma média escolar é quando se faz necessário atribuir importâncias diversas para as atividades.

CAPÍTULO 17

Medidas estatísticas

NA BNCC
EF08MA04
EF08MA25

Média aritmética

Calvin & Hobbes, Bill Watterson © 1988 Watterson/Dist. by Universal Uclick

WATTERSON, Bill. *Calvin & Hobbes*, 1988.

O critério da professora Eliete

A professora Eliete, de Língua Portuguesa, calculou a média das notas dos estudantes no primeiro bimestre usando o seguinte critério: adicionou as notas de 3 provas com a nota de 1 trabalho e dividiu o resultado por 4.

Alexandre tirou 6,0, 4,5 e 7,0 nas provas e 7,5 no trabalho. Com que média ele ficou?

Vamos calcular:

$$\frac{6{,}0 + 4{,}5 + 7{,}0 + 7{,}5}{4} = \frac{25{,}0}{4} = 6{,}25$$

Alexandre ficou com média 6,25.

No problema proposto, foi calculada a **média aritmética** das notas.

A **média aritmética** de *n* números dados é o número que se obtém adicionando os *n* números e dividindo o resultado por *n*.

Trocando cada número pela média aritmética, a soma fica preservada. Verifique:

$$6{,}0 + 4{,}5 + 7{,}0 + 7{,}5 = 25{,}0$$

$$6{,}25 + 6{,}25 + 6{,}25 + 6{,}25 = 25{,}0$$

Média ponderada

O critério do professor Antônio

O professor Antônio, de História, aplicou 2 provas e propôs 2 trabalhos. A média bimestral foi calculada assim: ele adicionou as notas dos trabalhos, multiplicadas por 2, às notas das provas, multiplicadas por 3, e dividiu o resultado por 10.

Alexandre tirou 6,0 e 7,0 nos trabalhos e 4,0 e 5,0 nas provas. Com que média ele ficou?

Vamos calcular:

$$\frac{2 \cdot 6{,}0 + 2 \cdot 7{,}0 + 3 \cdot 4{,}0 + 3 \cdot 5{,}0}{10} = \frac{12{,}0 + 14{,}0 + 12{,}0 + 15{,}0}{10} = \frac{53{,}0}{10} = 5{,}3$$

Alexandre ficou com média 5,3.

Nesse problema, foi calculada a **média ponderada** das notas. Cada trabalho tinha peso 2, e cada prova tinha peso 3.

A **média ponderada** de *n* números dados é o número que se obtém multiplicando cada número pelo seu respectivo peso, adicionando esses produtos e dividindo o resultado pela soma dos pesos.

Quanto maior o peso, maior é a importância do dado ao qual se refere.

O salário médio

Nos supermercados, trabalham supervisores, caixas, auxiliares, entre outros funcionários.

Se um supermercado emprega 4 supervisores, sendo o salário de cada um deles R$ 3.850,00 por mês, 20 operadores de caixa, cujo salário de cada um é R$ 2.800,00, e 40 auxiliares, que ganham, cada um, R$ 1.975,00 por mês, qual é o salário médio desses funcionários?

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

Vamos calcular a média aritmética de 4 números iguais a 3 850, outros 20 números iguais a 2 800 e 40 números iguais a 1 975:

$$\frac{\overbrace{3850 + 3850 + 3850 + 3850}^{4 \text{ parcelas}} + \overbrace{2800 + 2800 + \ldots + 2800}^{20 \text{ parcelas}} + \overbrace{1975 + 1975 + \ldots + 1975}^{40 \text{ parcelas}}}{64}$$

64 — total de parcelas

Esse cálculo pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\frac{4 \cdot 3850 + 20 \cdot 2800 + 40 \cdot 1975}{64}$$

Chegaremos ao mesmo resultado se fizermos a média ponderada dos números 3 850, 2 800 e 1 975, com pesos 4, 20 e 40, respectivamente.

Fazendo os cálculos, obtemos:

$$\frac{4 \cdot 3850 + 20 \cdot 2800 + 40 \cdot 1975}{4 + 20 + 40} = \frac{15\,400 + 56\,000 + 79\,000}{64} = \frac{150\,400}{64} = 2350$$

Portanto, o salário médio dos funcionários do supermercado é R$ 2.350,00 por mês.

Quando precisamos calcular a média aritmética de muitos números, entre os quais aparecem números repetidos, podemos considerá-la uma média ponderada, em que os pesos são a quantidade de vezes que cada número aparece.

Orientações didáticas

Média ponderada

Para melhor compreensão do conceito e do cálculo de média ponderada, proponha aos estudantes uma atividade complementar. Realize uma pesquisa rápida com eles a respeito de quantos irmãos eles têm a fim de verificar a média ponderada sendo utilizada na prática. Pode-se já introduzir a ideia de tabela de frequências, em que os dados são organizados em uma tabela com 2 colunas: uma com a quantidade de irmãos e outra com a quantidade de pessoas que deram cada resposta. Para saber a quantidade média de irmãos dos estudantes da sala é preciso multiplicar os valores correspondentes das colunas, somar os produtos e dividir o resultado pela quantidade de estudantes que responderam à pesquisa. Ressalte que esse tipo de método para calcular a média é muito utilizado em pesquisas estatísticas.

Orientações didáticas

Vamos interpretar a média

Neste tópico, é importante ressaltar que, mesmo que os dados sejam discretos, a média pode resultar em um número decimal, uma vez que é o resultado de uma divisão, como ocorreu no exemplo da quantidade de irmãos.

Estimule os estudantes a acessar o *site* do IBGE proposto no boxe de sugestão, para que aprofundem a compreensão relacionada ao conceito de média. Outra sugestão para trabalhar esse material é propor uma metodologia ativa de sala de aula invertida, em que os estudantes podem ler o conteúdo do *site* antes da aula e, no momento da aula, discutir as impressões e os aprendizados do que leram, especialmente em relação ao caso cuja média não é uma representação dos dados. Nesse caso, ocorre o que chamamos de ***outliers*** (valores atípicos, dados que estão fora da realidade observada, que interferem no cálculo da média).

Considerando o exemplo "O salário médio", exposto no Livro do Estudante, destaque que nem sempre a média é a melhor representação da realidade – por exemplo, se fossem incluídos 3 funcionários com salários muito altos, a média de salários de todos os funcionários não representaria a realidade da empresa. Em outra situação, se mais funcionários ganhando bem menos fossem incluídos, a média também seria alterada e não representaria a realidade estudada. Portanto, podemos concluir que a média é sensível à amplitude dos dados considerados.

Atividades

As atividades **1** e **2** tratam de média aritmética.

É possível que os estudantes tenham dificuldades de identificar o cálculo a ser realizado na atividade **1**, pelo fato de os dados terem sido fornecidos na forma de gráfico. Ressalte que, nesse caso, o valor da média foi igual ao número de unidades vendidas em 2 dos meses.

Na atividade **2**, caso os estudantes tenham dificuldades de realizar o cálculo da média, oriente-os a transformar todas as medidas de tempo para a unidade de medida segundo, calcular a média desses valores e, por fim, converter o resultado para a unidade de medida minuto, ressaltando que, a cada 60 segundos, soma-se 1 no campo dos minutos; a cada 60 minutos, acrescenta-se 1 no campo das horas; etc.

Caso seja possível, promova uma discussão sobre a importância de realizar atividade física em todas as idades, mobilizando o TCT *Saúde* e a **CG08** sobre o autocuidado com a saúde física e emocional.

Na atividade **3**, para saber a média mínima e a máxima, é preciso que os estudantes calculem a média aritmética supondo que Bia tire 0 ou 10, respectivamente. Por ter sido fornecida a média das 3 notas, e não as notas em si, é possível que eles tenham dificuldades para realizar o cálculo.

Vamos interpretar a média

Note que a soma de todos os salários é R$ 150.400,00. Se cada empregado ganhasse R$ 2.350,00 por mês, a soma seria a mesma, pois $64 \times 2\,350 = 150\,400$. Ou seja, a média R$ 2.350,00 é o que cada empregado ganharia se o total gasto em salários fosse dividido igualmente entre todos eles.

Mas, na realidade, nenhum deles ganha R$ 2.350,00 por mês. A média, portanto, pode ser um número diferente de todos os outros que foram utilizados para calculá-la.

Acompanhe este outro exemplo:

O grupo de Luana, Danilo, Renata e Paola está elaborando um trabalho de Estatística.

Luana tem 3 irmãos, Danilo tem 4, Renata tem 2 e Paola tem 1 irmão. Qual é a média dos números de irmãos desse grupo de estudantes?

Como $\frac{3+4+2+1}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5$, em média cada integrante do grupo tem 2,5 irmãos. A afirmação é correta, mesmo sendo impossível uma pessoa ter 2,5 irmãos.

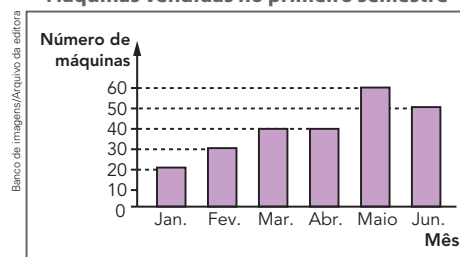
Para conhecer mais a média aritmética e ponderada, o *site* do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) apresenta informações complementares e dois exemplos nos quais é possível analisar quando a média aritmética é ou não uma representação da realidade apresentada pelos dados.

Visite: IBGE educa. *A média aritmética:* o que é? Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/professores/educa-recursos/17862-media-pagina-inicial.html. Acesso em: 11 abr. 2022.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. O gráfico a seguir mostra quantas unidades de certo tipo de máquina foram vendidas por uma indústria no primeiro semestre de um ano.

Máquinas vendidas no primeiro semestre

Dados elaborados para fins didáticos.

Qual foi a média aritmética do número de máquinas vendidas por mês? 40 unidades.

2. Leia o texto a seguir.

> As vantagens da promoção da atividade física são numerosas – a prevenção de mortes prematuras ou desnecessárias, incapacidades, controle dos custos com a saúde, manutenção de uma qualidade de vida melhor. Sabemos e sentimos que a prática regular de exercício por pessoas saudáveis – tanto homens como mulheres, de qualquer idade – desencadeia uma série de adaptações fisiológicas, psíquicas e sociais que vão proporcionar efeitos benéficos importantes e numerosos para a saúde.
>
> EXERCÍCIO FÍSICO. Dicas em Saúde. *Biblioteca virtual em saúde*, [s. l.], jan. 2004. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/dicas/38exercicios.html. Acesso em: 17 mar. 2022.

Para realizar uma atividade física, Paulo Roberto corre diariamente em um mesmo percurso. Nas 3 últimas corridas, suas medidas de tempo foram:

55 min 40 s | 54 min 25 s | 55 min 10 s

Qual é a média aritmética dessas 3 medidas? 55 min 5 s

3. Durante um bimestre, o professor Humberto atribui a cada estudante 4 notas de 0 a 10. A média bimestral é a média aritmética das 4 notas. Com 3 notas já conhecidas, cuja média aritmética é 6,0, Bia está fazendo uma previsão de sua média bimestral. Qual será, no mínimo, essa média? E no máximo? 4,5; 7.

4. Uma concessionária de veículos vendeu, num fim de semana, 6 carros no valor de R$ 40.000,00 cada um, 10 carros de R$ 44.800,00 cada um, 2 carros de R$ 64.000,00 cada um e 2 carros de R$ 96.000,00 cada um. Qual foi o valor médio por carro vendido? R$ 50.400,00

5. Um pé de alface era vendido em janeiro por R$ 2,70 e, em fevereiro, devido às chuvas, por R$ 3,60. Em janeiro, a quantidade de alface vendida foi o dobro da vendida em fevereiro. Em média, por quanto foi vendido um pé de alface nesse período? R$ 3,00

6. Como você estudou, inflação é o termo utilizado em economia para se referir à alta dos preços de um conjunto de produtos e serviços em determinado período. Ela é medida por meio de índices de preços desse conjunto. Alguns exemplos desses índices são: Índice de Preços ao Produtor Amplo (IPA), Índice de Preços ao Consumidor (IPC) e Índice Nacional de Custo da Construção (INCC).

Para sintetizar o que é obtido por alguns índices, existe o Índice Geral de Preços do Mercado (IGP-M), que corresponde à média ponderada dos seguintes índices de inflação: IPA-M, com peso de 60%; IPC-M, com peso de 30%; e INCC-M, com peso de 10% (M indica as versões desses índices para o Mercado).

Considere a tabela a seguir, com os valores dos 3 índices que compõem o IGP-M, acumulados de agosto de 1994 a fevereiro de 2022.

Alguns índices de preços – fevereiro de 2022

IPA-M	IPC-M	INCC-M
1 405,969	669,332	971,651

Fonte dos dados: INSTITUTO Brasileiro de Economia. *Fundação Getulio Vargas*. Fev. 2022. Disponível em: https://portalibre.fgv.br/sites/default/files/2022-02/igp-m_fgv_press-release-resumido_fev22_0.pdf. Acesso em: 16 abr. 2022.

a) A partir dos dados dos 3 índices indicados na tabela, calcule o valor do índice IGP-M do mês de fevereiro de 2022. 1 141,546

b) Sabendo que, no mês de janeiro de 2022, o IGP-M foi igual a 1120,999, calcule o percentual de aumento ocorrido no mês de fevereiro de 2022 em relação ao mês de janeiro do mesmo ano. Aproximadamente 1,83%.

7. Em um curso de inglês são aplicadas 3 provas: a primeira com peso 2, a segunda com peso 3 e a terceira com peso 5. Além disso, o estudante pode fazer uma prova substitutiva, que entra no lugar de qualquer uma das 3 e mantém o peso da prova substituída. Um estudante que tirou, respectivamente, notas 4,0, 5,0 e 6,0 e, na substitutiva, 7,6 deve substituir qual nota para ficar com a maior média? A terceira.

8. A seleção brasileira de basquete feminino foi convocada para disputar uma competição internacional. A média das medidas de altura das 14 jogadoras pré-convocadas era 1,80 m. Como apenas 12 jogadoras seriam inscritas para a competição, foram cortadas 2 jogadoras, uma com 1,64 m e outra com 1,75 m. Qual foi a média das medidas de altura das atletas que foram inscritas na competição? Aproximadamente 1,82 m.

9. Em um mercado de frutas trabalham 25 pessoas, e a média dos salários delas é R$ 2.800,00. A média dos salários dos 4 funcionários administrativos é R$ 3.751,00, e a dos salários dos 9 caixas é R$ 2.900,00. Qual é a média dos salários dos demais funcionários? R$ 2.408,00

10. Com base no texto da abertura desta Unidade, suponha que o IDH ainda fosse calculado pela média aritmética das variáveis *R*, *E* e *S* e que a região citada como exemplo receberá uma política pública que permitirá elevar em 0,1 ponto uma dessas variáveis. Qual das variáveis deverá receber essa política visando a um maior aumento no IDH? Qualquer variável que aumentar causará o mesmo efeito no IDH.

Na olimpíada

O gráfico das notas

(Obmep) O professor Michel aplicou duas provas a seus dez alunos e divulgou as notas por meio do gráfico mostrado a seguir. Por exemplo, o aluno **A** obteve notas 9 e 8 nas provas 1 e 2, respectivamente; já o aluno **B** obteve notas 3 e 5. Para um aluno ser aprovado, a média aritmética de suas notas deve ser igual a 6 ou maior do que 6. Quantos alunos foram aprovados? Alternativa **a**.

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

Prova 2 · 10 · 5 · 0 · 5 · 10 · Prova 1 · D · F · A · G · E · H · B · J · C · I

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **4** a **9** tratam de média ponderada. Destacamos a atividade **6**, na qual é possível orientar os estudantes a construir uma tabela com 2 colunas: uma com a quantidade de pessoas por carro e outra com a quantidade de carros que atendem àquela condição.

A atividade **6** favorece os TCTs *Educação Financeira* e *Educação Fiscal* ao tratar de alguns índices de inflação.

Na atividade **7**, caso seja possível utilizar um *software* de planilha eletrônica, peça aos estudantes que calculem as médias para cada um dos casos e depois comparem os resultados. Reforce que, pelo fato de a média ser ponderada, o peso tem um valor de influência maior na escolha da nota a ser trocada. Pergunte: "Caso fosse uma média aritmética, qual nota vocês trocariam?" e calcule esse caso com os estudantes.

Aproveite o contexto da atividade **8** para promover positivamente a participação das mulheres nas competições esportivas.

Na olimpíada

Para resolver a questão do boxe *Na olimpíada* de maneira simplificada, basta que os estudantes notem que a soma das notas nas 2 provas deve ser maior ou igual a 12 e, para descobrir quantos estudantes foram aprovados, adicionem as coordenadas de cada ponto e verifiquem essa condição.

Proposta para o professor

Para saber mais sobre inflação, consulte:

IBGE. *IBGE explica inflação.* Disponível em: https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php.

ROSSI, Pedro *et al*. Como se mede a inflação? *G1 Economia*, [2013?]. Disponível em: http://g1.globo.com/economia/inflacao-como-e-medida/platb/.

A seguir, indicamos um estudo completo dos índices considerados na atividade **6**:

FGV IBRE. *Índice Geral de Preços – Mercado*, Rio de Janeiro, fev. 2022. Disponível em: https://portalibre.fgv.br/sites/default/files/2022-02/igp-m_fgv_press-release-resumido_fev22_0.pdf. Acesso em: 23 jun. 2022.

Orientações didáticas

Média geométrica

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA25** ao introduzir o conceito de média geométrica. O contexto do tópico permite mobilizar com maior ênfase a **CG09** e a **CEMAT08** ao propor um debate em sala de aula, exercitando o diálogo, a empatia e o respeito a diferentes opiniões.

Inicie o tópico perguntando aos estudantes se já ouviram falar em média geométrica e se imaginam o motivo desse nome.

No primeiro exemplo da página, é possível fazer uma relação com áreas de quadrados e retângulos. Você pode perguntar: “Qual é a medida de área de um retângulo com dimensões 2 e 8?”; “Qual seria a medida dos lados de um quadrado com essa mesma medida de área?”.

Aproveite a temática do exemplo “Número de usuários da internet” para perguntar aos estudantes quanto tempo passam navegando na internet. É possível, nesse momento, promover um debate, dividindo a sala em 2 grupos, uns a favor e outros contra o aumento do uso da internet, de modo que cada grupo deve construir uma argumentação a respeito do posicionamento selecionado, independentemente de suas opiniões particulares, como uma forma de desenvolver a empatia e o respeito a diferentes pontos de vista.

Média geométrica

Vimos que a média aritmética é o número que preserva a soma dos números dados, isto é, se cada número for substituído pela média aritmética, a soma deles permanecerá inalterada.

O número que preserva o produto dos números dados é chamado **média geométrica**. Aqui, vamos considerar somente números positivos e, por enquanto, calcular a média de 2 números apenas.

Por exemplo, qual é a média geométrica de 2 e 8? Temos:

$$2 \cdot 8 = 16$$

A média geométrica é o número positivo x que, colocado no lugar do 2 e do 8, resulta no mesmo produto: $x \cdot x = 16$, ou seja, $x^2 = 16$.

Portanto:

$$x = \sqrt{16}$$
$$x = 4$$

A média geométrica de 2 e 8 é 4.

$$2 \cdot 8 = 16 \text{ e } 4 \cdot 4 = 16$$

> A **média geométrica** de 2 números positivos dados é o número positivo que se obtém multiplicando os números dados e extraindo a raiz quadrada do produto.

Se quisermos calcular a média geométrica de 3 números, como 20, 27 e 50, precisamos descobrir o número positivo x na equação.

$$x \cdot x \cdot x = 20 \cdot 27 \cdot 50$$
$$x^3 = 27\,000$$

Você aprenderá a resolver equações como essa no 9º ano. A solução dela é chamada **raiz cúbica** de 27 000 e escrevemos: $\sqrt[3]{27\,000}$. Por enquanto, fazendo tentativas ou usando decomposição em fatores primos, você pode perceber que, nesse exemplo, $x = 30$, pois $30 \cdot 30 \cdot 30 = 27\,000$. Portanto, a média geométrica de 20, 27 e 50 é 30.

Acompanhe a seguir um exemplo de emprego de média geométrica.

Flamingo Images/Shutterstock

Em 2020, o Brasil tinha aproximadamente 134 milhões de usuários de internet.

Número de usuários da internet

Em um país, o número de usuários da internet, em 2018, foi 9 vezes o de 2016 e, em 2020, foi 4 vezes o de 2018.

Em média, quanto aumentou o número de usuários por biênio nesse período?

Podemos representar assim o crescimento:

nº de 2016 $\xrightarrow{\cdot 9}$ nº de 2018 $\xrightarrow{\cdot 4}$ nº de 2020 = (nº de 2016) $\cdot 9 \cdot 4$

Considerando x o crescimento médio por biênio:

nº de 2016 $\xrightarrow{\cdot x}$ nº de 2018 $\xrightarrow{\cdot x}$ nº de 2020 = (nº de 2016) $\cdot x \cdot x$

Devemos ter $x^2 = 9 \cdot 4$. Como x é positivo, $x = 6$.

O crescimento médio (6 vezes) é a média geométrica dos 2 crescimentos obtidos (9 vezes e 4 vezes). Portanto, o número de usuários foi, em média, multiplicado por 6 a cada biênio desse período.

Proposta para o professor

Segue uma referência para complementar a interpretação do conceito de média aritmética, média geométrica, entre outras:

NERY, Chico. Uma aula sobre médias. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, Rio de Janeiro, RJ, n. 68, 2009. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/68/5.html. Acesso em: 23 jun. 2022.

Atividades

12. É menor. Médias aritméticas: **a)** 12,5; **b)** 20,5; **c)** 37,5; **d)** 50,5.

Faça as atividades no caderno.

11. Calcule a média geométrica de:

a) 9 e 16. 12
b) 16 e 25. 20
c) 15 e 60. 30
d) 1 e 100. 10

12. A média geométrica é menor ou maior do que a média aritmética dos números dados? Verifique isso em cada item da atividade anterior.

13. A população de uma cidade duplicou ao longo de uma década. Na década seguinte, ficou 8 vezes maior. Em média, quanto aumentou por década essa população? Quadruplicou.

14. Ana Paula é uma profissional autônoma. Em um ano, ela conseguiu aumentar seus rendimentos em 100%, isto é, seus rendimentos duplicaram. No ano seguinte, houve mais aumento: 28% sobre o que havia faturado no ano anterior, ou seja, o faturamento foi multiplicado por 1,28. Em média, quanto aumentou por ano o seu faturamento? Aumentou 1,6 em média.

15. O vestibular da Instituição de Ensino Superior **I** é composto de 2 fases, e a nota final do candidato é a média ponderada das notas das 2 fases, sendo que a primeira tem peso 7 e a segunda, peso 3.
O vestibular da Instituição de Ensino Superior **II** também é composto de 2 fases, e a nota final do candidato é a média geométrica das notas das 2 fases.
Suponha que um candidato realize os exames vestibulares nas duas instituições e tire nota 6,12500 na primeira fase de ambos e nota 7,66667 na segunda fase de ambos. Use uma calculadora e determine as médias finais desse candidato em ambos os vestibulares, com 5 casas decimais.
Instituição de Ensino Superior **I**: 6,58750; Instituição de Ensino Superior **II**: aproximadamente 6,85262.

Cálculo da média em uma tabela de frequências

O perfil dos candidatos de um concurso

Os 1 600 inscritos em um concurso público responderam a um questionário sobre o perfil dos candidatos.

HiSunnySky/Shutterstock

1. Qual é o seu grau de instrução?
a) Alfabetizado, mas não frequentou escola.
b) Até o 5º ano do Ensino Fundamental.
c) Do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental.
d) Do 1º ao 3º ano do Ensino Médio.
e) Ensino Superior.

2. Quantas pessoas contribuem para a renda familiar em sua casa?

3. Quantas pessoas são sustentadas com a renda familiar?

4. Quantos banheiros existem em sua casa?

5. Quantos carros existem em sua casa?

6. Quantas TVs existem em sua casa?

7. Quantos microcomputadores existem em sua casa?

8. Você acessa a internet?
a) Não.
b) Sim, de casa.
c) Sim, do trabalho.
d) Sim, da casa de amigos.
e) Sim, de outros locais.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **11** é uma aplicação direta do conceito de média geométrica. Caso os estudantes tenham dificuldades de realizá-la, é possível fazer associações com áreas de retângulos e quadrados ou propor a decomposição dos números em fatores primos.

Na atividade **12**, ressalte a importância da verificação de cada caso, uma vez que pode ser um senso comum que a média geométrica é maior, por envolver multiplicação.

Caso os estudantes tenham dificuldade de interpretação dos enunciados dos problemas propostos nas atividades **13** e **14**, sugira que releiam o exemplo do número de usuários da internet e oriente-os a seguir a mesma estratégia.

Para realizar a atividade **15**, no cálculo da média ponderada, é preciso orientar os estudantes sobre como realizar os cálculos passo a passo na calculadora, fazendo o registro de cada resultado, ou sobre o uso de parênteses em uma calculadora científica. No caso da média geométrica, solicite que usem a tecla de raiz quadrada.

Cálculo da média em uma tabela de frequências

Na BNCC

A proposta deste tópico possibilita o desenvolvimento da **CG04** e da **CEMAT04** por utilizar gráficos para comunicar informações, e a **CEMAT08** por mostrar o planejamento e desenvolvimento de uma pesquisa.

Antes de iniciar o trabalho com o tópico, pergunte à turma: “O que é uma tabela de frequências?”. Permita que respondam utilizando as próprias palavras e anote na lousa as principais ideias apresentadas.

Proposta para o professor

Sobre a atividade **12**, segue um estudo que mostra que o resultado obtido é sempre verdadeiro.
CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. *Sala de Estudo*: Médias e Desigualdades. *Impa*. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-medias-e-desigualdades/. Acesso em: 23 jun. 2022.

Proposta para o estudante

Para a atividade **12**, pode-se apresentar para os estudantes o vídeo:
DESIGUALDADES – Aula 10 – Demonstração geométrica da desigualdade das médias. [*s. l.*: *s. n.*], 2015. 1 vídeo (13 min). Publicado pelo canal Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=rVcFfRMiSmU. Acesso em: 22 jun. 2022.

Orientações didáticas

Cálculo da média em uma tabela de frequências

Para desenvolver este tópico, sugerimos que explore com os estudantes o exemplo "O perfil dos candidatos de um concurso" e, ao final, proponha um trabalho em grupo para que os estudantes pratiquem a pesquisa. Cada grupo elabora uma pergunta cuja resposta seja uma variável quantitativa discreta, de modo que os estudantes respondam em sala, montem a tabela de frequências e esbocem um gráfico.

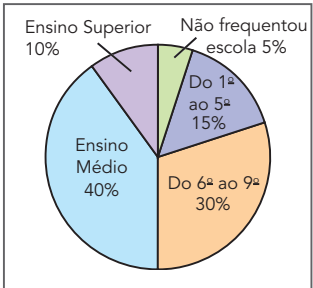
Com os questionários preenchidos, foram elaborados tabelas e gráficos e calculadas algumas medidas estatísticas a respeito dos candidatos inscritos.

Considere duas dessas estatísticas.

Grau de instrução dos candidatos inscritos

Grau	Frequência	Frequência relativa
sem escola	80	5%
do 1º ao 5º ano	240	15%
do 6º ao 9º ano	480	30%
Ensino Médio	640	40%
Ensino Superior	160	10%
Total	**1600**	**100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

Grau de instrução dos candidatos inscritos

Dados elaborados para fins didáticos.

Para os dados relacionados ao grau de instrução dos candidatos, foram feitos um gráfico de setores (também chamado gráfico de *pizza*, como já estudado anteriormente) e uma tabela. Essa tabela é chamada **tabela de frequências** ou de **distribuição de frequências**.

Você pode notar que **frequência** corresponde ao número de candidatos que escolheu cada categoria (cada grau de instrução) e **frequência relativa** é a taxa percentual da frequência em relação ao total de candidatos. Por exemplo, para a categoria "do 6º ao 9º ano":

número de candidatos: 480

total de candidatos inscritos: 1600

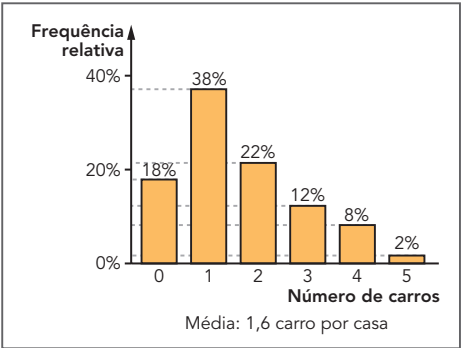
porcentagem: $\frac{480}{1000} \cdot 100\% = 30\%$

Acompanhe mais alguns dados dessa pesquisa:

Carros nas casas dos candidatos inscritos

Número de carros	Frequência	Frequência relativa
0	288	18%
1	608	38%
2	352	22%
3	192	12%
4	128	8%
5	32	2%
Total	**1600**	**100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

Porcentagem de candidatos de acordo com o número de carros em casa

Dados elaborados para fins didáticos.

Para os dados relacionados ao número de carros também foi feita uma tabela de frequências, e o gráfico apresentado é o de colunas. Além disso, é apresentado mais um resultado: a **média**, que é de 1,6 carro por casa. Como foi calculada essa média?

Em Estatística, quando se fala em média sem especificá-la, trata-se da **média aritmética**.

Como no problema proposto temos 1 600 candidatos e cada um respondeu à pergunta sobre o número de carros em casa, a média apresentada é a média aritmética das 1 600 respostas. Mas há muitas respostas iguais. Verifique:

$0 \rightarrow 288$ vezes $\quad 2 \rightarrow 352$ vezes $\quad 4 \rightarrow 128$ vezes

$1 \rightarrow 608$ vezes $\quad 3 \rightarrow 192$ vezes $\quad 5 \rightarrow 32$ vezes

Assim, a média aritmética pode ser calculada como uma média ponderada: toma-se cada número de carros com peso igual à respectiva frequência. A soma dos pesos é a soma das frequências (o que dá o total de candidatos).

$$\text{Média do número de carros: } \frac{288 \cdot 0 + 608 \cdot 1 + 352 \cdot 2 + 192 \cdot 3 + 128 \cdot 4 + 32 \cdot 5}{1600} =$$

$$= \frac{608 + 704 + 576 + 512 + 160}{1600} = \frac{2560}{1600} = 1{,}6$$

Em uma tabela de frequências, a média é calculada multiplicando-se cada número observado pela respectiva frequência, adicionando-se esses produtos e dividindo-se o resultado pela soma das frequências.

Note que, no cálculo da média, em vez das frequências, podemos usar as frequências relativas (caso já tenham sido calculadas).

Acompanhe o cálculo do número médio de carros usando as frequências relativas em porcentagem:

$$\text{Média do número de carros: } \frac{18 \cdot 0 + 38 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{100} = \frac{38 + 44 + 36 + 32 + 10}{100} = 1{,}6$$

Por que ambas têm o mesmo resultado?

Considere:

$$\frac{288 \cdot 0 + 608 \cdot 1 + 352 \cdot 2 + 192 \cdot 3 + 128 \cdot 4 + 32 \cdot 5}{1600} =$$

$$= \frac{288}{1600} \cdot 0 + \frac{608}{1600} \cdot 1 + \frac{352}{1600} \cdot 2 + \frac{192}{1600} \cdot 3 + \frac{128}{1600} \cdot 4 + \frac{32}{1600} \cdot 5 =$$

$$\downarrow$$

$$= \frac{18}{100} \cdot 0 + \frac{38}{100} \cdot 1 + \frac{22}{100} \cdot 2 + \frac{12}{100} \cdot 3 + \frac{8}{100} \cdot 4 + \frac{2}{100} \cdot 5 =$$

$$= \frac{18 \cdot 0 + 38 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{100} = 1{,}6$$

Orientações didáticas

Cálculo da média em uma tabela de frequências

Para continuar explorando este tópico, aproveite o trabalho de pesquisa em grupo e peça que os estudantes façam o cálculo da média dos resultados.

Para a organização dos cálculos, você pode propor a inserção de uma coluna com o resultado das multiplicações dos números respondidos pelas respectivas frequências. Dessa maneira, ao final da coluna, é indicada a soma dos produtos e, para calcular a média, basta dividir esse valor pela soma das frequências.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **17** a **21** têm o mesmo objetivo: calcular a média a partir das frequências, podendo ser utilizado o raciocínio da média ponderada. Caso os estudantes tenham dificuldade, é possível orientá-los a inserir uma coluna ou uma linha em cada tabela com o produto dos números pelas suas respectivas frequências. Assim, ao final, é preciso apenas dividir a soma dos produtos pela soma das frequências. Se achar necessário, retome o exemplo dado na página anterior.

Nas atividades **17** e **20**, o objetivo é calcular a média a partir da frequência relativa. Para isso, é possível utilizar a forma decimal ou fracionária da porcentagem, conforme os estudantes preferirem.

Para realizar a atividade **21**, é possível orientar os estudantes a inserir, além da coluna de frequências relativas, uma coluna com as medidas de abertura dos ângulos centrais referentes a cada resposta, que podem ser obtidas por meio da regra de três. Por exemplo, para a resposta "não acessa", temos:

$360° \text{ ——— } 1\,600$

$x \text{ ——— } 800$

$$x = \frac{360 \cdot 800}{1600} = 180°$$

Ou seja, a abertura do ângulo central referente à resposta "não acessa" mede 180°.

Medidas de tendência central

Na BNCC

Este tópico possibilita o desenvolvimento da habilidade **EF08MA25** ao explorar as medidas de tendência central: média, moda e mediana.

Explique aos estudantes que, em Estatística, é importante determinar um elemento que represente um conjunto de dados. Para isso, usamos as medidas de tendência central. A média, a moda e a mediana são usadas para variáveis quantitativas, mas só a moda é usada também para variáveis qualitativas.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

As atividades **16** a **21** referem-se à pesquisa "O perfil dos candidatos de um concurso".

16. Use a tabela a seguir para determinar a média da distribuição do número de microcomputadores na casa dos candidatos. 0,89 microcomputador.

Distribuição do número de microcomputadores

Nº de microcomputadores	Frequência
0	400
1	1024
2	128
3	48
Total	**1600**

Dados elaborados para fins didáticos.

17. De acordo com a tabela a seguir, determine a média da distribuição do número de televisores na casa dos candidatos. 2,9 TVs.

Distribuição do número de televisores

Nº de TVs	1	2	3	4	5	Total
Frequência relativa	10%	30%	30%	20%	10%	**100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

18. Use a tabela a seguir para calcular a média da distribuição do número de pessoas que contribuem para a renda familiar dos candidatos. 1,7 pessoa.

Distribuição do número de pessoas que contribuem para a renda familiar

Nº de pessoas	1	2	3	Total
Frequência	640	800	160	**1600**

Dados elaborados para fins didáticos.

19. Calcule a média da distribuição do número de pessoas sustentadas pela renda familiar dos candidatos utilizando a tabela a seguir. 4,52 pessoas.

Número de pessoas sustentadas pela renda familiar

Nº de pessoas	Frequência
3	192
4	640
5	576
6	128
7	64
Total	**1600**

Dados elaborados para fins didáticos.

20. Use a tabela a seguir para calcular a média da distribuição na categoria "número de banheiros em casa". 2,77 banheiros.

Número de banheiros em casa

Nº de banheiros	1	2	3	4	5	Total
Frequência relativa	16%	27%	30%	18%	9%	**100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

21. Construa no caderno a tabela das frequências relativas na categoria "acesso à internet" e represente os dados em um gráfico de setores.

Acesso à internet

Acesso à internet	Frequência
não acessa	800
de casa	560
do trabalho	40
da casa de amigos	120
de outros locais	80
Total	**1600**

Dados elaborados para fins didáticos.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Medidas de tendência central

Campeonato Brasileiro de Futebol

No primeiro turno do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2021, série A, também chamado Brasileirão, o Clube Atlético Mineiro (CAM), que foi campeão ao final do campeonato, jogou 19 vezes.

Pedro Vilela/Getty Images

Partida entre Clube Atlético Mineiro e Sport Recife, no estádio do Mineirão em Belo Horizonte (MG). Foto de 2021.

Na tabela a seguir, estão os resultados desses jogos.

O Atlético Mineiro no Brasileirão 2021 – 1º turno

Atlético-MG	**1** $\times$ 2	Fortaleza
Sport Recife	0 $\times$ **1**	**Atlético-MG**
Atlético-MG	**1** $\times$ 0	São Paulo
Internacional	0 $\times$ **1**	**Atlético-MG**
Atlético-MG	**1** $\times$ 1	Chapecoense
Ceará SC	2 $\times$ **1**	**Atlético-MG**
Santos	2 $\times$ **0**	**Atlético-MG**
Atlético-MG	**4** $\times$ 1	Atlético-GO
Cuiabá	0 $\times$ **1**	**Atlético-MG**
Atlético-MG	**2** $\times$ 1	Flamengo
América-MG	0 $\times$ **1**	**Atlético-MG**
Corinthians	1 $\times$ **2**	**Atlético-MG**
Atlético-MG	**3** $\times$ 0	Bahia
Atlético-MG	**2** $\times$ 0	Athletico-PR
Juventude	1 $\times$ **2**	**Atlético-MG**
Atlético-MG	**2** $\times$ 0	Palmeiras
Fluminense	1 $\times$ **1**	**Atlético-MG**
Bragantino	1 $\times$ **1**	**Atlético-MG**
Atlético-MG	**2** $\times$ 1	Grêmio

Fonte dos dados: CAMPEONATO Brasileiro de Futebol – série A – 2021. *CBF*. Disponível em: https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-serie-a/2021. Acesso em: 18 abr. 2022.

Podemos verificar nessa tabela que a quantidade de gols marcados pelo Atlético Mineiro, em cada jogo do 1º turno, foi:

1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 0 - 4 - 1 - 2 - 1 - 2 - 3 - 2 - 2 - 2 - 1 - 1 - 2

Média

Vamos fazer a tabela de frequência para os gols marcados pelo Atlético-MG.

O Atlético Mineiro no Brasileirão 2021

Quantidade de gols marcados	Frequência
0	1
1	10
2	6
3	1
4	1
Total	**19**

Fonte dos dados: CAMPEONATO Brasileiro de Futebol – série A – 2021. *CBF*. Disponível em: https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-serie-a/2021. Acesso em: 18 abr. 2022.

Agora, calculamos a média aritmética da quantidade de gols marcados nos 19 jogos:

$$\frac{1 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{19} =$$

$$= \frac{0 + 10 + 12 + 3 + 4}{19} = \frac{29}{19} \simeq 1{,}53$$

Em média, o Atlético Mineiro marcou aproximadamente 1,53 gol por jogo no 1º turno.

Moda

Qual foi a quantidade de gols marcada pelo Atlético Mineiro com maior frequência no 1º turno?

Verificando a tabela, notamos que o Atlético Mineiro marcou 1 gol em 10 jogos. Essa foi a quantidade de gols que o time conseguiu marcar mais vezes (ou seja, com maior frequência) em uma partida. Por isso, dizemos que a **moda** dessa distribuição é 1 gol marcado.

Moda de uma distribuição de frequência é o número obtido com maior frequência.

Orientações didáticas

Média

Antes de retomar o conceito de média, peça aos estudantes que calculem sozinhos a média aritmética do número de gols informado no exemplo, a fim de que apliquem esse conceito já abordado anteriormente. Caso tenham dificuldades, oriente-os sobre como prosseguir passo a passo. Relembre o que é a média aritmética; porém, o método adotado é igual ao do cálculo da média ponderada, em que as frequências representam os pesos.

Moda

Inicie este tópico com a pergunta: “Qual foi a quantidade de gols marcada pelo Atlético-MG com maior frequência no 1º turno?” ou então adapte essa pergunta para os dados da pesquisa realizada pelos estudantes.

Reforce que existem distribuições bimodais, mas também distribuições amodais, como pode ser o caso da pesquisa realizada, quando muitas respostas aparecem com a mesma frequência e esta é a maior em relação às demais.

Orientações didáticas

Mediana

Inicie este tópico pedindo que os estudantes ordenem os dados, seja da pesquisa realizada por eles, seja do exemplo da página. Essa sequência dos dados ordenados também pode ser chamada de **rol**. Se achar interessante, peça que os estudantes identifiquem a mediana sem ordenar os dados e mostre que os resultados podem ser diferentes. Reforce a importância de realizar esse ordenamento, uma vez que, se ele não for feito, não podemos afirmar o que está escrito na página: "dos valores obtidos, metade é formada de números menores do que a mediana (ou iguais a ela) e metade é composta de números maiores do que ela (ou iguais a ela)". Reforce também o caso em que a distribuição tem uma quantidade par de dados, como no segundo exemplo.

Discuta com os estudantes as diferenças entre as 3 medidas de tendência central apresentadas e pergunte a eles o significado de cada uma delas. Reforce a importância de aferir as 3 medidas, de modo que a análise da distribuição de dados fique mais precisa.

A moda é uma medida estatística interessante quando há um número que se destaca aparecendo mais vezes do que os outros. Ele é a moda da distribuição.

Quando 2 números se destacam igualmente (com frequências iguais entre si e maiores do que as dos demais números), dizemos que a distribuição é **bimodal** (tem **2 modas**). Note um exemplo nesta tabela. Dos 32 estudantes que fizeram a prova, 8 tiraram nota 5 e também 8 tiraram nota 6. Como 8 é a maior frequência observada, há 2 modas: nota 5 e nota 6.

Distribuição das notas da prova de Matemática

Nota	Frequência
3	3
4	5
5	8
6	8
7	6
8	2
Total	**32**

Dados elaborados para fins didáticos.

Mediana

Vamos agora ordenar a quantidade de gols marcados pelo Atlético Mineiro no 1º turno do Brasileirão 2021, do menor para o maior, com todas as repetições:

0 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 3 - 4

Quando os termos de uma sequência numérica estão ordenados do menor para o maior, com todas as repetições, temos uma sequência monótona não decrescente.

Que número fica bem no meio (na posição central) dessa sequência?

Como temos 19 números, o que fica na posição central é o décimo:

0 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 3 - 4

9 termos | termo central ou mediana | 9 termos

O termo central da sequência é chamado **mediana** da distribuição. Nesse exemplo, a mediana é 1.

A **mediana** de uma distribuição é o termo central da sequência formada pelos valores obtidos quando colocados em ordem monótona não decrescente.

A mediana é uma medida estatística de posição central que transmite a seguinte ideia: dos valores obtidos, metade é formada por números menores do que a mediana (ou iguais a ela) e metade é composta de números maiores do que ela (ou iguais a ela).

No exemplo, a mediana é 1 gol marcado, o que significa que em metade dos jogos o Atlético Mineiro marcou 1 gol ou menos e, na outra metade, 1 gol ou mais.

Quando há uma quantidade par de valores, a mediana é a média aritmética dos 2 valores que ocupam as posições centrais da sequência (na ordem não decrescente).

Tomemos como exemplo a idade das 6 pessoas da família da Luana, em anos.

6 - 12 (2 termos) - 14 - 17 (termos centrais) - 41 - 42 (2 termos)

Mediana: $\frac{14 + 17}{2} = \frac{31}{2} = 15{,}5$

A mediana é 15,5 anos. Três idades são menores e três são maiores do que a mediana.

Artur Fujita/Arquivo da editora

Na seção *Na História*, no final desta Unidade, apresentamos um estudo publicado em 1652 a respeito da sobrevivência humana naquela época em Londres. Nele notamos que, de cada 100 pessoas, estimava-se que 36 morriam antes de completar 6 anos de idade e mais 24 morriam antes dos 16 anos. Como 36 + 24 = 60, mais da metade morria antes de fazer 16 anos. Portanto, a mediana do tempo de vida naquela época em Londres estava entre 6 e 16 anos, segundo o estudo publicado.

Para conhecer mais a mediana, o *site* do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) apresenta um exemplo de como a mediana pode ser utilizada para analisar dados da população rural brasileira. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/professores/educa-recursos/17870-a-mediana.html. Acesso em: 11 abr. 2022.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

22. Faça o que se pede.

a) Construa a tabela de frequência dos gols sofridos pelo Atlético Mineiro no 1º turno do Brasileirão 2021 (os resultados dos jogos estão na tabela apresentada anteriormente). A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Qual é a moda dessa distribuição? 0 e 1

c) Qual é a mediana? 1

d) Em média, quantos gols o Atlético Mineiro sofreu por jogo? Aproximadamente 0,74 gol.

23. Na tabela a seguir, estão apresentados os salários de 100 pessoas, em reais.

Salários

Salário (em R$)	1.400,00	1.600,00	2.000,00	20.000,00	Total
Nº de pessoas	30	40	20	10	**100**

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Calcule a média desses salários. R$ 3.460,00

b) Qual é a mediana dos salários? R$ 1.600,00

c) Das 2 medidas, média e mediana, qual dá melhor ideia da distribuição desses salários? A mediana.

24. Consulte a tabela de distribuição das notas da prova de Matemática apresentada anteriormente.

a) Qual é a mediana? 5,5

b) Qual é a média? 5,47

25. As idades, em anos, dos 6 jogadores titulares de um time de voleibol são:

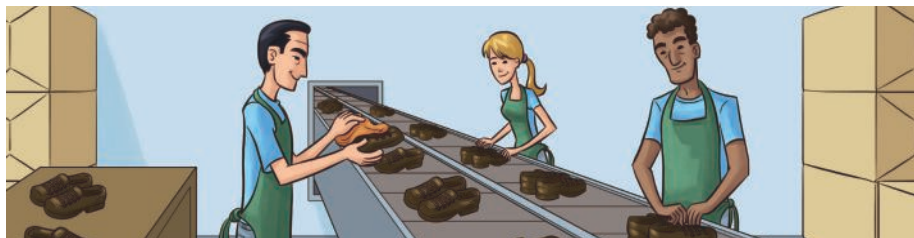
20 - 23 - 25 - 26 - 30 - 32

a) Qual é a idade média? 26 anos.

b) Qual é a idade mediana? 25,5 anos.

c) Qual é a moda (idade modal)? Não existe moda.

26. Uma pequena fábrica de calçados deseja lançar um novo modelo. Para saber se o modelo será bem-aceito pelo público, o proprietário da fábrica decide começar fabricando o modelo em apenas um tamanho.

Artur Fujita/Arquivo da editora

Pesquisando a numeração dos calçados usados pela clientela, que medida estatística seria recomendada para decidir o tamanho a ser fabricado? A moda.

Orientações didáticas

Mediana

Incentive os estudantes a acessar o *site* do IBGE proposto no boxe de sugestão no Livro do Estudante, a fim de expandirem seus conhecimentos sobre o tópico. Outra utilização possível desse material é propor uma metodologia ativa de sala de aula invertida, em que os estudantes podem ler o conteúdo do *site* antes da aula e, no momento da aula, discutir as impressões e os aprendizados do que leram.

Atividades

As atividades deste bloco envolvem a determinação das 3 medidas de tendência central. Proponha que os estudantes as resolvam em duplas e, ao final, peça que compartilhem com a turma as estratégias utilizadas.

Na atividade **23**, destaque a diferença entre média e mediana, que a média é mais sensível a valores *outliers*, como no caso das 10 pessoas que ganham R$ 20.000,00, enquanto a mediana não é afetada por valores elevados em uma distribuição.

Orientações didáticas

Medidas de dispersão

Na BNCC

Este tópico possibilita o desenvolvimento da habilidade **EF08MA25** ao explorar a medida de dispersão de dados amplitude.

As medidas de dispersão mais usadas são a amplitude, que estudaremos nesta Unidade, a variância e o desvio-padrão, que serão estudados posteriormente.

Explique aos estudantes que usamos essas medidas quando temos um conjunto com dados dispersos, ou seja, vários elementos que não são próximos da média.

Amplitude

Inicie este tópico perguntando aos estudantes em que outros contextos já ouviram a palavra "amplitude". É possível que respondam algo relacionado a tamanho, a uma ampla possibilidade de opções ou à amplitude térmica. Relembre a ideia de amplitude térmica, que representa a variação de temperatura de um período, calculada pela diferença entre a maior e a menor medida de temperatura. Estimule os estudantes a associar essa palavra a uma variação.

Medidas de dispersão

Amplitude

Conforme estudamos no 7º ano, uma importante medida estatística é a **amplitude** de um conjunto de dados. A amplitude é a diferença entre o maior e o menor valor obtido em uma pesquisa quantitativa.

Por exemplo, vamos considerar os conjuntos de dados a seguir, que representam as medidas de altura dos 15 meninos e das 19 meninas do 8º ano de uma escola. Ordenamos as medidas em uma sequência não decrescente.

Medidas de altura dos 15 meninos do 8º ano (em cm)

145	146	148	149	150	152	155	156	156	156	158	159	162	165	168

Medidas de altura das 19 meninas do 8º ano (em cm)

144	146	148	150	153	153	154	154	156	157	158	159	159	161	162	162	162	163	163

Dados elaborados para fins didáticos.

Vamos calcular a média aritmética das medidas de altura de cada grupo.

- Para os meninos, a média é:

$$\frac{1 \cdot 145 + 1 \cdot 146 + 1 \cdot 148 + 1 \cdot 149 + 1 \cdot 150 + 1 \cdot 152 + 1 \cdot 155 + 3 \cdot 156 + 1 \cdot 158 + 1 \cdot 159 + 1 \cdot 162 + 1 \cdot 165 + 1 \cdot 168}{15} =$$

$$= \frac{2325}{15} = 155$$

A média das medidas de altura dos meninos é 155 cm.

- Para as meninas, a média é:

$$\frac{1 \cdot 144 + 1 \cdot 146 + 1 \cdot 148 + 1 \cdot 150 + 2 \cdot 153 + 2 \cdot 154 + 1 \cdot 156 + 1 \cdot 157 + 1 \cdot 158 + 2 \cdot 159 + 1 \cdot 161 + 3 \cdot 162 + 2 \cdot 163}{15} =$$

$$= \frac{2964}{19} = 156$$

A média das medidas de altura das meninas é 156 cm.

As medidas de altura medianas são:

- para os meninos, o termo central da sequência é a oitava medida na sequência: 156 cm (1 m e 56 cm);
- para as meninas, o termo central da sequência é a décima medida na sequência: 157 cm (1 m e 57 cm).

Podemos notar que, entre os meninos, o mais alto da turma tem 168 cm de altura e o mais baixo tem 145 cm de altura. A **amplitude** desse conjunto de dados é dada pela diferença entre a medida de altura do maior e a do menor estudante. Logo, a amplitude desse conjunto de dados é:

$$168 \text{ cm} - 145 \text{ cm} = 23 \text{ cm}$$

Já entre as meninas, a mais alta mede 163 cm, e a mais baixa, 144 cm. A amplitude desse conjunto de dados é:

$$163 \text{ cm} - 144 \text{ cm} = 19 \text{ cm}$$

Enquanto a média é uma **medida de tendência central** dos dados, a amplitude é uma **medida de dispersão**. A amplitude dá uma primeira ideia sobre a dispersão dos dados, isto é, se os dados são mais concentrados ou mais espalhados, mais próximos ou mais distantes da média. A amplitude das medidas de altura das meninas é menor do que a dos meninos. Com essa informação, e sem olhar todos os dados, podemos dizer que as medidas de altura das meninas são mais concentradas em torno da média do que as dos meninos.

Quando a amplitude é menor, os dados são mais concentrados em torno da média, a variação deles é menor.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

27. Qual é a amplitude do conjunto das 34 medidas de altura dos estudantes do 8º ano dessa escola, dadas no texto anterior? 24 cm

28. Em uma prova de Matemática, os estudantes da turma A tiveram média 6,5, sendo a menor nota igual a 2,0 e a maior igual a 9,5. Na turma B, a média também foi 6,5, sendo a menor nota 3,5 e a maior, 8,0.

a) Qual é a amplitude das notas de cada turma? A: 7,5 ; B: 4,5.

b) Em qual das turmas as notas ficaram mais concentradas em torno da média? B

c) Considerando as notas de todos os estudantes das 2 turmas, qual é a amplitude? 7,5

29. Na tabela a seguir, encontram-se as idades dos 23 jogadores brasileiros e dos 23 jogadores franceses que disputaram a edição da Copa do Mundo da Rússia, em 2018. Use calculadora, se necessário.

Idades em anos completos dos jogadores da Copa do Mundo de 2018 na Rússia

Brasil	França
25	31
31	33
24	25
32	22
30	22
26	25
28	24
33	32
33	25
32	22
24	23
26	25
30	22
25	23
29	27
33	31
25	29
29	25
27	27
21	27
26	19
26	21
30	21

Fontes dos dados: ASSESSORIA CBF. Seleção Brasileira é convocada para Copa do Mundo. *Confederação brasileira de futebol*, [*s. l.*], 14 maio 2018. Disponível em: https://www.cbf.com.br/selecao-brasileira/noticias/selecao-masculina/selecao-brasileira-e-convocada-para-copa-do-mundo. 2018 FIFA World Cup Russia™. France, *FIFA*, [*s. l.*], [2018?]. Disponível em: https://www.fifa.com/tournaments/mens/worldcup/2018russia/teams/43946. FÉDÉRATION Française de Football, [*s. l.*], 2022. Disponível em: https://www.fff.fr/. Acesso em: 2 jun. 2022.

a) Vamos utilizar como critério para saber qual é a equipe mais experiente a que tem a maior média de idades. Qual é a equipe mais experiente? Brasil.

b) Vamos utilizar como critério para saber qual é a equipe mais homogênea a que tem a menor amplitude das idades. Qual é a equipe mais homogênea? Brasil.

c) Vamos utilizar como critério para saber qual é a equipe mais vibrante a que tem a menor mediana das idades. Qual é a equipe mais vibrante? França.

30. A conta de água exibe o consumo do mês, em metros cúbicos, e traz um histórico do consumo dos meses anteriores.

a) Anote em uma tabela o histórico apresentado em uma conta da sua residência e, então, calcule a média e a amplitude do consumo mensal. Resposta pessoal.

b) Que atitude deve ser tomada se em uma conta vier um consumo muito acima da média? Discuta com um colega antes de responder no caderno. Se não houver uma razão aparente que justifique esse consumo, é preciso examinar se há desperdício de água por algum vazamento e fazer os reparos necessários.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **27**, oriente os estudantes a considerar a menor e a maior medida de altura entre todos os estudantes, meninos e meninas, do exemplo da página anterior.

Na atividade **28**, é preciso realizar uma interpretação a respeito da amplitude. Quanto menor a amplitude, mais os dados estão concentrados em torno da média. No item **c**, a amplitude das 2 turmas é igual à amplitude da turma A, uma vez que a menor e a maior nota são dessa turma.

Caso os estudantes tenham dificuldade de interpretar a atividade **29**, oriente-os, primeiro, a calcular a média, amplitude e mediana dos dados do Brasil e da França. Certifique-se de que eles fizeram a organização dos dados em ordem crescente para determinar a mediana. Estimule-os a, utilizando argumentos, interpretar o motivo de essas medidas terem sido escolhidas como critério em cada situação. No item **a**, o Brasil tem jogadores com mais idade, logo a média de idades é maior. No item **b**, o Brasil tem um maior número de jogadores com idades próximas à média, logo a amplitude das idades é menor. No item **c**, a França tem jogadores com menos idade, logo a mediana dessas idades é menor.

Aproveite o contexto da atividade **30** como uma maneira de desenvolver a **CG07** e a **CEMAT08** propostas pela BNCC, já que, além de ser uma aplicação do conteúdo da Unidade, ela permite fazer uma interpretação dos dados e uma análise crítica a respeito dos resultados pensando no consumo consciente e em atitudes que podem ser tomadas para a economia de água. É possível aproveitar a atividade para fazer um trabalho interdisciplinar com o componente curricular **Ciências**, de modo a ser desenvolvido um projeto com ideias para a economia de água, as quais podem ser expostas em cartazes.

Orientações didáticas

Pesquisa estatística

Na BNCC

A habilidade **EF08MA04** é trabalhada de maneira transversal ao longo deste capítulo, que envolve o cálculo de porcentagens e o uso da calculadora. As habilidades **EF08MA23**, **EF08MA24**, **EF08MA26** e **EF08MA27** são trabalhadas a partir do planejamento, execução e representação dos dados de pesquisas, de modo que os conhecimentos de uma contribuem para o desenvolvimento da outra. O contexto apresentado favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Alimentar e Nutricional* e *Educação para o Consumo*.

Inicie o tópico relembrando os passos propostos para a realização de uma pesquisa.

Nesse momento, é possível trazer exemplos que descrevam como seria a realização de cada passo ou que simulem uma pesquisa rápida. Supondo que a população escolhida seja representada pelos estudantes da própria sala, é possível propor duas perguntas relacionadas a determinado tema. Exemplos de temas e perguntas são: Alimentação (Qual é a sua fruta preferida? Quantas frutas você come por dia?); Consumo sustentável (Você recicla materiais presentes em sua casa? Quantas vezes por ano você doa roupas/sapatos?).

A organização de um relatório e a apresentação dos dados de uma pesquisa são um ótimo modo de promover uma argumentação fundamentada em dados científicos. Sempre estimule a produção de textos desse gênero contendo a análise dos dados e uma conclusão, na qual os estudantes também realizam inferências considerando os resultados obtidos.

CAPÍTULO 18

Pesquisas e gráficos

NA BNCC
EF08MA23
EF08MA24
EF08MA26
EF08MA27

Pesquisa estatística

Faremos a seguir uma breve revisão das etapas de planejamento e execução de uma pesquisa estatística.

Escolha do tema (variável)

O tema deve ser algo que você considere relevante na população a ser pesquisada. Só faz sentido realizar uma pesquisa estatística sobre uma característica que varia de elemento para elemento da população pesquisada. Dizemos que a variável pesquisada é **quantitativa** quando resulta em um número (por exemplo, idade, renda familiar, número de irmãos) e **qualitativa** quando os dados são agrupados por categorias (mês do nascimento, esporte preferido, profissão, etc.).

Escolha do tipo de pesquisa: censitária ou amostral

A **pesquisa censitária** é indicada quando há condições de consultar toda a população. Na **pesquisa amostral**, é consultada uma parte da população, ou seja, uma amostra da população. O procedimento para escolha da amostra é denominado **amostragem**. Vamos citar 3 tipos de amostra:

- **amostra casual simples**: colhida por um sorteio em que todo elemento da população tem a mesma chance de ser escolhido;
- **amostra estratificada**: em que se procura replicar algumas características da população (por exemplo, se a população tem 60% de mulheres, procura-se garantir que a amostra tenha 60% de mulheres);
- **amostra sistemática**: formada por um processo que segue um padrão predefinido (por exemplo, em uma linha de montagem, examinar 1 a cada 20 peças produzidas).

Coleta dos dados

Pode ser feita por meio de entrevista ou preenchimento de um questionário ou observação e anotação, dependendo do tema escolhido.

Organização dos dados

É feita por meio da construção de tabelas de frequências e de frequências relativas, e também da construção de gráficos.

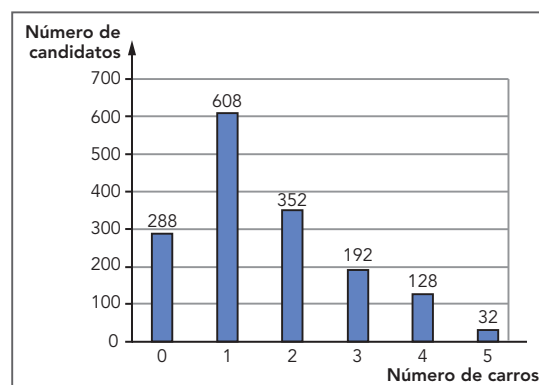
A escolha do tipo do gráfico é importante para apresentar os dados de maneira adequada. Ele deve transmitir as informações obtidas sem distorções, permitindo que seja analisado e interpretado pela impressão visual causada.

Apresentação

Elaboração de um relatório com tabelas, gráficos, medidas estatísticas (para variáveis quantitativas), texto com a análise dos dados e conclusão.

Quantidade de carros nas casas dos candidatos escolhidos

Número de carros	Número de candidatos
0	288
1	608
2	352
3	192
4	128
5	32

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Proposta para o professor

Segue uma referência que pode auxiliar na elaboração de relatórios estatísticos por parte dos estudantes:
CAZORLA, Irene; MAGINA, Sandra; GITIRANA, Verônica; GUIMARÃES, Gilda. *Estatística para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental*. Brasília, DF: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2017. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ebook_sbem.pdf. Acesso em: 23 jun. 2022.

No tópico "O perfil dos candidatos de um concurso", do capítulo anterior, temos um exemplo das etapas de uma pesquisa estatística. Acompanhe cada uma dessas etapas:

I. Escolha do tema

O perfil dos candidatos de um concurso.

II. Escolha da amostra

Todos os 1 600 inscritos responderam ao questionário, portanto foi feita uma pesquisa censitária.

III. Coleta dos dados

Realizada por questionário.

IV. Organização dos dados

Com os questionários preenchidos, foram elaborados gráficos e tabelas, como podemos verificar nesse tópico.

O **gráfico de barras**, também denominado **gráfico de colunas** se as barras forem verticais, é apropriado para representar as variáveis qualitativas. Para cada categoria é representada uma barra horizontal ou barra vertical (coluna), em que é marcada a respectiva frequência, ou frequência relativa observada. A área da barra causa impacto visual e sua medida deve ser proporcional à frequência observada da respectiva categoria. Geralmente, as barras são da mesma largura e, assim, as medidas da altura são proporcionais às frequências.

As barras são apoiadas em uma linha horizontal (ou vertical), que é um dos eixos do gráfico, e são igualmente espaçadas e em uma mesma cor.

Exemplo 1: Gráfico de barras verticais (colunas).

Países com mais casos de covid-19 em 30 de março de 2020

Banco de imagens/Arquivo da editora

País	Número de casos
Estados Unidos	143 055
Itália	97 689
Espanha	85 195
China	82 156
Alemanha	62 435
Irã	38 309
França	40 723
Reino Unido	19 784
Suíça	14 336
Bélgica	10 836

Fonte dos dados: ESPANHA tem 812 mortes por covid-19 em 24 horas; total supera as 7,3 mil. *G1*, [*s. l.*], 30 mar. 2020. Disponível em: https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/03/30/espanha-tem-812-mortes-por-covid-19-em-24-horas-total-supera-as-73-mil.ghtml. Acesso em: 16 mar. 2022.

Exemplo 2: Gráfico de barras horizontais.

Taxa de mortes por população

Banco de imagens/Arquivo da editora

País	Taxa de mortes*
Bélgica	75,13
Espanha	56,67
Itália	50,3
Reino Unido	47,62
França	39,28
Holanda	31,58
Estados Unidos	24,08
Alemanha	9,1
Irã	8,05
Brasil	5,09

Fonte dos dados: MAGENTA, Matheus. Coronavírus: 10 gráficos para entender a situação atual do Brasil na pandemia. *BBC News Brasil*, Londres, 13 maio 2020. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/brasil-52595760. Acesso em: 21 mar. 2022.

*Total de pessoas que morreram de covid-19 a cada 100 mil habitantes.

Orientações didáticas

Pesquisa estatística

Simule a escolha de diferentes tipos de amostra. Para a casual simples, você pode realizar um sorteio de uma porcentagem do total de estudantes da sala (40%, por exemplo) por meio de papéis ou sorteadores *on-line* com os números de chamada dos estudantes. Para a estratificada, é possível escolher uma quantidade proporcional ou fixa de meninos e meninas, de acordo com a quantidade total de estudantes. Para a sistemática, é possível escolher apenas os estudantes com números pares de chamada, por exemplo.

Neste tópico, ainda são retomados o gráfico de barras verticais (também chamado **gráfico de colunas**) e o gráfico de barras horizontais, que trazem dados referentes ao tema covid-19. Deixe claro que esses 2 tipos de gráfico são úteis quando se quer comparar quantidades associadas a determinadas categorias.

Proposta para o professor

Caso você decida realizar um sorteio de números *on-line* para o desenvolvimento de uma amostra casual, segue o endereço eletrônico de um sorteador de números aleatórios: 4DEVS FERRAMENTAS ONLINE. *Sorteador de números aleatórios*. Disponível em: https://www.4devs.com.br/sorteador. Acesso em: 23 jun. 2022.

Orientações didáticas

Gráfico de linha

Como exemplo de gráfico de linha (também chamado **gráfico de segmentos**), é apresentado um referente à ocupação de leitos de pacientes com covid-19 em determinada época durante a pandemia.

Pergunte aos estudantes em que outros contextos esse tipo de gráfico é adequado, ou seja, quando se quer analisar o crescimento e/ou decrescimento de uma variável durante um período observado. Exemplos de contextos: evolução de vendas ou do faturamento de uma loja ao longo de determinado período; evolução do número de casos de covid-19 ao longo de determinado ano; evolução da intenção de votos em candidatos à Presidência ao longo dos meses, entre outros. Valorize as diferentes respostas que surgirem e, se achar pertinente, peça que eles pesquisem reportagens que utilizam esse tipo de gráfico.

Gráfico de setores

Como exemplo de gráfico de setores (também chamado **gráfico de *pizza***), é apresentado um referente a casos confirmados de pessoas com covid-19 até determinada data durante a pandemia.

Comente que esse tipo de gráfico é útil quando se quer comparar determinada categoria de dados com o conjunto de dados envolvendo todas as categorias do tema considerado (é uma comparação da parte com o todo).

Gráfico de linha

O gráfico de linha é o mais adequado para apresentar evolução de dados ao longo do tempo. Nesse tipo de gráfico, 2 pontos consecutivos são ligados por um segmento de reta, traçando-se, assim, uma linha poligonal.

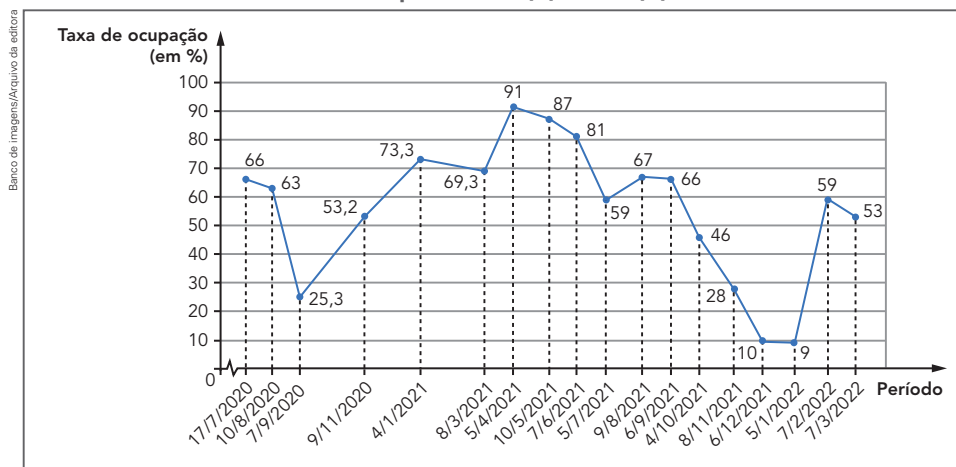
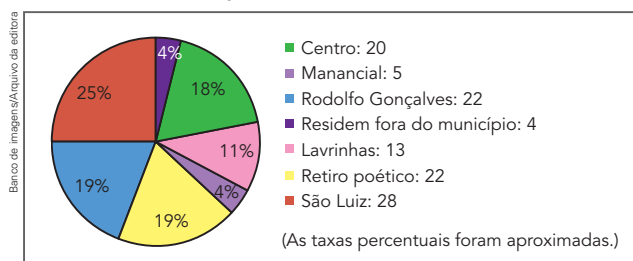
Percentual de ocupação de leitos de pacientes com covid-19 no estado do Rio de Janeiro no período de 17/7/2020 a 7/3/2022

Fonte dos dados: MONITORA covid-19 – ocupação de leitos UTI covid-19. *Instituto de Comunicação e Informação Científica e Tecnológica em Saúde (ICICT)/Fiocruz*, Rio de Janeiro, 2022. Disponível em: https://bigdata-covid19.icict.fiocruz.br/. Acesso em: 16 mar. 2022.

Gráfico de setores

Também conhecido como gráfico de *pizza*, esse tipo de gráfico é o mais adequado para comparar cada parte com o todo. Os dados são apresentados em setores circulares de ângulos com medidas proporcionais às respectivas frequências.

Casos de covid-19 confirmados, por unidade de saúde de referência, em Cordeiro (RJ) até 17/8/2020

Fonte dos dados: CORDEIRO. Secretaria Municipal de Saúde. *Gráfico de Monitoramento/ Curva de crescimento – covid-19*. Cordeiro: Secretaria Municipal de Saúde, 17 ago. 2020. Disponível em: https://www.cordeiro.rj.gov.br/conteudo/1798/grafico_de_monitoramento__curva_de_crescimento_-_covid-19___. Acesso em: 22 mar. 2022.

Observação

Os 4 gráficos anteriores relacionam-se ao mesmo tema, a covid-19. Note que cada um deles é adequado ao tipo de informação que se pretende apresentar. Nos dois primeiros gráficos, estão sendo comparados dados de países diferentes; no terceiro gráfico, temos a taxa de ocupação de leitos em uma região ao longo do tempo; e, no último, acompanhamos como os casos se distribuíam nas partes de determinada região.

Atividades

Prática de pesquisa

Faça as atividades no caderno.

1. Agora é sua vez! Siga as etapas apresentadas para a elaboração e a realização de uma pesquisa sobre o lazer preferido dos estudantes do 8º ano da escola em que você estuda. Respostas pessoais.

a) Opte entre pesquisa censitária ou amostral e justifique o motivo da sua escolha.

Por exemplo, se sua turma tem muitos estudantes ou se a escola tem mais de uma turma de 8º ano, convém fazer uma pesquisa amostral. Nesse caso, escolha o tipo de amostra; por exemplo, sorteio de uma lista única com todos os estudantes, sorteio de uma quantidade de estudantes de cada turma, sorteio de uma quantidade de estudantes de cada sexo biológico, formação de amostra com os estudantes de números múltiplos de 5 nas listas de chamada.

b) Colete os dados

Pergunte a cada estudante sorteado qual é o lazer preferido dele entre algumas opções; por exemplo, ir ao clube, ver TV, brincar, jogar *videogame*, visitar amigos.

c) Organize os dados

Construa tabelas como as que seguem e represente os dados em um gráfico de colunas com as frequências observadas e em um gráfico de setores com as frequências relativas (porcentagens).

Lazer preferido

Lazer	Número de entrevistados
Ir ao clube	//////////
Ver TV	//////////
Brincar	//////////
Jogar *videogame*	//////////
Visitar amigos	//////////

Dados obtidos pelo estudante.

Lazer preferido

Lazer	Número de entrevistados (em %)
Ir ao clube	//////////
Ver TV	//////////
Brincar	//////////
Jogar *videogame*	//////////
Visitar amigos	//////////

Dados obtidos pelo estudante.

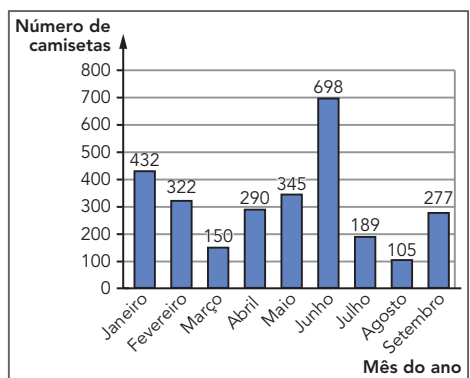
d) Ao final, escreva no caderno um relatório justificando o tipo de pesquisa escolhido e o tipo de amostra (se foi casual simples, estratificada – e como a estratificou – ou sistemática – e como a sistematizou). Apresente as tabelas e os gráficos e redija um pequeno texto com sua análise dos dados e conclusões.

2. Realize uma pesquisa amostral sobre a idade de um dos responsáveis por estudante do 8º ano da escola. Não se esqueça de apresentar no relatório final as medidas estatísticas relacionadas a essa variável (média, moda, mediana, amplitude). Respostas pessoais.

3. Escolha um tema de sua preferência para elaborar uma pesquisa amostral. A seguir sugerimos alguns, mas você pode utilizar outros temas. Respostas pessoais.

- Esporte preferido
- Número de pessoas na família
- Cor preferida
- Horas de estudo em casa por semana
- Profissão de um dos responsáveis
- Número do calçado

4. O gráfico a seguir mostra o número de camisetas compradas por uma loja de departamento nos últimos meses.

Número de camisetas compradas por uma loja

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Em que mês ocorreu a maior compra de camisetas? Junho.

b) No mês de abril foram compradas mais camisetas que em março? Se sim, quantas a mais? Sim; 140 camisetas.

c) Quantas camisetas foram compradas no período apresentado no gráfico? 2808 camisetas.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **1** a **3** propõem a prática de pesquisa e podem ser realizadas em grupos. Incentive os estudantes a apresentar os dados e as análises à turma, utilizando, se possível, um *software* de planilha eletrônica para a construção de tabelas e gráficos. Na atividade **2**, faça comentários sobre os responsáveis legais por uma criança ou adolescente menor de idade, que são os pais ou, na ausência desses, um tutor designado em juízo, que pode ou não ser da família.

Na atividade **4**, se necessário, retome o procedimento de cálculo da média aritmética e permita o uso da calculadora no item **d**. Para o item **g**, sugira o uso de papel quadriculado ou de um *software* de planilha eletrônica, se possível, para a construção do gráfico.

Essas atividades possibilitam o exercício da argumentação e da formulação de inferências no desenvolvimento dos relatórios das pesquisas realizadas pelos estudantes. Além disso, dependendo do tema selecionado ou criado para a pesquisa proposta na atividade **3**, podem ser propostas outras práticas de pesquisa envolvendo a compreensão conceitual do objeto em estudo. Por exemplo, se o tema for “profissão de um dos responsáveis”, os estudantes podem pesquisar as profissões mais citadas; se for “esporte preferido”, eles podem pesquisar as regras dos esportes citados; se for “número de pessoas da família”, eles podem pesquisar as configurações familiares existentes no passado e na atualidade; etc.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **5**, peça aos estudantes que compartilhem as respostas, de modo a valorizar os diferentes textos e a considerar outros pontos de vista acerca de uma mesma situação.

As atividades **6** e **7** utilizam conceitos de porcentagem, de modo que é preciso estabelecer relações de proporção para o cálculo de quantidades. Além disso, envolvem uma análise dos gráficos de setores, em que é preciso ler as legendas e calcular porcentagens faltantes e a média. No item **b** da atividade **7**, se achar necessário, relembre o procedimento de cálculo da média ponderada por meio da frequência relativa.

Incentive a escolha de diferentes times para a realização da pesquisa, na atividade **8**, e, para complementar, faça uma pesquisa com a turma perguntando para que time torcem. É possível, também, fazer comparações dos dados obtidos pelos estudantes, a fim de avaliar o time com melhor desempenho no Campeonato Brasileiro do ano em questão.

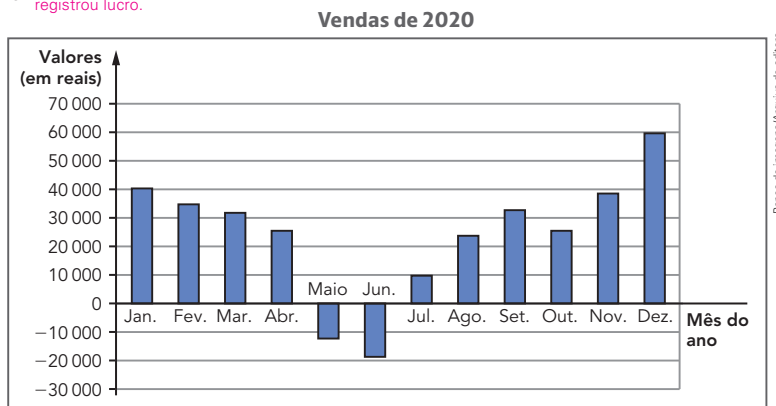
d) Qual é a média mensal do número de camisetas compradas durante os meses apresentados no gráfico? 312 camisetas.

e) Em quais meses a quantidade de camisetas compradas ficou abaixo da média? Março, abril, julho, agosto e setembro.

f) A compra do mês de janeiro ficou quantas camisetas acima da média? 120 camisetas.

g) Com os dados apresentados no gráfico de barras, construa um gráfico de linha. Coloque os meses no eixo horizontal e o número de camisetas compradas no eixo vertical. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

5. Uma empresa registrou em um gráfico o resultado do lucro ou do prejuízo de suas vendas durante o ano de 2020. Exemplo de resposta: Nos meses de maio e junho, a empresa registrou prejuízo nas vendas; nos demais meses, registrou lucro.

Vendas de 2020

Dados elaborados para fins didáticos.

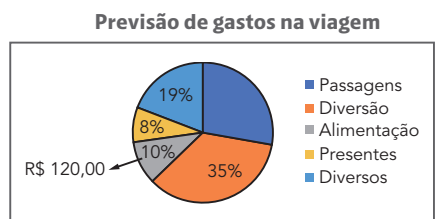
De acordo com o gráfico apresentado, escreva um pequeno comentário sobre os resultados financeiros dessa empresa.

6. Lucas vai viajar e fez uma previsão dos gastos que terá no gráfico a seguir.

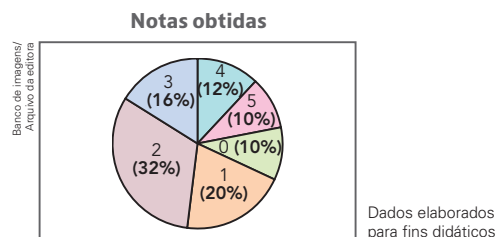
a) Qual é o total das despesas previstas? R$ 1.200,00

b) Qual é a porcentagem destinada às passagens? 28%

c) Quantos reais foram destinados à diversão? R$ 420,00

Previsão de gastos na viagem

Dados elaborados para fins didáticos.

7. O gráfico de setores a seguir representa as notas obtidas em certa questão pelos 250 estudantes presentes à prova. Ele mostra, por exemplo, que 32% desses estudantes tiveram nota 2 nessa questão, que valia 5 pontos.

Notas obtidas

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Quantos estudantes tiraram nota 3? 40 estudantes.

b) Qual foi a nota média nessa questão? 2,3

8. Para conhecermos a *performance* de um time de futebol, podemos considerar dados relacionados a vitórias, derrotas e empates que a equipe teve em determinado campeonato. Por exemplo, no Campeonato Brasileiro de Futebol masculino de 2019, o Flamengo foi campeão, conseguindo a maior pontuação de todos os tempos, com 28 vitórias, 6 empates e 4 derrotas.

Assim, escolha uma equipe qualquer de sua preferência e considere os dados do último Campeonato Brasileiro de Futebol masculino ou feminino e, então, construa um gráfico adequado para mostrar os dados relativos a ele. Resposta pessoal.

Classificação de variáveis quantitativas

Vimos que uma variável é dita **quantitativa** quando é expressa por um número. Se esse número resulta de uma contagem, dizemos que a variável é **discreta**. Por exemplo, são variáveis discretas a quantidade de irmãos de cada estudante da turma, o número de pontos de um jogador de basquete em uma partida e o número de ligações que você recebe em um dia.

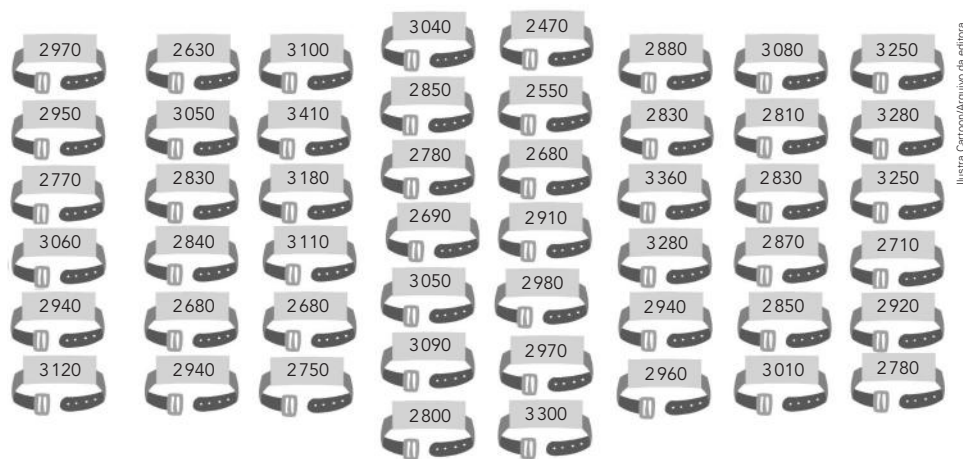
Uma variável que associa cada elemento da população a um número resultante de uma mensuração (medição) é, geralmente, uma **variável contínua**. Nas variáveis contínuas, os possíveis valores são todos os números da reta numérica, de uma semirreta ou de um segmento de reta. São variáveis contínuas, por exemplo, as medidas de altura, de massa e de tempo de cada participante em uma corrida de 100 metros.

Distribuição de frequências por classes

No caso das variáveis contínuas, as distribuições de frequências costumam ser apresentadas por classes (ou intervalos) de valores da variável. Vamos considerar um exemplo.

A seguir estão representadas as medidas de massa, em gramas, de 50 crianças nascidas em uma maternidade.

2970	2630	3100	3040	2470	2880	3080	3250
2950	3050	3410	2850	2550	2830	2810	3280
2770	2830	3180	2780	2680	3360	2830	3250
3060	2840	3110	2690	2910	3280	2870	2710
2940	2680	2680	3050	2980	2940	2850	2920
3120	2940	2750	3090	2970	2960	3010	2780
			2800	3300			

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Classificação de variáveis quantitativas

Na BNCC

Este tópico desenvolve a habilidade **EF08MA24** ao propor a classificação de variáveis quantitativas em discretas e contínuas e de frequências de uma variável contínua.

Antes de explorar este tópico, peça aos estudantes que deem exemplos de pesquisas que envolvem variáveis quantitativas. Anote na lousa as diferentes respostas que surgirem, de maneira resumida, e peça que eles reflitam a respeito dos números que podem ser obtidos em cada uma delas. Em seguida, peça que classifiquem essas variáveis em 2 grupos. Valorize os diferentes raciocínios que surgirem. Estimule-os a pensar em conjuntos numéricos para fazer essa classificação e, se necessário, relembre esses conceitos. Relacione os números a uma reta, de modo que, quando se tratar de contagens, seja possível apenas marcar pontos nessa reta, mas, quando se tratar de medidas, seja possível pensar em intervalos.

Enfatize que, em Matemática, o termo “discreto” (substantivo: relativo à contagem, antônimo de “contínuo”) tem significado distinto do mesmo termo usado como adjetivo (comedido, reservado, prudente, circunspecto) na língua portuguesa de uso cotidiano.

Distribuição de frequências por classes

Neste tópico, construa com os estudantes a tabela e o gráfico do exemplo das massas de crianças em uma maternidade, incentivando-os a exercer um papel ativo no processo. Se achar pertinente, aproveite um dos exemplos trazidos pelos estudantes para realizar com a turma uma pesquisa que envolva uma variável quantitativa contínua.

Orientações didáticas

Histograma

Explique aos estudantes que o histograma é um tipo de gráfico de colunas utilizado para representar um conjunto de valores de uma variável quantitativa contínua que são agrupados em intervalos, para facilitar a visualização do valor central e da distribuição dos demais valores em torno do central.

Construa o gráfico do exemplo com os estudantes, na lousa ou em um *software* de planilha eletrônica, se possível, sugerindo a leitura da seção *Matemática e tecnologias* presente no final deste capítulo.

Para agrupar esses dados em uma tabela, escolhemos a quantidade de intervalos e o comprimento de cada um deles. Em geral, usam-se de 5 a 12 classes, de preferência do mesmo comprimento.

Nesse exemplo, podemos notar que:

- o menor valor obtido é 2 470, e o maior, 3 410;
- a diferença $3\,410 - 2\,470 = 940$ representa a **amplitude** dos dados;
- escolhendo 8 classes de comprimento 120, cobriremos todos os dados, uma vez que $8 \cdot 120 = 960$.

Assim, formamos a tabela a seguir, contando o número de crianças em cada intervalo de medida de massa.

Medida de massa das crianças nascidas em uma maternidade

Medida de massa (em g)	Frequência (nº de crianças)	Frequência relativa (em %)
2 460 ⊢ 2 580	2	4
2 580 ⊢ 2 700	5	10
2 700 ⊢ 2 820	7	14
2 820 ⊢ 2 940	10	20
2 940 ⊢ 3 060	12	24
3 060 ⊢ 3 180	6	12
3 180 ⊢ 3 300	5	10
3 300 ⊢ 3 420	3	6
Total	**50**	**100**

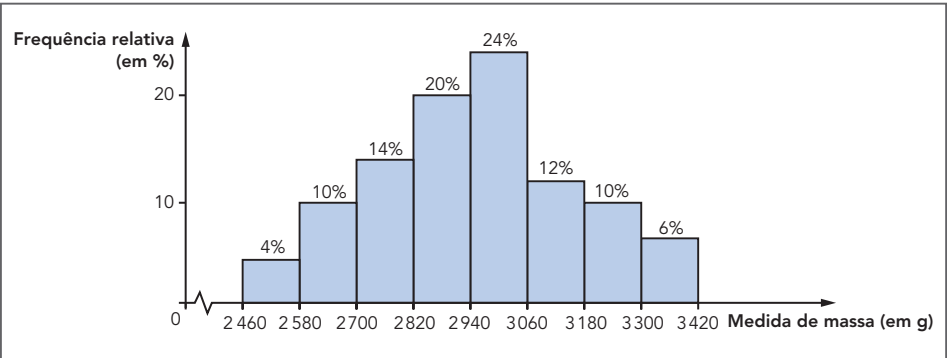
Dados elaborados para fins didáticos.

O símbolo ⊢ indica que o valor à esquerda é incluído nesse intervalo, mas o da direita não. Por exemplo, o valor 3 300 não é contado na classe 3 180 ⊢ 3 300, mas, sim, na seguinte, 3 300 ⊢ 3 420.

As distribuições de frequência por classes também podem ser feitas para variáveis discretas quando a lista de valores é grande.

Histograma

A representação gráfica de uma distribuição de frequências por classes é feita marcando-se no eixo do gráfico os intervalos considerados e tomando-se cada um como base de uma coluna cuja medida de área seja proporcional à frequência (e à frequência relativa). Caso sejam intervalos de mesmo comprimento, basta tomar colunas com medidas de altura proporcionais às frequências. Esse gráfico é denominado **histograma**.

Medida de massa das crianças nascidas em uma maternidade

Dados elaborados para fins didáticos.

Atividades

9. b) A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.
c) A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Faça as atividades no caderno.

9. Um radar foi colocado em uma rodovia para medir a velocidade dos veículos em um trecho em que a medida de velocidade máxima permitida é de 110 quilômetros por hora (110 km/h). Para os primeiros 40 veículos que passaram nesse trecho em certo dia, as velocidades medidas em km/h foram:

104	84	85	109	110	72	92	94
105	95	96	109	76	108	78	85
103	104	86	115	122	86	118	88
89	114	90	126	91	94	102	95
98	101	105	90	75	106	108	80

a) Qual é a amplitude desse conjunto de dados? 54 km/h

b) Organize a tabela de frequências das medidas de velocidade em 6 classes iniciando por 70 ⊢ 80.

c) Represente os dados em um histograma.

10. Realize uma pesquisa com os estudantes da turma anotando a medida de altura e a numeração do calçado de cada um.

a) Agrupe os dados em tabelas. Quais dados seriam agrupados em uma tabela de frequência por classes?

b) Represente os dados organizados em gráficos. Qual seria o melhor tipo de gráfico para apresentar os dados relativos à numeração do calçado? E para a medida de altura?

11. Faça uma pesquisa amostral sobre uma variável quantitativa contínua definida na população formada por todos os estudantes da escola que estudam no mesmo período que você. Escolha uma amostra estratificada tomando como critério determinado porcentual de estudantes de cada ano. No relatório final deve constar um histograma construído de acordo com os dados colhidos.

Tema sugerido: Tempo que você leva para chegar de sua residência à escola.

Se este for o tema escolhido, enriqueça sua pesquisa acrescentando um gráfico adequado sobre o meio de transporte utilizado. Resposta pessoal.

10. a) Resposta pessoal. As medidas de altura teriam que ser organizadas em uma tabela de frequência por classes.
b) Os dados relativos à numeração de calçados poderiam ser apresentados em um gráfico de barras, e os relativos às medidas de altura, em um histograma.

12. No processo de seleção de um candidato para preencher uma vaga de gerente, um banco aplicou uma prova que deveria ser concluída em, no máximo, 4 horas. Os 80 candidatos presentes gastaram as medidas de tempo indicadas na tabela a seguir.

Faça o histograma, indicando as porcentagens de cada classe.

Medida de tempo de cada candidato

Medida de tempo (em min)	Nº de candidatos
100 ⊢ 120	12
120 ⊢ 140	20
140 ⊢ 160	16
160 ⊢ 180	14
180 ⊢ 200	8
200 ⊢ 220	6
220 ⊢ 240	4
Total	**80**

Dados elaborados para fins didáticos.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

13. Com relação à atividade anterior, analise a tabela a seguir, que mostra as notas obtidas pelos 80 candidatos.

Nota de cada candidato

Nota	Nº de candidatos
0 ⊢ 2,0	14
2,0 ⊢ 4,0	20
4,0 ⊢ 6,0	20
6,0 ⊢ 8,0	16
8,0 ⊢⊣ 10,0	10
Total	**80**

Dados elaborados para fins didáticos.

Note que o último intervalo de notas é 8,0 ⊢⊣ 10,0. O símbolo ⊢⊣ indica que nele estão computadas todas as notas de 8,0 a 10,0, incluindo essas duas.

Faça o histograma, indicando as porcentagens de cada classe. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Atividades

Para construir as tabelas das atividades **9** a **11**, oriente os estudantes a anotar os valores que já foram utilizados em algum intervalo, a fim de facilitar a identificação dos demais. Para a construção do histograma, se possível, peça aos estudantes que utilizem uma folha de papel quadriculado, uma vez que cada coluna deve ter a mesma largura. Se achar pertinente, sugira que a construção seja realizada em um *software* de planilha eletrônica.

Orientações didáticas

Matemática e tecnologias

Na BNCC

Esta seção mobiliza com maior ênfase a **CEMAT05** ao propor a utilização de uma ferramenta matemática digital para construção de gráficos.

É possível que os estudantes já estejam familiarizados com as ferramentas disponibilizadas pelo GeoGebra, no entanto, se considerar oportuno, reforce que o *software* tem uma interface amigável, que facilita a criação de construções matemáticas e modelos que permitem explorações interativas, arrastando objetos e alterando parâmetros.

Procure realizar o passo a passo indicado para auxiliar os estudantes no momento da aula. Esta seção pode ser lida e relida a qualquer momento do desenvolvimento do capítulo, de modo que os gráficos dos exemplos e das atividades propostas podem ser construídos no GeoGebra.

Matemática e tecnologias

Construindo gráficos com auxílio de uma ferramenta digital

Vamos utilizar o *software* gratuito **GeoGebra** para construir gráficos de setores de acordo com os dados de uma tabela. Ele pode ser utilizado *on-line*, disponível em: https://www.geogebra.org/classic (acesso em: 18 abr. 2022). Depois de acessar esse endereço eletrônico, selecione o ícone "Planilha de Cálculos".

Caso esse menu não esteja aparecendo, clique no botão Menu (≡) (**1**); em seguida, clique na opção "Disposições" (**2**) e depois selecione a opção "Planilha de Cálculos" (**3**).

GeoGebra Clássico
Gráfico
Geometria
Janela 3D
Janela CAS
Planilha de Cálculos
Probabilidade

Reprodução/GeoGebra.org

O GeoGebra tem editor de planilhas que pode auxiliar no trabalho com tabelas e na construção de gráficos.

Arquivo
Editar
Disposições
Gráfico
Janela CAS
Geometria
Janela 3D
Planilha de Cálculos
Probabilidade

(1)
(2)
(3)

Reprodução/GeoGebra.org

Outra maneira de acessar a "Planilha de Cálculos" no GeoGebra.

Como exemplo, utilizaremos os dados da atividade **1** deste capítulo.

Podemos digitar os dados nas células dessa tabela na janela "Planilha de Cálculos", como apresentado na imagem a seguir.

Lazer preferido

Lazer	Número de entrevistados
Ir ao clube	18
Ver TV	37
Brincar	45
Jogar *videogame*	20
Visitar amigos	12

Dados elaborados para fins didáticos.

	A	B
1	Lazer Preferido	
2	Lazer	Número de entrevistados
3	Ir ao clube	18
4	Assistir à TV	37
5	Brincar	45
6	Jogar videogame	20
7	Visitar amigos	12

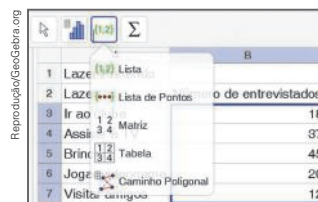
Reprodução/GeoGebra.org

Digitando os dados da tabela da atividade **1** na janela "Planilha de Cálculos" do GeoGebra.

Para criar um gráfico no GeoGebra, será necessário criar uma lista com os valores que queremos utilizar no gráfico. Para fazer isso, com os dados da nossa tabela, selecione as células com os valores que vão entrar no gráfico.

Clique no botão e selecione o comando "Lista", conforme indicado a seguir.

Lista
Lista de Pontos
Matriz
Tabela
Caminho Poligonal

Reprodução/GeoGebra.org

Selecionando a opção lista com os dados da tabela da atividade **1** na Janela "Planilha de Cálculos" do GeoGebra.

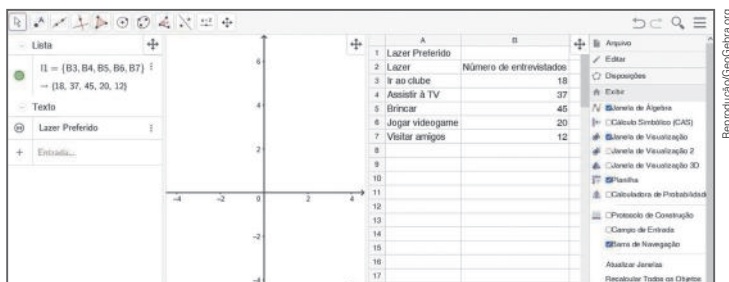
Abrirá uma janela, conforme a apresentada.

Deixe a opção “Objetos Dependentes” selecionada, pois, assim, qualquer mudança em uma célula da planilha será feita também no gráfico que será construído. Em seguida, clique no botão “OK.”

Reprodução/GeoGebra.org

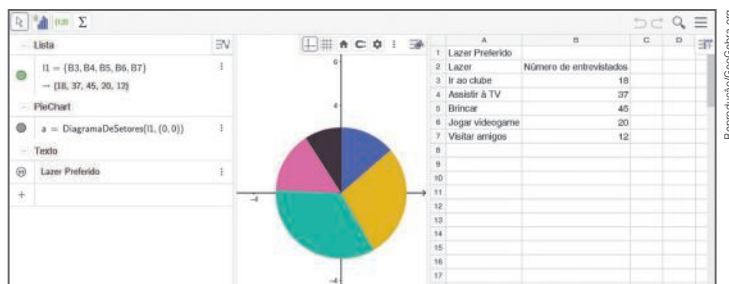
Criando a lista com os dados da tabela da atividade **1** na Janela "Planilha de Cálculos" do GeoGebra.

Vamos agora trabalhar com outras janelas do GeoGebra simultaneamente. Para fazer isso, clique no menu (☰); em seguida, clique em “Exibir” e selecione as opções “Janela de Álgebra”, “Janela de Visualização” e “Planilha”.

Reprodução/GeoGebra.org

Exibindo a "Janela de Visualização", a "Janela de Álgebra" e a "Planilha" no GeoGebra.

O nosso gráfico vai aparecer na “Janela de Visualização”, localizada entre a “Planilha" (localizada à direita) e a “Janela de Álgebra” (localizada à esquerda). Na “Janela de Entrada”, clique no campo de entrada e digite o comando “DiagramaDeSetores(<Lista de Frequência>)”.

O comando “DiagramaDeSetores” possui um parâmetro que é uma lista com as frequências que vão compor o gráfico de setores. Essa lista foi criada a partir dos gráficos da planilha e tem o nome “l1”. Assim, digite, no campo de entrada, “DiagramaDeSetores(l1)” e pressione “Enter”.

Reprodução/GeoGebra.org

Criando o gráfico de setores com os dados da atividade **1** no GeoGebra.

Agora, com auxílio do GeoGebra, construa um gráfico de setores para representar os dados desta tabela, que indica a quantidade de animais resgatados, durante 5 anos, por uma ONG que resgata e cuida de animais abandonados.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

ONG de resgate de animais

Ano	Quantidade de animais
2017	70
2018	59
2019	48
2020	39
2021	32

Dados elaborados para fins didáticos.

Orientações didáticas

Matemática e tecnologias

Reserve um momento da aula para auxiliar os estudantes com esse passo a passo. Peça que eles reproduzam o mesmo gráfico exemplificado para, em seguida, se sentirem seguros para construir outros gráficos propostos no capítulo.

É importante ressaltar que, no momento de exibir as 3 janelas, é possível que elas não apareçam na ordem em que estão no exemplo da página do Livro do Estudante.

Proposta para o professor

Caso queira conhecer outra maneira de construir um gráfico de setores e outros tipos de gráfico, indicamos os seguintes vídeos:

GRÁFICO de Setores no GeoGebra. [*s. l.*: *s. n.*], 2019. 1 vídeo (11 min). Publicado pelo canal O Geogebra. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=B-lJkjf3OuY.

GRÁFICO de Barras no GeoGebra. [*s. l.*: *s. n.*], 2019. 1 vídeo (11 min). Publicado pelo canal O Geogebra. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=7tDOjXHhybU.

COMO construir gráficos de barras no GeoGebra (reutilizáveis!) em cinco passos. [*s. l.*: *s. n.*], 2020. 1 vídeo (7 min). Publicado pelo canal O Geogebra. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=1Q30Mdts1FM.

Acesso em: 24 jun. 2022.

Orientações didáticas

Princípio fundamental da contagem

Na BNCC

Neste capítulo, a habilidade **EF08MA04** é trabalhada de maneira transversal ao longo do conteúdo. As habilidades **EF08MA03** e **EF08MA22** são trabalhadas com a proposta de resolução de problemas de contagem e o cálculo de probabilidades.

Antes de ler com os estudantes o texto do exemplo apresentado, peça que analisem a imagem com a cena na sorveteria e o esquema ao lado dela. É importante que concluam sozinhos que basta multiplicar os números que representam as quantidades de sabores e de coberturas para obter o número de possibilidades para compor um pedido.

Após a sistematização do princípio fundamental da contagem (também chamado **princípio multiplicativo**), proponha outro exemplo, agora com 3 etapas sucessivas, podendo ser: 5 sabores de sorvete, 3 coberturas e 2 finalizações (confete e paçoca, por exemplo). Peça aos estudantes que desenhem a árvore de possibilidades e finalize com as seguintes perguntas: “O mesmo procedimento estabelecido com 2 etapas vale para 3 etapas?”; “O que aconteceria se acrescentássemos mais etapas? O procedimento do princípio fundamental da contagem continuaria valendo?”.

É esperado que os estudantes concluam que o mesmo método pode ser aplicado, independentemente da quantidade de etapas.

CAPÍTULO 19

Contagem e Probabilidade

NA BNCC
EF08MA03
EF08MA22

Princípio fundamental da contagem

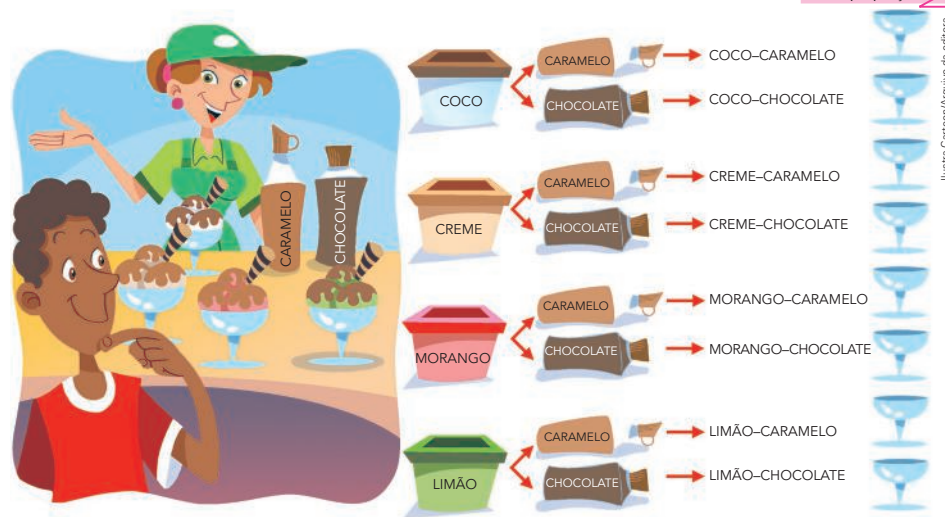
O sorvete e a cobertura

A sorveteria Olímpia está divulgando uma promoção: o cliente paga um preço fixo e pode escolher, para o sorvete, os sabores de coco, creme, morango e limão e, para a cobertura, os de chocolate e caramelo.

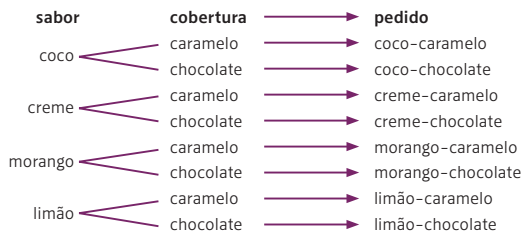
Para a promoção, cada cliente pode escolher apenas 1 sabor de sorvete e 1 de cobertura por taça. Vamos analisar de quantos modos é possível compor um pedido válido para essa promoção.

Note este esquema:

As imagens não estão representadas em proporção.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Temos 4 possibilidades para a escolha do sabor do sorvete. Para cada uma delas, temos 2 possibilidades para a escolha do sabor da cobertura. No total, temos $4 \cdot 2$ possibilidades para montar uma taça de sorvete com cobertura. Logo, há 8 modos diferentes de compor um pedido.

Esse tipo de situação é usualmente apresentado conforme o esquema a seguir, denominado **árvore de possibilidades**.

sabor	cobertura	→ pedido
coco	caramelo	coco-caramelo
	chocolate	coco-chocolate
creme	caramelo	creme-caramelo
	chocolate	creme-chocolate
morango	caramelo	morango-caramelo
	chocolate	morango-chocolate
limão	caramelo	limão-caramelo
	chocolate	limão-chocolate

Se, no problema proposto, a promoção dessa sorveteria permitisse a escolha entre 12 sabores de sorvete e entre 4 sabores de cobertura, de quantos modos seria possível compor um pedido?

Nesse caso, teríamos 12 possibilidades para a escolha do sabor do sorvete e, para cada uma, 4 possibilidades para o da cobertura. Logo, teríamos $12 \cdot 4$ maneiras de montar uma taça de sorvete com cobertura, portanto, 48 modos diferentes de compor um pedido.

Note que resolvemos a questão sem precisarmos escrever, um por um, os possíveis pedidos e contá-los. Fizemos uma contagem indireta.

Para facilitar a resolução de problemas de contagem, é importante saber resolvê-los por métodos que não exijam a contagem direta, que, em geral, pode ser muito trabalhosa.

Nesse exemplo das taças de sorvete com cobertura aplicamos o **princípio fundamental da contagem**, que pode ser enunciado como segue.

> Se uma ação é composta de 2 etapas sucessivas, em que a primeira possa ser realizada de m modos e, para cada um destes, a segunda possa ser feita de n modos, então o número de modos de realizar a ação é $m \cdot n$.

Esse princípio pode ser estendido para ações compostas de mais de 2 etapas.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Adriano deseja formar um conjunto calça-camiseta para se vestir. Se ele dispõe de 4 calças e 6 camisetas para escolher, de quantos modos pode formar o conjunto? 24 modos.

2. Quantos são os números de 3 algarismos em que os 3 algarismos são ímpares? Ou seja: de quantos modos podemos formar um número de 3 algarismos usando apenas os algarismos ímpares?

algarismo das centenas	algarismo das dezenas	algarismo das unidades

Para resolver esse problema, responda às questões a seguir.

a) Quais são os algarismos ímpares? Quantos são? 1, 3, 5, 7, 9. São 5.

b) Quantas são as possibilidades para o algarismo das centenas? 5 possibilidades.

c) Para cada centena, quantas são as possibilidades para a dezena? 5 possibilidades.

d) Para cada centena e cada dezena, quantas são as possibilidades para a unidade? 5 possibilidades.

e) Quantas são as possibilidades para formar o número? 125 possibilidades.

3. Quantos são os números de 3 algarismos distintos em que os 3 algarismos são ímpares? Siga o roteiro da atividade anterior, mas fique atento: quando for escolher o algarismo das dezenas, ele não poderá ser igual ao das centenas; o das unidades não poderá ser igual a nenhum dos anteriores. 60 números.

4. Em uma escola há 4 portões.

a) Quantas são as possibilidades de se entrar por um portão da escola e sair por outro? 12 possibilidades.

b) Quantas são as possibilidades de se entrar e sair da escola podendo-se usar o mesmo portão? 16 possibilidades.

5. Uma moeda é lançada algumas vezes e a sequência de resultados, cara ou coroa, de cada lançamento é anotada.

K: coroa C: cara

Banco de imagens/Arquivo da editora

Reprodução/Casa da Moeda do Brasil/Ministério da Fazenda

Quantas sequências diferentes de resultados podem ser formadas:

a) se forem feitos 2 lançamentos? 4 sequências.

b) se forem feitos 3 lançamentos? 8 sequências.

c) se forem feitos 4 lançamentos? 16 sequências.

Orientações didáticas

Atividades

Aplicações do princípio fundamental da contagem são abordadas nas atividades **1** a **5**.

Destacamos que, para a realização das atividades **2** e **3**, pode-se sugerir que os estudantes desenhem 3 traços na horizontal, cada um representando uma ordem (unidade, dezena e centena), e coloquem abaixo dos traços a quantidade de possibilidades de cada posição, para facilitar a visualização do cálculo. Acima de cada traço, também dá para registrar os algarismos possíveis. No caso da atividade **3**, os estudantes podem ter dificuldade em registrar os algarismos possíveis, uma vez que isso depende do resultado da ordem anterior.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **8**, cada questão da prova pode ser uma etapa com as possibilidades de resposta (alternativas).

Na atividade **9**, as etapas podem ser a quantidade de dígitos da senha e as possibilidades de algarismos ou caracteres que podem ocupar em cada dígito. Peça aos estudantes que tentem resolver os problemas elaborados pelos colegas, a fim de identificar possíveis falhas ou dificuldades de interpretação na escrita do enunciado. Sendo essa uma atividade que pode promover o diálogo, ela mobiliza a **CG09** da BNCC.

É importante ressaltar que o enunciado do problema elaborado pelo estudante precisa ser claro e fornecer dados suficientes para sua resolução. Para que fique mais evidente essa importância, analise com a turma os problemas elaborados e peça que os estudantes identifiquem possíveis entraves e proponham correções.

9. Exemplo de resposta: Para acessar um *site* de compras, o usuário deve colocar seu *e-mail* e criar uma senha com 4 caracteres, sendo o primeiro uma vogal maiúscula e os demais algarismos de 0 a 9. Quantas senhas distintas é possível criar? Resposta: 5 000 senhas distintas.

Faça as atividades no caderno.

6. Samanta está na Lanchonete do Pedrão para comer um sanduíche e tomar um suco. Ela está em dúvida se vai ou não pedir uma porção de batatas fritas. Considere a imagem e responda: De quantos modos ela poderá compor o pedido? 27 modos.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

7. No quadro a seguir está a composição do número de alunos nos 8os anos de uma escola.

	Meninos	Meninas
8º A	15	22
8º B	18	20

Três estudantes vão compor uma comissão para a organização da olimpíada da escola. De quantos modos os estudantes podem ser escolhidos se a comissão for formada por:

a) um menino de cada turma e uma menina? 11 340 modos.

b) uma menina de cada turma e um menino? 14 520 modos.

8. Uma prova contém 10 testes, cada um com 4 alternativas, das quais apenas uma é correta.

ajt/Shutterstock

Preenchimento de gabarito de uma prova de testes.

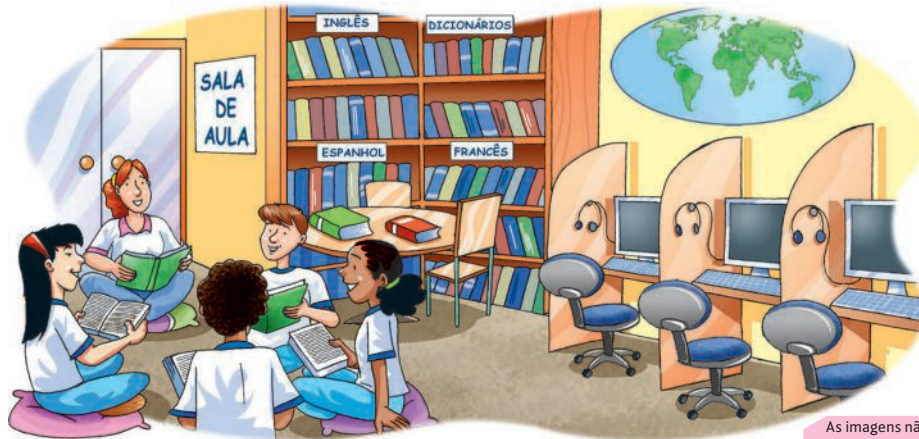
Elabore um problema com esses dados cuja resolução exija a aplicação do princípio fundamental da contagem.

9. Elabore um problema relacionado à elaboração de senhas cuja resolução exija a aplicação do princípio fundamental da contagem.

8. Exemplo de resposta: Uma prova contém 10 testes, cada um com 4 alternativas, das quais apenas uma é correta. De quantos modos distintos é possível preencher o gabarito? Resposta: 4^{10} = 1 048 576 modos distintos.

Probabilidade: de quanto é a chance?

Os canhotos

Luciana é estudante do 8º ano D. A turma dela é composta de 32 estudantes, dos quais 20 são meninas e, de toda a turma, 6 estudantes são canhotos, incluindo ela.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Proposta para o estudante

Se achar conveniente, proponha as seguintes atividades complementares:

I. Carlos quer escolher uma senha com 4 algarismos diferentes para o celular dele. Quantas senhas podem ser formadas? (10 · 9 · 8 · 7) Resposta: 5 040 senhas.

II. Para acessar a internet, Gilberto Dunas escolheu uma senha formada por 6 letras diferentes, todas presentes no nome dele. A senha começa por consoante e vai alternando consoante e vogal. De quantos modos essa senha pode ser formada? (8 · 5 · 7 · 4 · 6 · 3) Resposta: 20 160 modos.

O professor João decidiu sortear um livro de Literatura Brasileira para cada uma das suas turmas de 8º ano, incluindo a de Luciana. Vamos determinar, na turma de Luciana, qual é a probabilidade de que o ganhador do livro seja:

a) Luciana;

b) alguém canhoto;

c) uma menina.

Vamos analisar a situação.

a) Todos os estudantes da turma têm a mesma chance de ganhar o livro. Como são 32 estudantes no total, há 32 possibilidades para o resultado do sorteio. Luciana é uma dessas possibilidades. Dizemos que a probabilidade de Luciana ganhar equivale à razão de 1 para 32, ou seja, a probabilidade é $\frac{1}{32}$.

b) Nessa turma há 6 canhotos: Luciana e mais 5 estudantes. Logo, para que o ganhador seja um canhoto, há 6 possibilidades em 32. A probabilidade de que o ganhador seja canhoto, então, é $\frac{6}{32}$, ou, simplificando, $\frac{3}{16}$.

c) Para que o ganhador seja uma menina, há 20 possibilidades em 32. A probabilidade de que o ganhador seja uma menina, então, é $\frac{20}{32}$, logo, $\frac{5}{8}$.

Possibilidades e probabilidades

Na Teoria da Probabilidade quantificamos a chance de ocorrência de determinado acontecimento.

Probabilidades são atribuídas a resultados de **experimentos aleatórios**, assim denominados porque, repetidos em condições idênticas, podem apresentar resultados diferentes. A variabilidade do resultado é uma consequência do que chamamos de **acaso**.

O exemplo de situação mais simples para a atribuição de probabilidades é o apresentado no início do capítulo, para o qual há um número finito de resultados possíveis e com chances iguais de ocorrência. Nesse caso, havendo n resultados possíveis em um experimento, a probabilidade de que seja um entre d resultados desejados é a razão $\frac{d}{n}$.

Em um experimento aleatório com n resultados possíveis de mesma chance de ocorrência, a **probabilidade** de ocorrer um dos d resultados desejados é $\frac{d}{n}$.

Probabilidades são números que variam de 0 a 1. Podem ser expressas por meio de frações, números decimais ou porcentagens de 0% a 100%.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Para a resolução das atividades **10** a **14**, é necessário que você faça uma pesquisa na sua turma.

Em uma folha avulsa, anote estes dados sobre sua turma:

- quantidade de estudantes;
- quantidade de irmãos dos estudantes;
- idade dos estudantes;
- quantidade de meninas;
- quantidade de canhotos;
- quantidade de estudantes cujos nomes começam com a letra **A**;
- quantidade de estudantes cujos nomes começam com a letra **Q**.

Orientações didáticas

Probabilidade: de quanto é a chance?

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA22**, ao propor a resolução de problemas envolvendo o cálculo de probabilidades.

Você pode iniciar este tópico realizando um sorteio com os estudantes para permitir que eles vivenciem uma situação parecida com a do exemplo de Luciana, apresentado na página. Antes de realizar o sorteio, pergunte aos estudantes: "Há mais chance de eu sortear um menino ou uma menina? O que faz vocês pensarem assim?"; "Há mais chance de eu sortear um estudante destro ou canhoto? O que faz vocês pensarem assim?".

É esperado que os estudantes tenham uma ideia intuitiva de que, quanto mais pessoas de determinada característica houver no total, haverá mais chance de esse grupo ser sorteado.

Orientações didáticas

Atividades

Auxilie os estudantes a realizar a pesquisa sugerida para as atividades **10** a **15**. Conduza o momento (ou peça que algum estudante conduza), solicitando que levante as mãos quem tem 0, 1, 2, 3, 4 ou mais irmãos e anote as quantidades na lousa. Depois, peça que os estudantes organizem no caderno uma tabela de frequências, como sugere a atividade **10**. Siga o mesmo procedimento para as demais perguntas da pesquisa.

Para realizar as atividades **11**, **13** e **14**, se necessário, retome os procedimentos para o cálculo da média a partir de tabelas de frequências e o conceito de moda.

As atividades **12**, **14** e **15** são aplicações diretas da fórmula para o cálculo de probabilidades.

A soma das probabilidades

Antes de explorar este tópico, se achar pertinente, leve uma moeda para a sala de aula e realize alguns lançamentos para os estudantes verificarem os possíveis resultados. Peça que anotem cada resultado: cara ou coroa. Em seguida, pergunte a eles qual é a probabilidade de sair cara e qual é a de sair coroa. Peça que adicionem essas probabilidades e verifiquem o resultado.

10. Reproduza, na mesma folha avulsa, as tabelas a seguir e complete-as com os dados obtidos na pesquisa. As respostas dependem dos dados de cada turma.

Dados obtidos na pesquisa

Número de irmãos	Frequência
0	//////////
1	//////////
2	//////////
⋮	⋮

Idade (em anos)	Frequência
13	//////////
14	//////////
⋮	⋮

Dados obtidos pelos estudantes.

11. Depois de coletar os dados solicitados na atividade **10**, calcule a média do número de irmãos por estudante da sua turma. A resposta depende dos dados de cada turma.

12. Se um sorteio for realizado em sua turma, qual é a probabilidade de que seja sorteado(a): As respostas dependem dos dados de cada turma.

a) uma menina?
b) um canhoto?
c) alguém cujo nome começa com **A**?
d) alguém cujo nome começa com **Q**?

13. Sobre a idade dos estudantes, responda às perguntas. As respostas dependem dos dados de cada turma.

a) Qual é a média de idade dos estudantes?
b) Qual é a idade modal?

14. Em um sorteio, qual é a probabilidade de que seja sorteado: As respostas dependem dos dados de cada turma.

a) um filho único?
b) um estudante que tenha mais irmãos do que a média da turma?
c) um estudante com idade acima da média da turma?
d) um estudante com a idade modal?
e) um estudante que tenha 2 irmãos?
f) um estudante que tenha mais de 8 irmãos?
g) um estudante com 15 anos?
h) um estudante com menos de 20 anos?

15. Responda às perguntas no caderno, registrando o resultado na forma decimal.

a) No sorteio de um número de 1 a 100:
- qual é a probabilidade de ser sorteado um número múltiplo de 11? 0,09
- qual é a probabilidade de ser sorteado um número que não é múltiplo de 11? 0,91

b) Qual é a soma das probabilidades calculadas no item **a**? 1

A soma das probabilidades

Os resultados possíveis de um experimento aleatório formam um conjunto que chamamos **espaço amostral do experimento**.

Por exemplo, no lançamento de uma moeda e registro da face superior, o espaço amostral é: $\{\text{cara, coroa}\}$. Ou, representando cara por C e coroa por K, o espaço amostral é: $\{C, K\}$.

No lançamento de uma moeda, vamos determinar qual é a probabilidade de ocorrer cara e a de ocorrer coroa.

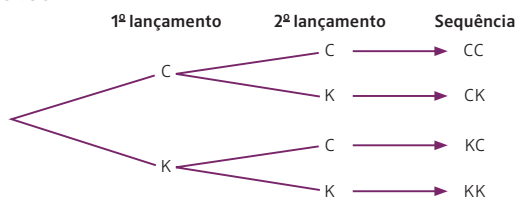
Quando lançamos uma moeda equilibrada, construída de modo que sua massa seja homogeneamente distribuída no espaço que ocupa, os resultados cara e coroa são igualmente prováveis. Nesse caso, dizemos que a moeda é **não viciada**.

Por serem 2 resultados possíveis, cada um deles tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de ocorrência. Indicando por $P(C)$ a probabilidade de ocorrer cara e por $P(K)$ a de ocorrer coroa, temos: $P(C) = \frac{1}{2}$ e $P(K) = \frac{1}{2}$.

A soma das probabilidades dos 2 resultados possíveis do experimento é:

$$P(C) + P(K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Se uma moeda é lançada 2 vezes e registramos a sequência de resultados de cada lançamento, temos os seguintes resultados possíveis:

1º lançamento	2º lançamento	Sequência
C	C	CC
	K	CK
K	C	KC
	K	KK

Banco de imagens/Arquivo da editora

Portanto, o espaço amostral para esse experimento é: $\{CC, CK, KC, KK\}$.

Por se tratar de uma moeda não viciada, os 4 resultados possíveis são igualmente prováveis. A sequência CC é 1 resultado em 4 possíveis, logo tem probabilidade de ocorrer igual a $\frac{1}{4}$. O mesmo vale para cada sequência:

- $P(CC) = \frac{1}{4}$
- $P(CK) = \frac{1}{4}$
- $P(KC) = \frac{1}{4}$
- $P(KK) = \frac{1}{4}$

A soma das probabilidades dos 4 resultados possíveis do experimento é:

$$P(CC) + P(CK) + P(KC) + P(KK) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Participe

Faça as atividades no caderno.

I. Vamos considerar o experimento aleatório que consiste em lançar uma moeda não viciada 2 vezes e registrar quantas vezes aparece cara na face superior.

a) Se for obtida a sequência KK, que número será registrado? 0

b) E se for KC? 1

c) E se for CK? 1

d) E se for CC? 2

e) Então, quais são os registros possíveis nesse experimento? 0, 1 e 2.

f) Escreva no caderno o espaço amostral. $\{0, 1, 2\}$

g) Escreva no caderno a probabilidade de ocorrência de cada resultado possível. $P(0) = \frac{1}{4}$, $P(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(2) = \frac{1}{4}$

h) Calcule a soma das probabilidades dos resultados possíveis. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

i) Copie a frase no caderno e substitua ▨▨▨ pelo valor que torna a frase correta.

A soma das probabilidades de todos os resultados possíveis desse experimento aleatório é igual a ▨▨▨. 1

j) Em porcentagem, qual é a soma das probabilidades de todos os resultados possíveis desse experimento aleatório? 100%

II. Agora, vamos considerar o experimento aleatório que consiste no sorteio de um número natural de 1 a 10 em que os possíveis resultados são igualmente prováveis.

a) Dos números naturais de 1 a 10, quantos são múltiplos de 5? 2 números (o número 5 e o número 10).

b) Qual é a probabilidade de ser sorteado um número múltiplo de 5? $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

c) Qual é a probabilidade de ser sorteado um número que não é múltiplo de 5? $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

d) Qual é a soma das probabilidades obtidas nos dois itens anteriores? 1

O que você notou e calculou nos exemplos anteriores é válido para qualquer experimento aleatório.

> A soma das probabilidades de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é sempre igual a 1.

Orientações didáticas

A soma das probabilidades

Ainda sem que os estudantes consultem o livro, realize o experimento proposto nele. Para os 2 lançamentos, sugira que os estudantes construam a árvore de possibilidades e compartilhem os resultados possíveis com a turma. Aqui, eles também devem somar as probabilidades.

Depois, peça que compartilhem o que concluíram a respeito da soma das probabilidades nos 2 experimentos para sistematização. É esperado que percebam que o resultado é sempre igual a 1 ou 100%.

Participe

Este boxe tem o objetivo de incentivar os estudantes a explorar relações matemáticas e tirar suas próprias conclusões, como propõem a **CG02** e a **CEMAT02** da BNCC. Por isso, é importante que essa proposta seja realizada pelos estudantes com seu apoio pontual, quando for solicitado. A exploração pode ser potencializada se as atividades forem realizadas em grupos, para que os estudantes troquem suas impressões. Entretanto, se não for possível, é importante que haja um momento de discutir os raciocínios que eles tiveram ao longo do percurso. O objetivo final é que percebam que a soma das probabilidades de eventos complementares é sempre igual a 1.

Orientações didáticas

Probabilidade de não ocorrer um evento

Apresente o exemplo da probabilidade de chover e, em seguida, realize outras perguntas, como: “Se a probabilidade de sair cara em uma moeda é de 50%, qual é a probabilidade de não sair cara?”; “Se a probabilidade de sortear uma pessoa que use óculos em uma sala é de 27%, qual é a probabilidade de sortear uma pessoa que não use óculos nessa mesma sala?”.

Por fim, peça que os estudantes sistematizem esse raciocínio explicando o que entenderam a respeito da probabilidade de não ocorrência de um evento.

Atividades

Nestas atividades, é abordado o conceito de evento complementar de um espaço amostral. Auxilie os estudantes a determinar tanto o espaço amostral quanto o evento complementar.

Na atividade **19**, caso os estudantes tenham dificuldades no item **b**, peça que circulem, na árvore de possibilidades desenhada no item **a**, todas as respostas que apresentam as 3 faces iguais da moeda, que, no caso, são apenas 2 possibilidades de um total de 8.

Na atividade **20**, oriente os estudantes a desenhar a árvore de possibilidades para melhor identificar as respostas possíveis nos 2 lançamentos do dado ou sugira que façam uma tabela.

Probabilidade de não ocorrer um evento

Se os meteorologistas fizerem a previsão do tempo para amanhã e anunciarem que a probabilidade de chover é de 70%, qual é a probabilidade de não chover?

Suponha que haja apenas 2 possibilidades: chover e não chover.

Se a probabilidade de chover é 70% e a soma das probabilidades dos 2 casos possíveis é 100%, concluímos que a probabilidade de não chover é:

$$100\% - 70\% = 30\%$$

Esse é um caso de experimento aleatório com 2 resultados possíveis, mas não igualmente prováveis. A probabilidade de chover foi atribuída pelos meteorologistas levando-se em consideração experiências anteriores de observação das condições do tempo. A atribuição de probabilidades muitas vezes é feita de acordo com repetições de experimentos e cálculos de frequências relativas de ocorrência dos possíveis resultados.

De maneira geral, se em um experimento aleatório a probabilidade de um evento ocorrer é p e a probabilidade de esse evento não ocorrer é q, a soma dessas 2 probabilidades é 1 (100%). De $p + q = 1$, segue $q = 1 - p$; portanto, podemos concluir que:

> Se a probabilidade de ocorrer um evento é p, a probabilidade de não ocorrer esse evento é $1 - p$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

16. Para responder às perguntas no caderno, considere o experimento aleatório: lançar um dado não viciado e registrar o número de pontos indicado na face superior.

a) Qual é o espaço amostral desse experimento? {1, 2, 3, 4, 5, 6}

b) Qual é a probabilidade de cada resultado possível? $\frac{1}{6}$

c) Qual é a soma das probabilidades de todos os resultados possíveis? 1

d) Qual é a probabilidade de ser obtido um número ímpar de pontos? $\frac{1}{2}$

17. Considere o experimento aleatório: retirar uma bola de uma sacola, não transparente, contendo 10 bolas idênticas numeradas de 1 a 10, e registrar o número da bola sorteada. Responda às perguntas no caderno, dando o resultado na forma decimal.

a) Qual é a probabilidade de o número registrado ser primo? 0,4

b) Qual é a probabilidade de o número registrado não ser primo? 0,6

18. Um envelope contém 7 etiquetas, cada uma correspondendo a um dos dias da semana. Ao sortearmos aleatoriamente uma etiqueta desse envelope, qual é a probabilidade de ser sorteado:

a) o domingo? $\frac{1}{7}$

b) um dia da semana que comece com a letra **q**? $\frac{2}{7}$

19. Considere o experimento aleatório que consiste em lançar uma moeda não viciada 3 vezes e registrar a sequência de resultados de cada lançamento. **a)** A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Faça a árvore de possibilidades e escreva o espaço amostral desse experimento.

b) Qual é a probabilidade de ser obtida a mesma face nos 3 lançamentos? $\frac{1}{4}$

20. Lançando-se 2 vezes um dado não viciado e anotando-se a sequência de pontos obtidos nos 2 lançamentos:

a) quantas são as sequências possíveis? 36 sequências.

b) qual é a probabilidade de os resultados formarem uma sequência de soma 4? $\frac{1}{12}$

21. O setor de inspeção de qualidade em uma fábrica de lâmpadas fez um teste com um lote de 400 lâmpadas produzidas em certo dia e encontrou 6 lâmpadas defeituosas. Se uma lâmpada desse lote for selecionada ao acaso, qual é a probabilidade, em porcentagem, de que ela não seja defeituosa? 98,5%

Na mídia

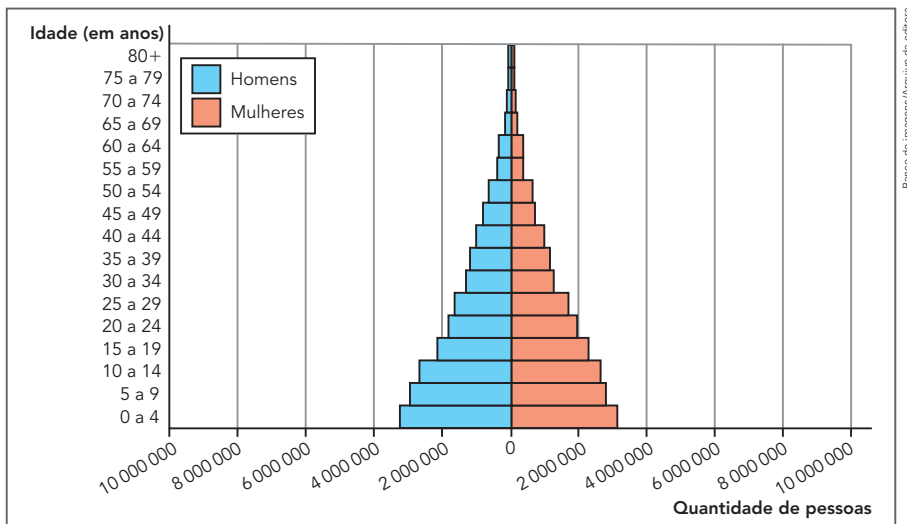
Pirâmide etária

Uma pirâmide populacional representa graficamente a composição etária e por sexo de uma população. As barras horizontais apresentam os valores absolutos ou proporções de homens e mulheres em relação ao total da população, separadamente, em cada idade. As idades podem ser individuais ou agregadas em grupos quinquenais. O somatório de todos os grupos de idade e sexo na pirâmide é igual ao total da população ou a 100% da mesma. Para efeitos de comparação espacial ou temporal, o mais usual é calcular a pirâmide, utilizando-se valores relativos. A pirâmide descreve as características de uma população. [...]

CAMARANO, Ana Amélia. A demografia e o envelhecimento populacional. Disponível em: http://www5.ensp.fiocruz.br/biblioteca/dados/txt_577264946.pdf. Acesso em: 21 mar. 2022.

A pirâmide populacional também é conhecida como pirâmide etária ou pirâmide demográfica. Nela, a base representa o grupo jovem (até 19 anos), a parte intermediária representa o grupo adulto (20 a 59 anos) e o topo, a população idosa (60 anos ou mais).

Analise as seguintes pirâmides, publicadas pelo IBGE em 2013:

Pirâmide etária absoluta – Brasil – Censo 1940

Idade (em anos): 80+, 75 a 79, 70 a 74, 65 a 69, 60 a 64, 55 a 59, 50 a 54, 45 a 49, 40 a 44, 35 a 39, 30 a 34, 25 a 29, 20 a 24, 15 a 19, 10 a 14, 5 a 9, 0 a 4

Homens / Mulheres

10 000 000, 8 000 000, 6 000 000, 4 000 000, 2 000 000, 0, 2 000 000, 4 000 000, 6 000 000, 8 000 000, 10 000 000

Quantidade de pessoas

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/. Acesso em: 18 abr. 2022.

GoodStudio/Shutterstock

Orientações didáticas

Na mídia

Na BNCC

Aproveite esta seção para desenvolver nos estudantes as habilidades de leitura de gráficos e de análise crítica em relação a dados socioeconômicos, como é proposto na **CEMAT04**. A seção também mobiliza com maior ênfase o TCT *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso*.

Se achar pertinente, proponha pesquisas a respeito da pirâmide etária de outros países, para que sejam realizadas comparações. Além disso, é possível fazer relações desta seção com a seção *Na História*, que vem a seguir e aborda historicamente o mapeamento de estatísticas relacionadas à taxa de mortalidade.

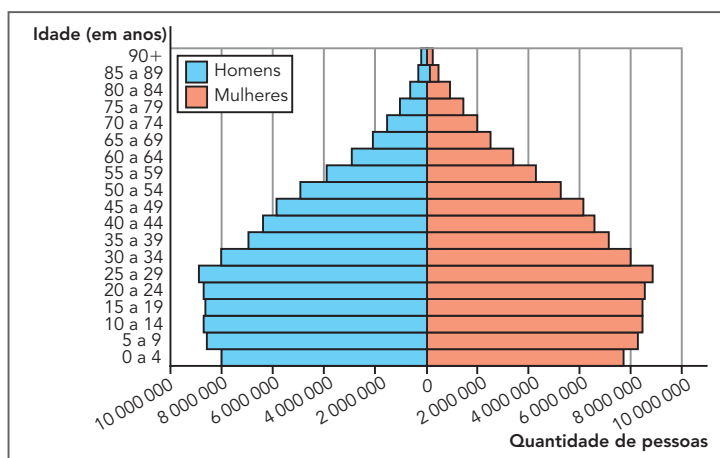
Essa exploração sobre a pirâmide etária possibilita a compreensão e o respeito às características etárias, o que contribui para o desenvolvimento da cidadania e do convívio social e para ilustrar aspectos da diversidade da população brasileira.

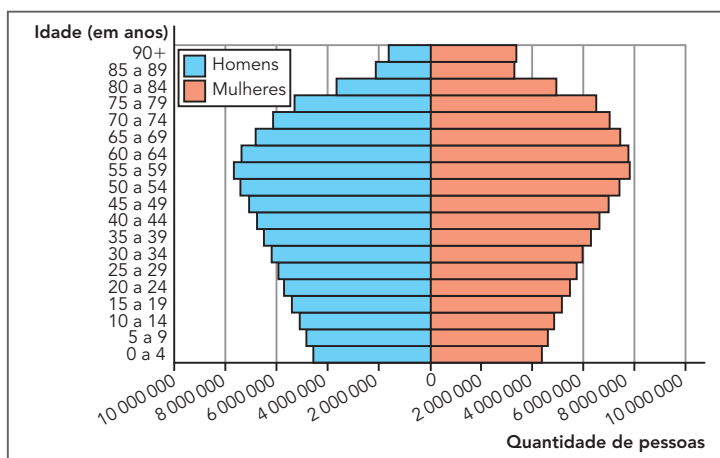
Orientações didáticas

Na mídia

Nesta seção, é possível realizar um trabalho interdisciplinar com o componente curricular **Geografia**, no qual os estudantes podem realizar pesquisas e apresentações para a turma com argumentos de quais as possíveis consequências que o país enfrentará em 2060 se o aumento da população de fato se comportar como previsto.

Pergunte aos estudantes a que gráfico estatístico a pirâmide etária mais se assemelha. Peça que reflitam de que outras maneiras esses dados poderiam estar dispostos e quais dessas disposições permitem uma melhor análise.

Pirâmide etária absoluta – Brasil – Censo 2010

Fonte dos dados: IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/. Acesso em: 18 abr. 2022.

Pirâmide etária absoluta – Brasil – Projeção para 2060

Fonte dos dados: IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/. Acesso em: 18 abr. 2022.

A idade modal da população brasileira em 1940 estava na faixa de 0 a 4 anos, porque era nessa faixa que havia mais habitantes.

Agora, responda às questões.

1. Em que faixa estava a idade modal em 2010? 25 a 29 anos.
2. Em que faixa estará a idade modal em 2060? 55 a 59 anos.
3. Em 2010, a faixa de 0 a 4 anos tinha mais homens ou mais mulheres? E a população idosa (60 anos ou mais)? Homens; mulheres.
4. No Censo de 1940, o Brasil tinha mais habitantes jovens (até 19 anos) ou idosos (60 anos ou mais)? E na projeção para 2060, terá mais jovens ou idosos? Jovens; idosos.
5. De acordo com os dados de 2010, você considera que hoje o Brasil é um país jovem? Debata com os colegas. Resposta pessoal.

Na História

Faça as atividades no caderno.

Estatísticas e Estatística

Quando, na análise de uma partida de futebol, um comentarista esportivo diz que o time A chutou 20 vezes a gol e acertou 8 desses chutes, ao passo que o time B chutou 10 vezes a gol e acertou 6 desses chutes, e que o time A chutou 3 bolas na trave e o time B, nenhuma, ele está fazendo uma estatística do jogo. Nesse caso, a palavra "estatística" está sendo usada em seu sentido mais simples.

Há, contudo, uma ciência chamada **Estatística**, de fundamental importância no mundo moderno, cujo objetivo é produzir e analisar dados e fazer inferências nos mais diversos campos do conhecimento. Mas essa ciência demorou a ser fundada: de fato, embora a Geometria, como ciência organizada, date do século IV a.C., aproximadamente, a história da Estatística como ciência começou somente no século XVII. Isso não quer dizer, porém, que antes dessa época não se coletassem dados numéricos – em particular, sobre populações e suas condições de existência.

Um exemplo que ilustra essa etapa preliminar da Estatística bem conhecido é o édito (um tipo de anúncio de lei) baixado pelo imperador romano César Augusto (27 a.C.–14 d.C.) determinando que se fizesse um censo de "todo o mundo". Entenda-se: todo o mundo, então, sob o domínio romano.

Mas o marco inicial da Estatística como ciência só seria lançado no século XVII, por John Graunt (1620-1674), um próspero comerciante inglês, em sua obra *Observações naturais e políticas feitas com base nos Boletins de mortalidade*, de 1662, na qual, pela primeira vez na história, se usaram, com fundamentação, massas de dados para inferências estatísticas.

A atenção de Graunt para esse assunto foi despertada pelos *Boletins de mortalidade*, originalmente relatórios semanais e anuais do número de sepultamentos em várias paróquias londrinas. O objetivo inicial desses boletins, que começaram a ser compilados no ano de 1532, era manter um registro que permitisse acompanhar o andamento da peste (termo usado para designar diversas doenças epidêmicas muito comuns e que matavam muitas pessoas na época). Em 1563, os *Boletins* passaram a abranger toda a cidade de Londres, mas somente em 1625 começaram a ser publicados com regularidade. Inicialmente, as causas das mortes eram divididas em apenas dois tipos: doenças e acidentes. Com o tempo, porém, os *Boletins* se tornaram mais ricos em dados. O trabalho de pesquisa era feito por voluntários, que, comparecendo ao velório, registravam o sexo do falecido, as causas do falecimento e outros dados.

Assim, tendo como referência as informações dos *Boletins* de 1604 a 1661 transformados em tabelas, Graunt escreveu a obra referida. Analisando os dados reunidos, Graunt constatou, entre outras coisas, que uma série de ocorrências tidas em geral como meramente casuais apresentavam uma regularidade surpreendente. Por exemplo: o número de nascimentos de homens era maior do que o de mulheres; as mulheres viviam mais do que os homens; o número de mortes causadas por doenças não epidêmicas era razoavelmente constante de ano para ano; na idade tida como conveniente para o casamento, o número de homens e de mulheres era aproximadamente o mesmo. A aparente contradição entre o fato de as mulheres viverem mais do que os homens, apesar de, como se sabia, elas se valerem de cuidados médicos duas vezes mais do que eles, levou Graunt a concluir que muitos homens, para ocultar sua intimidade ou por imprevidência, preferiam não recorrer a ajuda médica.

Gravura de John Graunt, considerado pioneiro do uso da Estatística nas Ciências Sociais.

Orientações didáticas

Na História

Na BNCC

Esta seção mobiliza com maior ênfase a **CG01** e a **CEMAT01** ao reconhecer a Matemática, e a Estatística, como ciência humana em constante construção coletiva.

Aproveite esta seção para proporcionar aos estudantes uma noção mais ampla a respeito de como foi realizada a construção da Estatística ao longo da história. Antes de resolver as atividades propostas, sugira a leitura do texto apresentado na seção e uma roda de conversa a respeito das impressões que os estudantes tiveram ao lê-lo.

Reflita com os estudantes a respeito da necessidade de existir uma ciência de dados e a importância disso na sociedade, uma vez que o tratamento dos dados possibilita análises para tomadas de decisão mais acertadas.

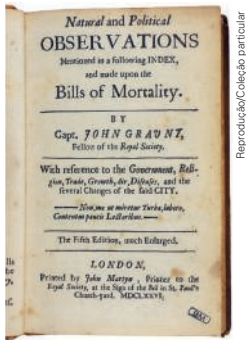
Com relação às atividades, sugira que sejam realizadas em grupos, para que haja trocas de ideias, e proporcione ao final um momento de discussão e compartilhamento das respostas.

Orientações didáticas

Na História

Caso os estudantes tenham dificuldades para resolver a atividade **1**, sugira que indiquem, por meio de setas entre uma linha e outra, a quantidade de mortes entre as faixas.

Para a atividade **2**, sugira que eles realizem uma pesquisa a respeito da época em questão e, se necessário, peça que conversem com o professor de **História**, para relacionar o texto apresentado no livro com o contexto histórico da época, como maneira de realizar um trabalho interdisciplinar.

Faça as atividades no caderno.

Reprodução/Coleção particular

Folha de rosto de uma das edições de *Observações naturais e políticas feitas com base nos Boletins de mortalidade*, de John Graunt.

Reprodução/Biblioteca Britânica, Londres, Inglaterra.

Uma das tabelas publicadas por Graunt, nas quais está anotado o número de indivíduos que faleceram segundo cada causa.

A obra de Graunt repercutiu em outros países, como a França, e ele foi eleito membro da Royal Society of London (Sociedade Real de Londres), instituição inglesa destinada à promoção do conhecimento científico. O rei Carlos II foi consultado sobre a pertinência de um comerciante integrar aquela magna casa de cientistas e sábios e, com muito senso de justiça, não vacilou em aprovar a eleição.

Fontes dos dados: VIEIRA, Sonia. *Estatística básica*. São Paulo: Cengage Learning, 2012; PEREIRA, Wlademir *et al. Estatística para as Ciências Sociais*. São Paulo: Saraiva, 1980.

1. Um importante estudo feito por Graunt, a partir dos *Boletins de mortalidade*, envolve a sobrevivência humana por faixas de idade. Com os dados disponíveis e algumas estimativas, ele construiu a tabela a seguir.

Sobrevivência humana por faixas de idade

Idade (em anos)	Número de sobreviventes
0	100
6	64
16	40
26	25
36	16
46	10
56	6
66	3
76	1

Fonte dos dados: GRAUNT, John. *Observações naturais e políticas feitas com base nos Boletins de mortalidade*. Londres, 1662.

a) Quanto à mortalidade, como você interpreta os dados das duas primeiras linhas da tabela? De cada 100 pessoas, 36 morriam antes de completarem 6 anos de idade.

b) Se o número de bebês na primeira linha fosse 1 000, qual seria o número estimado de mortos de 0 a 6 anos de idade? E de 0 a 16 anos? 360 mortos e 600 mortos.

c) Calcule o porcentual de mortos de cada faixa de idade em relação à faixa anterior. 36%; 37,5%; 37,5%; 36%; 37,5%; 40%; 50%; 67%.

d) De acordo com a tabela de Graunt, qual era a porcentagem de sobreviventes aos 76 anos de idade naquela época? 1%

2. A que pode ser atribuído o fato de, na idade considerada, na época, apropriada para o casamento, o número de mulheres ser praticamente igual ao de homens, embora nascessem mais homens que mulheres?
Possivelmente às condições de trabalho dos homens, que envolviam mais riscos, e à violência, particularmente das guerras.

Na Unidade

Faça as atividades no caderno.

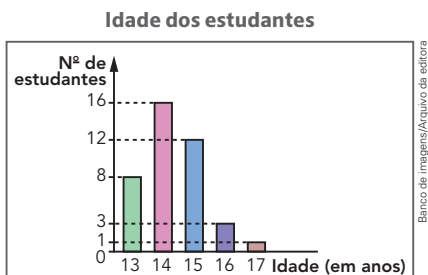
Para resolver as atividades **1** a **3**, analise o gráfico a seguir, que apresenta a idade dos estudantes de uma turma.

Idade dos estudantes

Nº de estudantes

16, 12, 8, 3, 1, 0

13 14 15 16 17 **Idade (em anos)**

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

1. Qual das alternativas mais se aproxima da média das idades dos estudantes? Alternativa **a**.

a) 14 anos e 4 meses
b) 14 anos e 7 meses
c) 14 anos e 10 meses
d) 15 anos

2. Qual é a idade mediana da turma? Alternativa **b**.

a) 13,5 anos
b) 14 anos
c) 14,5 anos
d) 15 anos

3. Os estudantes que têm a idade modal representam: Alternativa **c**.

a) 20% da turma.
b) 30% da turma.
c) 40% da turma.
d) 50% da turma.

4. (Enem) Uma pessoa está disputando um processo de seleção para uma vaga de emprego em um escritório. Em uma das etapas desse processo, ela tem de digitar oito textos. A quantidade de erros dessa pessoa, em cada um dos textos digitados, é dada na tabela.

Texto	Número de erros
I	2
II	0
III	2
IV	2
V	6
VI	3
VII	4
VIII	5

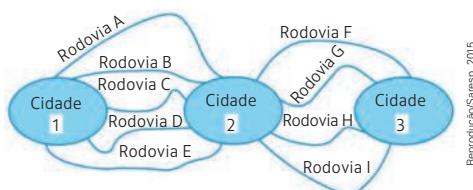
Dados elaborados pelo Enem.

Nessa etapa do processo de seleção, os candidatos serão avaliados pelo valor da mediana do número de erros.

A mediana dos números de erros cometidos por essa pessoa é igual a: Alternativa **b**.

a) 2,0.
b) 2,5.
c) 3,0.
d) 3,5.
e) 4,0.

5. (Saresp) Há 5 rodovias ligando as cidades 1 e 2, e há mais 4 rodovias que ligam as cidades 2 e 3, conforme ilustra a figura a seguir.

Rodovia A, Rodovia B, Rodovia C, Rodovia D, Rodovia E, Rodovia F, Rodovia G, Rodovia H, Rodovia I, Cidade 1, Cidade 2, Cidade 3

Reprodução/Saresp, 2015.

Uma maneira de chegar à cidade 3 partindo da cidade 1 é, por exemplo, tomar a rodovia A e depois tomar a rodovia F. De quantas maneiras diferentes um motorista pode partir da cidade 1 e chegar até a cidade 3, passando pela cidade 2? Alternativa **c**.

a) 15 **b)** 18 **c)** 20 **d)** 24

6. (Enem) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20? Alternativa **c**.

a) $\frac{1}{100}$ **b)** $\frac{19}{100}$ **c)** $\frac{20}{100}$ **d)** $\frac{21}{100}$ **e)** $\frac{80}{100}$

7. (Saresp) Um estojo de maquiagem tem 12 tonalidades de batom, sendo 3 tonalidades cintilantes e as restantes, cremosas. A probabilidade de se retirar, ao acaso, desse estojo um batom cintilante é: Alternativa **b**.

a) 30%. **b)** 25%. **c)** 10%. **d)** 20%.

8. (Unicamp-SP) Um caixa eletrônico de certo banco dispõe apenas de cédulas de 20 e 50 reais. No caso de um saque de 400 reais, a probabilidade de o número de cédulas entregues ser ímpar é igual a: Alternativa **b**.

a) $\frac{1}{4}$. **b)** $\frac{2}{5}$. **c)** $\frac{2}{3}$. **d)** $\frac{3}{5}$.

9. O diretor de uma escola, na qual estão matriculados 280 estudantes no período da manhã e 320 no período da tarde, gostaria de conhecer as condições de vida extraescolar dos estudantes. Para esse levantamento, ele resolveu fazer uma pesquisa amostral com 30 estudantes matriculados. Obtenha a quantidade de estudantes de cada período nessa amostra de modo que ela represente proporcionalmente todos os matriculados na escola.
14 estudantes do período da manhã e 16 do período da tarde.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02**, ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade, possibilitando que elas sejam utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

Para verificar se os estudantes conseguem obter valores de medidas de tendência central e amplitude dos dados de uma pesquisa estatística, sugerimos as atividades **1** a **4**. Em caso de dúvidas, retome os conceitos abordados no capítulo **17**.

Na atividade **5**, é verificado se o estudante consegue aplicar o princípio fundamental da contagem. Corrija a atividade na lousa, de modo que a turma construa coletivamente os passos de resolução.

As atividades **6** a **8** estão relacionadas ao cálculo da probabilidade de eventos. Erros de resolução podem indicar eventuais dificuldades na interpretação dos dados dos problemas. Peça aos estudantes que leiam as atividades pausadamente e que anotem as principais informações, para então definir as estratégias de resolução.

Dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Respostas

UNIDADE 1

Capítulo 1

Atividades

1. a) Não.

b) Porque 15 é a representação no sistema de numeração decimal, e XV, no sistema de numeração romano.

2. a) 1

b) Dezena de milhão.

c) É múltiplo de 5, pois na divisão por 5 o resultado é 0. Não é múltiplo de 2 porque não é par, nem de 3 porque a soma dos algarismos é 43, e 43 não é múltiplo de 3.

3. a) 100 números.

b) 100 números.

4. a) São eles: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...; são chamados números pares.

b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

5. a) É um número natural maior do que 1, divisível apenas por 1 e por ele mesmo.

b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

6. a) 6 modos.

b) 10 modos.

7. a) Não.

b) Sim.

c) Sim, o número 17.

8. Números cujo mdc é igual a 1, como os números 4 e 9.

9. a) Se o número for divisível por 3 e por 4, será divisível por 12.

b) Se o número for divisível por 3 e por 5, será divisível por 15.

c) Por 12: 2 016 e 2 028; por 15: 2 025.

10. 22 números.

11. a) (3, 12, 48, 192, ...)

b) $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$

c) $\left(3, 4, \frac{16}{3}, \frac{64}{9}, \ldots\right)$

12. 144

13. a) 0

b) −3

c) 4

d) 0

14. a) 8

b) 8

c) 15

d) 15

e) 0

f) 1

g) 7

h) 9

15. a) −50

b) −1, −1.

c) −25

d) 25

e) 13

f) Positivo.

g) Negativo.

Explicações pessoais.

16. a) 2,9

b) 28,74

c) 0,037

d) 1,6

e) 8,5

f) −1,64

g) 1,666...

h) −1,1666...

i) 0,375

j) 2,666...

k) −0,45

l) −2,2222...

17. a) $\frac{57}{100}$

b) $\frac{32}{25}$

c) $\frac{25}{8}$

d) $-\frac{125}{4}$

18. Alternativas **a**, **c** e **d**.

20. a) $2^6 \cdot 5$

b) Decimal exato, porque o denominador só tem os fatores primos 2 e 5.

21. a) Três: 0, 58 e 1.

b) Seis: −111, 0, 58, −4, −17 e 1.

c) Todos.

d) −111

22. a) 342

b) 7

c) 89

23. $\frac{2}{3}$

24. $\frac{29}{9}$

25. a) $\frac{542}{99}$

b) $\frac{104}{333}$

26. a) $\frac{7}{9}$

b) $\frac{35}{9}$

c) $\frac{278}{45}$

d) $\frac{35}{6}$

e) $\frac{302}{33}$

f) $-\frac{679}{55}$

27. a) $\frac{7}{10}$

b) $\frac{33}{100}$

c) $\frac{1\,333}{1\,000}$

d) $\frac{521}{100}$

e) $\frac{7}{3}$

f) $\frac{17}{5}$

28. a) $\frac{17}{6} + \frac{5}{3} = \frac{9}{2} = 4{,}5$

b) $\frac{17}{6} \times \frac{5}{3} = \frac{85}{18} = 4{,}7222\ldots$

29. a) **I.** $\frac{7}{100}$; **II.** −48; **III.** $\frac{40}{12} = \frac{10}{3}$.

b) **I.** 10; **II.** −10; **III.** 10.

c) **I.** 0,55; **II.** −30; **III.** $\frac{275}{12}$.

d) **I.** 2,01; **II.** 6; **III.** $\frac{335}{4}$.

Capítulo 2

Atividades

1. I. c; II. a; III. d; IV. b.

2. a) 100%

b) $\frac{15}{16}$; 93,75%

3. 8 400 km^2

4. a) 20%

b) 25%

5. R$ 1,93

6. 71,4%

7. 51,5

8. Resposta pessoal.

9. 12,5%

10. Aproximadamente 44,4%.

11. 8%

12. Resposta pessoal.

13. 27,2%

14. Por 1,20.

15. R$ 3,52

16. 190 800 mulheres.

17. a) R$ 459,54

b) R$ 457,41

18. R$ 5,78

19. Por 0,90.

20. 12 min

21. 128 100 candidatos.

22. a) 12,654 bilhões de litros.

b) Decréscimo de 1,4%.

23. Resposta pessoal.

24. Resposta pessoal.

Na Unidade

1. b

2. b

3. c

4. b

5. a

6. c

7. d

8. a

9. c

10. d

UNIDADE 2

Capítulo 3

Atividades

1. Cada *bit* pode ser carregado de 2 maneiras: com 0 ou com 1; como são 8 *bits*, temos: $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{8 \text{ fatores}} = 2^8$, ou seja, há 256 possíveis caracteres formados pela combinação dos dígitos 0 e 1 em 8 posições distintas.

2. a) 80 000 *bits*.

b) 81 920 *bits*.

3. a) 2^{10} cm^3

b) 2^{-4} cm^3

4. Resposta pessoal.

5. Quadro **A**

a) 343

b) $\frac{9}{4}$

c) $\frac{4}{25}$

d) 1,21

e) 1 000

f) 3,14

g) 1

h) 1

i) 0

j) 1

Quadro **B**

a) $\frac{1}{100}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{64}{27}$

d) $\frac{9}{4}$

e) 100

f) 125

g) $\frac{1}{216}$

h) 1

i) $-\frac{1}{32}$

j) $\frac{9}{10}$

6. R$ 30.720,00

7. a) 100

b) 120

c) 144

d) 172,8

8. a) 0

b) -250

9. a) 2

b) 35

c) $-\frac{19}{9}$

d) -10

e) -5

f) 0

10. a) 107 habitantes.

b) 1,07

c) $(1{,}07)^3$

d) 240 milhões de habitantes.

11. a) 50%

b) 5,0625

c) $\frac{2}{3}$ da quantidade de hoje.

12. a) 30 000 000

b) 1 200 000

c) 4 150 000 000

d) 22 200 000 000

13. a) $7 \cdot 10^5$

b) $1{,}8 \cdot 10^9$

c) $3{,}5 \cdot 10^7$

d) $2{,}95 \cdot 10^{11}$

14. $1{,}5 \cdot 10^8$ km

15. $1{,}61 \cdot 10^{11}$ reais

16. a) $1{,}1 \cdot 10^{10}$

b) Sim; não, a notação científica correta é $1{,}6 \cdot 10^8$.

17. a) $5{,}25 \cdot 10^7$

b) $3{,}256 \cdot 10^7$

c) $2{,}5 \cdot 10^4$

d) $1{,}83 \cdot 10^6$

18. 602 sextilhões.

19. a) 0,0013

b) 0,0000425

c) 0,000111

d) 0,000008

20. a) $1{,}2 \cdot 10^{-5}$

b) $7 \cdot 10^{-6}$

c) $1{,}111 \cdot 10^{-2}$

d) $2{,}22 \cdot 10^{-3}$

21. $5 \cdot 10^{-2}$; $1 \cdot 10^{3}$; $2 \cdot 10^{4}$; $5 \cdot 10^{-5}$.

22. $6{,}6 \cdot 10^{-6}$

23. a) 10^4

b) 10 000 000 ou 10^8.

24. a) $7{,}5 \cdot 10^{12}$

b) $1{,}8 \cdot 10^{3}$

c) $4{,}8 \cdot 10^{-8}$

d) $3{,}3 \cdot 10^{11}$

25. a) 10^5

b) 10^3

c) 10^4

d) 30^{-2}

e) 5^3

f) 2^4

g) 2^6

h) 10^2

26. a) Aproximadamente $9{,}5 \cdot 10^{12}$.

b) Aproximadamente $5{,}7 \cdot 10^{13}$ km.

27. a) $9{,}8^4$

b) 10^3

c) $(a \cdot b \cdot c)^{10}$

d) $a^2 \cdot x^2$

e) $(-0{,}5)^3$

f) $\frac{a^3}{8}$

g) $\frac{8a^6}{125}$

h) $(17)^{-15}$

28. a) Dividiu 1 000 g por 0,05 g.

b) $(1 \cdot 10^3) : (5 \cdot 10^{-2}) = (1 : 5) \cdot 10^{3-(-2)} = 0{,}2 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^4$

c) Dividiu 1 L por 20 000.

d) $(1 \cdot 10^0) : (2 \cdot 10^4) = (1 : 2) \cdot 10^{0-4} = 0{,}5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}$

29. a) V

b) F

c) V

d) V

e) F

f) F

30. a) Em março de 2022, eram $2{,}14 \cdot 10^8$ habitantes, segundo o IBGE (disponível em: https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/index.html; acesso em: 9 mar. 2022).

b) Em março de 2022, eram $8{,}51 \cdot 10^6$ km², segundo o IBGE (disponível em: https://www.ibge.gov.br/geociencias/organizacao-do-territorio/estrutura-territorial/15761-areas-dos-municipios.html?=&t=o-que-e; acesso em: 9 mar. 2022).

Em março de 2022, eram 25,1 hab./km².

31. 1 milhão de dias; mais de 2 000 anos.

32. a) $3{,}2 \cdot 10^6$

b) $6{,}6 \cdot 10^{-11}$

33. a) $2{,}5 \cdot 10^{-3}$

b) $9{,}9 \cdot 10^{21}$

34. a) $4 \cdot 10^3$

b) $4{,}14 \cdot 10^{11}$

c) $2{,}5 \cdot 10^{-3}$

d) $1 \cdot 10^{-10}$ (ou apenas 10^{-10})

35. a) 10 ou −10.

b) 4

c) $\frac{2}{3}$ ou $-\frac{2}{3}$.

d) 12 ou −12.

e) 3

f) $\frac{1}{2}$

g) 1

h) 0,2 ou −0,2.

Capítulo 4

Atividades

1. 2 cm; 2,5 cm; 3 cm.

2. a) 4

b) 10

c) $\frac{1}{3}$

d) 15

e) 1,5

f) 0,5

g) 1

h) 0,1

i) 0

j) 30

k) 1,3

l) $\frac{1}{9}$

3. a) 31,62

b) 38,73

4. 1 m; 1,41 m; 1,73 m; justificativa pessoal.

5. a) 7

b) $\frac{1}{2}$

c) 121

d) $\frac{1}{9}$

e) 0,16

f) 0,9

6. a) V, porque $25 > 0$ e $25^2 = 625$.

b) F, porque $2{,}5^2 = 6{,}25$.

c) V, porque $2{,}5 > 0$ e $2{,}5^2 = 6{,}25$.

d) F, porque $-25 < 0$.

7. a) 7

b) 7

8. $40 + 4\sqrt{95}$ m; 79 m aproximadamente.

9. a) $6^{\frac{1}{2}}$

b) $10^{\frac{1}{2}}$

c) $2^{\frac{1}{2}}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

10. a) 3

b) 8

c) $\frac{1}{2}$

d) 0,4

11. a) 6

b) 16

c) 1,1

d) $\frac{7}{2}$

12. Resposta pessoal.

13. a) 18

b) 36

c) 27

d) 75

14. a) Sim; $16^2 = 256$.

b) Não, pois em sua forma fatorada há expoentes que não são pares.

15. Alternativas **a** e **b**.

16. a) 625

b) 576

c) $A - B = 625 - 576 = 49 = 7^2$, logo $A - B$ é inteiro quadrado perfeito.

17. a) $\frac{15}{16}$

b) 2,4

c) $\frac{2}{33}$

d) 0,65

18. a) 5

b) 50

c) 10

d) 100

e) $\frac{1}{20}$

f) $\frac{7}{30}$

g) 0,7

h) 1,2

19. a) 19,06 cm

b) 10,70 cm

20. 1936

21. 30; explicação pessoal.

22. 42 cm

23. 72 cm^2; 8,49 cm aproximadamente.

24. Resposta pessoal.

25. 8 m

26. 15 m; 45 m.

27. 6 cm

28. a) 3 cm

b) 3,5 cm

29. 150 m

30. 4 cm

31. Resposta pessoal.

Na Unidade

1. c

2. c

3. e

4. a

5. d

6. a

7. c

8. b

9. d

10. a

UNIDADE 3

Capítulo 5

Atividades

1. $\overline{XY} \cong \overline{RS}$; $\hat{X} \cong \hat{R}$. $\overline{YZ} \cong \overline{ST}$; $\hat{Y} \cong \hat{S}$. $\overline{ZX} \cong \overline{TR}$; $\hat{Z} \cong \hat{T}$.

2. $x = 10°$ e $y = 12°$

3. $\overline{AC} \cong \overline{EC}$; $\overline{BC} \cong \overline{DC}$; $\overline{AB} \cong \overline{ED}$; $\hat{A} \cong \hat{E}$; $\hat{B} \cong \hat{D}$; $\hat{1} \cong \hat{2}$.

4. $\overline{AC} \cong \overline{CE}$; $\overline{BC} \cong \overline{DE}$; $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\hat{B} \cong \hat{D}$; $\hat{A} \cong \hat{2}$; $\hat{1} \cong \hat{E}$.

5. $\overline{AB} \cong \overline{MN}$; $\hat{A} \cong \hat{M}$; $\overline{BC} \cong \overline{NP}$; $\hat{B} \cong \hat{N}$; $\overline{AC} \cong \overline{MP}$; $\hat{C} \cong \hat{P}$.

6. $x = 16$ e $y = 8$.

8. Sim, pelo caso LAL.

9. $\hat{A} \cong \hat{F}$; $\hat{B} \cong \hat{D}$; $\hat{C} \cong \hat{E}$.

10. 30° e 60°.

11. 2 cm e $2\sqrt{3}$ cm.

13. Sim, pelo caso ALA.

14. $\overline{BC} \cong \overline{RS}$; $\overline{BA} \cong \overline{ST}$; $\overline{AC} \cong \overline{TR}$; $AC = TR = 3$ cm; $BA = ST = 5{,}2$ cm.

16. Sim, pelo caso LLL.

17. $\hat{A} \cong \hat{P}$; $\hat{B} \cong \hat{N}$ e $\hat{C} \cong \hat{M}$.

19. Sim, pelo caso LAA_o (ou ALA, calculando as medidas de $\hat{B}$ e $\hat{Q}$).

20. $\overline{AB} \cong \overline{RQ}$; $\overline{BC} \cong \overline{QP}$; $\overline{CA} \cong \overline{PR}$.

21. a) 4 cm

b) 5 cm

23. Sim, pelo caso cateto-hipotenusa.

24. $\hat{A} \cong \hat{F}$; $\hat{B} \cong \hat{G}$; $\hat{C} \cong \hat{E}$.

25. $\triangle DEF \cong \triangle GHI$; caso cateto-hipotenusa.

26. a) $1 \cong 4$, $2 \cong 6$, $3 \cong 5$; todos caso ALA.

b) $1 \cong 5$, $2 \cong 4$, $3 \cong 6$; todos caso LLL.

c) $1 \cong 5$, $2 \cong 4$, $3 \cong 6$; todos caso LAA_o.

27. a) LLL; $x = 40°$.

b) LAL; $x = 5$ cm.

c) LAL; $x = 20$ mm.

28. Demonstração pessoal.

29. a) ALA; $x = 25$.

b) ALA; $x = 15$.

Capítulo 6

Atividades

1. a) 16 cm

b) $MN = 8$ cm

2. a) $x = 7$

b) $x = 11$

3. $AB = 24$

4. c) 2,7 cm

5. d) As medidas são iguais.

6. c) O termo **afro-brasileiro** refere-se tanto ao descendente de africanos e brasileiros quanto a objetos culturais e materiais em que se observam as influências africana e brasileira.

d) Resposta pessoal.

7. $x = 15°$

8. $x = 30°$; $y = 50°$.

9. a) 110°

b) 55°

10. 20°

11. Distam igualmente de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

13. a) $x = 50°$ e $y = 80°$.

b) $x = 70°$ e $y = 40°$.

14. $x = 50°$

15. a) $x = 50°$

b) $x = 36°$

c) $x = 65°$

16. 50°, 50° e 80°.

17. $x = 85°$ e $y = 50°$.

18. $ES = 5$ cm, $C\hat{S}D$ mede 90°.

19. $x = 50°$; $y = 90°$.

20. Sim; justificativa pessoal.

21. $x = 140°$

22. $x = 80°$; $y = 20°$; $z = 60°$.

23. Os três ângulos medem 60°.

24. a) $x = 120°$

b) $x = 105°$

25. $B\hat{C}D$ mede 45° e $A\hat{B}D$ mede 105°.

Na Unidade

1. c

2. d

3. c

4. a

5. b

6. d

7. d

8. a

9. a

10. b

UNIDADE 4

Capítulo 7

Atividades

1. a) $\frac{a}{3}$

b) $2x + 5$

c) x^2

d) $x + \sqrt{x}$

e) $x^2 - 4x$

f) $n \cdot (n + 1)$

2. a) $x^2 + 3y$

b) $x^2 + y^2$

c) $(a + b)^2$

d) $\frac{b \cdot h}{2}$

e) $90° - x$

f) $2x + 2y$

4. **I.** 31; **II.** 96.

6. **I.** $a_1 = 11$ e $a_n = a_{n-1} + 4$, para $n \geq 2$. **II.** $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} \cdot 2$, para $n \geq 2$.

7. **II.** $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + n$, para $n \geq 2$. **III.** $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + n$, para $n \geq 2$.

8. a) $a_9 = 512$ e $a_{10} = 1\,024$.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

9. a) $\frac{11}{10}$

b) $a_n = \frac{n+1}{n}$, para $n \geq 1$; não recursiva.

11. a) $a_6 = \frac{7}{36}$

b) $a_6 = -20$

12. $\left(2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \frac{7}{36}, \ldots\right)$; resposta pessoal.

13. Resposta pessoal.

14. a) Resposta pessoal.

b) (2, 6, 12, 20, ...)

c) Resposta pessoal.

15. a) 36 bolinhas; 25 bolinhas pretas e 11 bolinhas vermelhas.

b) n^2; $(n - 1)^2$; $n^2 - (n - 1)^2$.

16. a) Resposta pessoal.

b) 17 quadradinhos pretos e 64 quadradinhos brancos.

17. a) $x + (x + 37) + x + (x + 37)$ ou $4x + 74$.

b) 370 m

18. 32 horas.

19. a) $x^2 + (x + 4) \cdot 2$

b) 23 cm²; 107 cm²; 56 cm²; 37,25 cm².

c) $x^2 + 2x + 8$

d) 23 cm²

e) São iguais.

20. a) $100 - 4x^2$

b) 96 m²

21. $x = -2$

22. R$ 23,30

23. Resposta pessoal.

25. a) $\frac{ab - a^2}{3b - a}$

b) 0,125

26. a) 25

b) 3

c) 0,25

d) 36

e) $\frac{22}{7}$

27. Não. Porque não existe divisão por zero.

28. $x = 2$

30. 252

31. a) Binômio.

b) Binômio.

c) Monômio.

d) Trinômio.

e) Monômio.

32. a) 6

b) -12

c) $\frac{3}{5}$

d) 1

e) -1

f) $\frac{1}{4}$

33. a) $11x$

b) $4y$

c) $-\frac{3}{2}xy$

d) $8x^2$

e) $6xy$

f) $-\frac{17}{20}ax$

34. a) $3x + 3$; $+3$.

b) $7x + 4$; $+4$.

c) $2a + 2b$; o termo independente é igual a zero.

d) $4x + 2y$; o termo independente é igual a zero.

35. $4n + 1$

36. a) $5a^2$; $12a$.

b) $2x^2 + y^2 + yx$; $6x + 4y$.

37. a) $9x^2 - 3x + 1$; grau 2.

b) $4x - 1$; grau 1.

c) $5x^3 + x^2 + 12x - 3$; grau 3.

38. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

39. Grau 5; -1.

Capítulo 8

Atividades

1. $p + 10q$ e $p + 12q$; $2p + 22q$.

2. a) **A**: $n^2 + n + 1$; **B**: $3n^2 + n - 1$.

b) $4n^2 + 2n$; resposta pessoal.

3. a) $n + 3 + 2n + 2n + 1 = 5n + 4$

b) $x + 2x + x + 4 + 3x - 1 = 7x + 3$

4. a) $x^2 + 6x + 1$

b) $5x^2 + 1$

5. a) $3x^2 + 2x - 4$

b) $9x$

c) $x^2 + 5x$

6. a) $-3x - 4y - 5$

b) $-a + 3b + c$

c) $-5x^2 + 3x - 1$

7. a) $x + y + 2$

b) $-3x^2 + 5x - 2$

8. $-2a + 3b - 4c$

9. $Q - P = 4x^2 - 3x - 11$

10. $4x - 10°$

11. a) Não, conservamos todos os sinais.

b) Sim, trocamos todos os sinais.

12. a) $5x + 2$

b) $-3x^2 + \frac{7}{15}$

c) $3a - 2ab + 3b$

13. a) $-x^2 + 4x + 2$

b) $-3x^2 + 6x + 6$

14. Conservamos; adicionamos.

15. a) $30x$

b) $12a^3$

c) $-4x^3$

d) $5x^4y^2$

16. a) $6x + 8$

b) $6x^2 - 3x - 9$

c) $8x^2 + 20x$

d) $-2x^4 + 2x^3 - 8x^2$

17. a) $2x^2 + x$

b) $4x^2 + 11x + 6$

18. a) $8x^2 + 14x + 3$

b) $3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 12x - 2$

c) $10a^2 + 13ab - 3b^2$

d) $2x^3 - 9x^2 + 19x - 15$

19. a) $6x^2 + 7x - 5$

b) $3x^3 + 11x^2 + 20x - 8$

20. a) 5; 8.

b) 0 ou 1 ou 2 ou 3 (ou não tem grau); 6.

21. $x^4 - 81$

22. a) $12x + 7$

b) $7x^2 + 7x + 1$

c) $-7x^2 - 14x + 26$

23. a) $22x^2 + 20x + 4$

b) $6x^3 + 7x^2 + 2x$

24. $6x^2 + 13x + 3$

25. 0

26. a) $9x^2 + 6x + 1$

b) $4a^2 - 12ab + 9b^2$

c) $4a^2 + 4ab - 20a + b^2 - 10b + 25$

d) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

27. Conservamos; subtraímos.

28. $5x^3y^2$

29. a) $3x^2$

b) $-7a$

c) $7xy$

d) $4ab^2$

30. a) $2a^3 - a^2 + 4$

b) $3x^4 - 4x^3 + 6x - \frac{1}{3}$

Na Unidade

1. b

2. c

3. c

4. d

5. b

6. a

7. c

8. e

9. c

UNIDADE 5

Capítulo 9

Atividades

1. a) $x = 8$ cm

b) 14 cm; 15 cm (ou vice-versa).

2. a) **I**. convexo; **II**. côncavo; **III**. convexo; **IV**. côncavo.

c) Ficou "fora" do quadrilátero.

3. a) Resposta pessoal

b) Sim; os triângulos *CID* e *CDA*.

5. a) $x = 110°$

b) $x = 30°$

c) $x = 70°$

d) $x = 30°$

6. a) $x = 35°$

b) $x = 70°$

7. a) $x = 70°$

b) $x = 100°$

c) $x = 110°$

8. a) $x = 100°$; $y = 130°$.

b) $x = 120°$; $y = 60°$.

c) $x = 45°$; $y = 90°$.

9. $med(\hat{T}) = 60°$; $med(\hat{I}) = 45°$; $med(\hat{C}) = 135°$; $med(\hat{O}) = 120°$

10. a) $x = 120°$; $y = 60°$.

b) $x = 50°$; $y = 130°$.

c) $x = 40°$; $y = 20°$.

11. a) 45°; 135°; 45°; 135°.

b) 90°; 90°; 80°; 100°.

12. $med(\hat{A}) = 91°$; $med(\hat{B}) = 170°$; $med(\hat{C}) = 18°$; $med(\hat{D}) = 81°$.

13. a) Sim, pois um retângulo é um quadrilátero com os 4 ângulos retos.

b) Não, pois um losango nem sempre tem os ângulos medindo 90°.

14. Trapézio escaleno é um trapézio com os 4 lados de medidas diferentes.

Capítulo 10

Atividades

2. 45°; 135° e 45°.

3. a) $x = 25$ cm

b) $x = 10$ cm

4. a) 8 cm, 16 cm, 8 cm e 16 cm.

b) 4 cm, 12 cm, 4 cm e 12 cm.

c) 21 cm, 7 cm, 21 cm e 7 cm.

d) 5 cm, 7 cm, 5 cm e 7 cm.

e) 10 cm, 11 cm, 10 cm e 11 cm.

5. 8 cm e 10 cm.

6. 90°

7. 34 cm

10. a) $x = 55°$; $y = 55°$.

b) $x = 25°$; $y = 65°$.

12. a) 20 cm

b) Os dois são isósceles.

13. $x = 25°$

14. 60° e 30°.

17. a) $x = 150°$; $y = 15°$.

b) $x = 32°$; $y = 116°$.

19. 104°; 76°; 104°; 76°.

20. 60°

21. 60°; 120°; 60°; 120°.

23. a) $x = y = 45°$

b) $x = 90°$; $y = 45°$.

24. a) Certa, pois um quadrado é também um paralelogramo.

b) Errada, pois existem paralelogramos que não possuem os 4 ângulos iguais.

c) Errada, pois existem retângulos cujas diagonais não são perpendiculares.

d) Certa, pois um quadrado é também um retângulo.

e) Errada, pois existem retângulos que não possuem todos os lados congruentes.

f) Errada, pois existem losangos que não possuem ângulos retos.

g) Certa, pois um quadrado é também um losango.

h) Certa, pois todo quadrado é paralelogramo, retângulo e losango.

25. $\frac{4}{3}$

26. $med(\hat{A}) = 45°$; $med(\hat{B}) = 36°$; $med(\hat{C}) = 144°$; $med(\hat{D}) = 135°$.

27. a) $med(\hat{A}) = med(\hat{B}) = 20°$; $med(\hat{C}) = med(\hat{D}) = 160°$.

b) $med(\hat{A}) = med(\hat{B}) = 55°$; $med(\hat{C}) = med(\hat{D}) = 125°$.

28. a) 130°

b) 100°

c) 125°

31. 50°; 50°; 130°; 130°.

32. $AP = 20$ cm; $PO = 7$ cm; $OT = 6$ cm; $AT = 8$ cm.

33. 10 cm

34. a) $x = 4$; medida de perímetro: 20.

b) $x = 5$; medida de perímetro: 20.

35. a) $x = 60°$

b) $x = 2$

36. O paralelogramo.

37. 17 cm

38. 38 cm

39. O losango.

40. $x = 70°$; $y = 80°$; $z = 24$ cm.

41. 24 cm e 36 cm.

42. a) $x = 4$

b) $x = 3$; $y = 2$.

43. $x = 18$ cm; $y = 110°$; $z = 120°$; medida de perímetro: 82 cm.

44. 16 cm e 12 cm.

45. 90 cm^2

46. Resposta pessoal.

Na Unidade

1. a

2. a

3. e

4. c

5. c

6. e

7. e

8. c

9. d

10. b

UNIDADE 6

Capítulo 11

Atividades

1. $\frac{133}{8}$

2. $\frac{1386}{97}$

3. 180 candidatos.

4. 140 km

5. a) Leandro.

b) R$ 1.600,00

6. a) $(4,81 + 2,42x)$ reais.

b) 8 quilômetros.

7. a) $(2\,500 + 2,50x)$ reais.

b) 3 000 unidades.

8. R$ 1.250,00

9. R$ 1.800,00

10. 14 L

11. R$ 540,00

12. R$ 20.000,00

13. 8 funcionários.

14. 10 funcionários.

15. 18 anos.

16. 350 páginas.

17. 14 400 L

18. Aline: 106 votos; Clarice: 53 votos; Mônica: 35 votos.

19. 4 cm

20. 60 cm

21. a) C

b) D, F.

22. a) $0x = 1$ (impossível)

b) $x = 0$

c) $x = 1$

d) $0x = 0$ (indeterminada, pois x pode ser qualquer número)

e) $0x = -2$ (impossível)

f) $x = 0$

23. Para nenhum número inteiro.

24. Qualquer número.

25. a) $S = \{8\}$

b) $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

c) $S = \varnothing$

d) Qualquer número racional x é solução da equação.

26. a) $3x = 15$

b) $S = \{5\}$; 5 anos.

Capítulo 12

Atividades

1. 72 e 39.

2. 13 meninos; 19 meninas.

3. a) $x = -1; y = 4$.
b) $x = 5; y = 3$.
c) $a = 3; b = 2$.
4. 6 garçons; 16 garçonetes.
5. a) Resposta pessoal.
b) $x = 2; y = -8$.
6. a) $a = 2; b = 0$.
b) $x = 0; y = 4$.
7. 7 mesas; 13 mesas.
8. a) 1 015 pessoas.
b) Resposta pessoal. Em geral, as temáticas retratam a realidade social dos jovens negros e pobres da periferia das médias e grandes cidades.
c) Resposta pessoal.
9. $\frac{36}{66}$
10. a) $x = 5; y = 2$.
b) $x = -1; y = 3$.
11. 17 meninas e 13 meninos.
12. 42 cédulas de R$ 10,00 e 63 cédulas de R$ 50,00.
13. Melancia: R$ 15,00; abacaxi: R$ 6,00.
14. a) $x = 9; y = 2$.
b) $x = 4; y = 2$.
c) $x = -1; y = -2$.
d) $a = \frac{12}{5}; b = \frac{16}{5}$.
15. a) Márcio: R$ 1.600,00; Marcelo: R$ 1.320,00.
b) Márcio: R$ 480,00; Marcelo: R$ 320,00.
16. a) $x = 6; y = 11$.
b) $x = -3; y = 2$.
c) $x = 10; y = 4$.
d) $x = \frac{10}{3}; y = -\frac{1}{3}$.
17. $x = 102; y = 66$.
18. a) $x = \frac{1}{6}; y = 0$.
b) $x = 10; y = -12$.
19. 419 do modelo esporte e 368 do modelo clássico.
20. 171 caixas de Lava Azul e 57 caixas de Lava Verde.
21. a) 70 e 40.
b) $\frac{99}{63}$
c) $\frac{57}{95}$
22. 35 cavalos e 62 galinhas.
23. 38 anos; 2 anos.
24. Resposta pessoal.
25. Resposta pessoal.
26. A = R$ 179,82; B = R$ 0,00; C = R$ 609,82; salário líquido de Isabela: R$ 1.590,18.
27. $(1, 1)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.
28. Resposta pessoal.
29. Resposta pessoal.
30. 107
31. a) $y = 6$
b) $x = -21$
c) Resposta pessoal.
32. **A-II**; **B-III**; **C-IV**; **D-I**.
33. $x = -\frac{1}{3}$
34. $P(2, 3)$; $Q(3, 1)$; $R(1, -3)$; $S(-3, -2)$; $T(-2, 1)$; $U(-1, 3)$; $V(0, 2)$; $W(1, 0)$.
36. a) Helena.
b) Sérgio.
37. b) Resposta pessoal.
39. a) 240 km
b) 60 km
40. a) Dois.
42. b) (2, 2)
43. (2, 3)
44. Alternativa **b**.
45. a) (7, 4)
b) (−2, −4)
c) (−2, −3)
46. b) Não.
c) $x = 2,9; y = 2,1$.
47. $x = \frac{28}{11}; y = \frac{12}{11}$.
48. a) Impossível.
b) Determinado.
c) Indeterminado.
49. Impossível.
50. a) 16
c) Nenhuma; paralelas.
51. a) Uma.
b) Nenhuma.
c) Infinitas.
d) Uma.
52. a) Impossível.
b) Impossível.
c) Indeterminado.

Na Unidade

1. a
2. c
3. b
4. a
5. a
6. c
7. c
8. c
9. b
10. b

UNIDADE 7

Capítulo 13

Atividades

5. a) 1,5 cm
b) 1,5 cm
c) 1,5 cm
d) Sim.
e) O ponto O; 1,5 cm.
6. Pontos internos à circunferência.
7. a) Interno.
b) Externo.
c) Pertencente.
8. a) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$.
b) $\overline{CD}$ e $\overline{AC}$.
c) $\overline{AC}$
13. $x = 6$
14. a) Externa.
b) Secante.
c) Externa.
d) Tangente.
e) Externa.
f) Secante.

15. a) 4 ângulos retos.

b) $OA = OB$ e $OM < OA$.

16. $x = 18°$

18. $x = \frac{4}{9}$ cm

19. $x = 20°$

21. a) Secantes.

b) Tangentes.

c) Concêntricas.

22. 18 cm e 10 cm.

23. b) 1,5 km

24. 12 cm, 18 cm, 24 cm ou 30 cm.

25. 18 cm e 12 cm.

26. É tangente a ambas.

27. a) Externas.

b) C_1 tangente interna a C_2.

c) Secantes.

d) Tangentes externas.

e) C_1 interna a C_2.

f) Secantes.

28. a) 0 ponto.

b) 1 ponto.

c) 2 pontos.

d) 1 ponto.

29. 12 cm

30. a) 0 ponto.

b) 4 pontos.

c) 2 pontos.

d) 3 pontos.

e) 1 ponto.

31. a) 10

b) 21

32. 8 cm e 3 cm.

33. 24 cm e 42 cm.

34. 2 cm, 3 cm e 4 cm.

35. a) $med(A\hat{O}B) = 60°$; $med(\overset{\frown}{AB}) = 60°$;

$med(\overset{\frown}{AXB}) = 300°$.

b) $med(A\hat{O}B) = 120°$; $med(\overset{\frown}{AB}) = 120°$;

$med(\overset{\frown}{AXB}) = 240°$.

36. a) $x = 100°$

b) $x = 80°$

c) $x = 280°$

37. 45°

38. a) $med(A\hat{O}C) = 80°$; $med(A\hat{O}B) = 130°$.

b) $med(\overset{\frown}{AB}) = 130°$; $med(\overset{\frown}{EF}) = 150°$;

$med(\overset{\frown}{DE}) = 130°$; $med(\overset{\frown}{HI}) = 150°$.

Capítulo 14

Atividades

1. a) T

b) T

c) R

d) E

e) E

f) A

3. c) Resposta pessoal.

9. Retângulo de lados medindo 4 cm e 3 cm. Idem.

10. a) Não.

b) Não.

c) Não.

12. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

Na Unidade

1. $OA = 12$

2. $x = 10$

3. 4 m, 8 m e 21 m.

4. a) 4 tangentes.

b) 3 tangentes.

c) 1 tangente.

d) 2 tangentes.

e) 0 tangente.

5. d

6. d

7. e

8. Mediatriz, pois a mediatriz do segmento de reta formado pelos pontos A e B é uma reta perpendicular que passa pelo ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$, dividindo-o em duas partes equidistantes do ponto médio, que será o local onde a via férrea deve ser construída.

10. 44°

UNIDADE 8

Capítulo 15

Atividades

1. a) 17,64 m²

b) 15,3 m²

2. 4 800 cm²

3. Aproximadamente 79 130 hectares.

4. 12 cm; 6 cm.

6. 18 cm²

7. 362,5 m²

8. 56,8 m²

9. a) 9 cm²

b) 56 cm²

10. 50 m²

11. O terreno **2**, pois a área dele mede 139,65 m², enquanto a área do terreno **1** mede 139,5 m².

12. Resposta pessoal.

13. a) 24 m²

b) 40 m²

14. a) 40 m²

b) 18 m²

15. a) 24 u.a.

b) 21,5 u.a.

c) 304 cm²

16. Resposta pessoal.

17. Resposta pessoal.

18. Aproximadamente 62,8 cm.

19. Aproximadamente 37,68 cm.

20. Aproximadamente 31,4 cm.

21. Aproximadamente 19,11 cm.

22. $\frac{5\text{ m}}{2\pi} \simeq 0{,}8$ m

23. 50%

24. a) 25π cm² $\simeq$ 78,5 cm²

b) 4π cm² $\simeq$ 12,56 cm²

c) 16π m² $\simeq$ 50,24 m²

25. 9π cm² $\simeq$ 28,26 cm²

26. $11(\pi + 2)$ m $\simeq$ 56,54 m; $\frac{121\pi \text{ m}^2}{2} \simeq 189{,}97$ m²

27. 3π cm² $\simeq$ 9,42 cm²

28. 25π cm² ≃ 78,5 cm²

30. Resposta pessoal.

31. a) 24π cm³ ≃ 75,36 cm³

b) 250π cm³ ≃ 785 cm³

c) 300π cm³ ≃ 942 cm³

32. 9π L ≃ 28,26 L

33. Aproximadamente 2,8 cm.

34. 5 galões; aproximadamente 18 dm³ e aproximadamente 3,6 dm³.

35. As medidas de capacidade são praticamente iguais, mas no copo cabe um pouco mais. A medida de capacidade do copo é, aproximadamente, 452 mL.

36. Aproximadamente 549 500 000 m³ e aproximadamente 549 500 000 000 L.

37. 180 pés.

38. Aproximadamente 6 m²; aproximadamente 1 125 L.

39. Resposta pessoal.

40. Resposta pessoal.

Capítulo 16

Atividades

1. a) 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3.

c) $v = 0,5 \cdot t$

d) Sim, porque a razão $\frac{v}{t}$ é constante para cada t positivo.

e) 720 litros.

2. 0; 60; 120; 180; 240; 300; 360.

c) $y = 60x$

d) Sim, porque a razão $\frac{y}{x}$ é constante para cada t positivo.

e) R$ 132,00

3. a) 12 000; 24 000; 36 000; 48 000.

c) $y = 4\,000t$

d) 7,5 h (7 horas e meia)

6. Resposta pessoal.

7. a) Inversamente proporcionais, porque, aumentando-se a quantidade de pessoas, a medida de tempo diminui proporcionalmente (por exemplo, dobrando-se a quantidade de pessoas, a medida de tempo diminui pela metade).

c) $nt = 80$

e) 5 h

f) 20 pessoas.

8. a) 300 minutos (5 h).

b) 120 minutos (2 h).

c) Aproximadamente 86 minutos.

9. 10, 20, 25, 50, 100.

10. Resposta pessoal.

11. 900, 1 600, 2 500, 3 600, 400, 225, 144, 100.

12. 440, 248, 159, 110, 44, 25, 16 e 11.

13. Sim; não; a quantidade de ladrilhos é inversamente proporcional à medida de área do ladrilho.

14. Resposta pessoal.

15. $V = x^3$

a) Não.

b) Não.

Na Unidade

1. c

2. a

3. d

4. e

5. 12 kg

6. b

7. 23 dias.

8. Resposta pessoal.

9. Resposta pessoal.

UNIDADE 9

Capítulo 17

Atividades

1. 40 unidades.

2. 55 min 5 s

3. 4,5; 7.

4. R$ 50.400,00

5. R$ 3,00

6. a) 1 141,546

b) Aproximadamente 1,83%.

7. A terceira.

8. Aproximadamente 1,82 m.

9. R$ 2.408,00

10. Qualquer variável que aumentar causará o mesmo efeito no IDH.

11. a) 12

b) 20

c) 30

d) 10

12. É menor. Médias aritméticas:

a) 12,5

b) 20,5

c) 37,5

d) 50,5

13. Quadruplicou.

14. Aumentou 1,6 em média.

15. Instituição de Ensino Superior **I**: 6,58750; Instituição de Ensino Superior **II**: aproximadamente 6,85262.

16. 0,89 microcomputador.

17. 2,9 TVs.

18. 1,7 pessoa.

19. 4,52 pessoas.

20. 2,77 banheiros.

22. b) 0 e 1.

c) 1

d) Aproximadamente 0,74 gol.

23. a) R$ 3.460,00

b) R$ 1.600,00

c) A mediana.

24. a) 5,5

b) 5,47

25. a) 26 anos.

b) 25,5 anos.

c) Não existe moda.

26. A moda.

27. 24 cm

28. a) A: 7,5 ; B: 4,5.

b) B

c) 7,5

29. a) Brasil.

b) Brasil.

c) França.

30. a) Resposta pessoal.

b) Se não houver uma razão aparente que justifique esse consumo, é preciso examinar se há desperdício de água por algum vazamento e fazer os reparos necessários.

Capítulo 18

Atividades

1. Respostas pessoais.

2. Respostas pessoais.

3. Respostas pessoais.

4. a) Junho.

b) Sim; 140 camisetas.

c) 2 808 camisetas.

d) 312 camisetas.

e) Março, abril, julho, agosto e setembro.

f) 120 camisetas.

5. Resposta pessoal.

6. a) R$ 1.200,00

b) 28%

c) R$ 420,00

7. a) 40 estudantes.

b) 2,3

8. Resposta pessoal.

9. a) 54 km/h

10. a) Resposta pessoal. As medidas de altura teriam que ser organizadas em uma tabela de frequência por classes.

b) Os dados relativos à numeração de calçados poderiam ser apresentados em um gráfico de barras, e os relativos às medidas de altura, em um histograma.

11. Resposta pessoal.

Capítulo 19

Atividades

1. 24 modos.

2. a) 1, 3, 5, 7, 9; são 5.

b) 5 possibilidades.

c) 5 possibilidades.

d) 5 possibilidades.

e) 125 possibilidades.

3. 60 números.

4. a) 12 possibilidades.

b) 16 possibilidades.

5. a) 4 sequências.

b) 8 sequências.

c) 16 sequências.

6. 27 modos.

7. a) 11 340 modos.

b) 14 520 modos.

8. Resposta pessoal.

9. Resposta pessoal.

10. Resposta pessoal.

11. Resposta pessoal.

12. Resposta pessoal.

13. Resposta pessoal.

14. Resposta pessoal.

15. a) 0,09 e 0,91.

b) 1

16. a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $\frac{1}{6}$

c) 1

d) $\frac{1}{2}$

17. a) 0,4

b) 0,6

18. a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{2}{7}$

19. b) $\frac{1}{4}$

20. a) 36 sequências.

b) $\frac{1}{12}$

21. 98,5%

Na Unidade

1. a

2. b

3. c

4. b

5. c

6. c

7. b

8. b

9. 14 estudantes do período da manhã e 16 do período da tarde.

Lista de siglas

Cesgranrio-RJ: Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio (Rio de Janeiro)
Embraer-SP: Empresa Brasileira de Aeronáutica S.A (São Paulo)
Enem: Exame Nacional do Ensino Médio
ESPM-SP: Escola Superior de Propaganda e Marketing (São Paulo)
FGV-EESP: Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas
FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)
Obmep: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PUC-MG: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais
Ufop-MG: Universidade Federal de Ouro Preto (Minas Gerais)
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
Unisa-SP: Universidade de Santo Amaro (São Paulo)
Vunesp: Fundação para o Vestibular da Unesp

Referências bibliográficas comentadas

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

Essa obra proporciona uma visão ampliada do que se ensina em sala de aula e foi referencial bibliográfico para a elaboração desta coleção. A Geometria euclidiana plana é apresentada de um ponto de vista que extrapola os tópicos do Ensino Básico, além de permitir a familiaridade com fatos geométricos por meio de teoria, exercícios, problemas e comentários.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. *A Matemática através dos tempos*: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução: Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

Nesse livro constam informações históricas, consultadas para a elaboração desta coleção, de pessoas e eventos importantes na construção da Matemática que conhecemos atualmente, além de propostas de projetos que aplicam, entre outros contextos, a História da Matemática.

BORBA, Marcelo de Carvalho *et al*. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Referência para o uso de tecnologias proposto nesta coleção, a obra apresenta uma visão sobre a aplicação de tecnologias em Educação Matemática, exemplificando questões teóricas e propostas de atividades, bem como dissertando sobre o presente e o futuro da sala de aula de Matemática.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. Tradução: Helena Castro. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

Esse livro é uma referência de consulta sobre a História da Matemática, e nele são apresentados e explicados aspectos dela, considerando-se a ordem cronológica e o local dos acontecimentos, desde a origem do conceito de número até os desenvolvimentos matemáticos do século XX. Ao longo dos capítulos, são apresentadas definições matemáticas importantes e as pessoas que trabalharam nelas. Esse livro foi referência para a elaboração de textos e problemas históricos abordados nesta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 25 abr. 2022.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Além disso, a BNCC estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo de cada ano da escolaridade básica, e, por isso, todos os volumes desta coleção foram desenvolvidos buscando atender a tais requisitos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 25 abr. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 25 abr. 2022.

Esses dois documentos visam esclarecer a inserção dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) aos currículos escolares e nortear as contextualizações dos conteúdos ensinados por meio de temas do interesse dos estudantes e têm relevância para o desenvolvimento deles como cidadãos. Tais temas estão presentes em diversas propostas ao longo dos volumes desta coleção, e esses documentos nortearam as propostas.

BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. *Estatística básica*. São Paulo: Saraiva, 2017.

Essa obra, destinada a cursos básicos de Probabilidade e Estatística no Ensino Superior, trata da análise de dados unidimensionais e bidimensionais com atenção especial para métodos gráficos, conceitos básicos de probabilidade e variáveis aleatórias, bem como os tópicos principais da inferência estatística. A obra foi consultada na elaboração dos conceitos relacionados à Probabilidade e à Estatística em todos os volumes desta coleção.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

Essa edição é a primeira tradução completa para o português feita do texto grego do livro original de Euclides. Nela, além de definições, postulados e axiomas, demonstram-se proposições envolvendo a Geometria euclidiana, o desenho geométrico e a Aritmética. Tais conceituações geométricas foram referências para a elaboração dos conteúdos e demonstrações geométricos ao longo desta coleção.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

Além da narrativa histórica, que abarca a História da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos, o livro adota recursos pedagógicos, como exercícios ao fim de cada capítulo. Alguns capítulos são introduzidos por panoramas culturais da época e, como um todo, a obra foi fonte de consulta para a elaboração de textos históricos para esta coleção.

GUNDLACH, Bernard H. *Números e numerais*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1998. (Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula).

Referência para a educação, bem como para a elaboração desta coleção, essa obra apresenta temas relacionados ao desenvolvimento dos números ao longo da história, desde as primeiras ideias de contagem até a abstração para o registro dos números com algarismos.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. *Fundamentos de metodologia científica*. 9. ed. Rio de Janeiro: GEN; Atlas, 2021.

Por meio de exemplificações dos mais variados conceitos, essa obra se torna um instrumento confiável para o pesquisador iniciante ou experiente ao apresentar linguagem de fácil compreensão e esclarecer procedimentos adequados a uma pesquisa científica. A obra serviu de base para as sugestões de metodologias de pesquisa apresentadas nesta coleção.

MENDENHALL, William. *Probabilidade e Estatística*. Rio de Janeiro: Campos, 1985. v. 1.

No capítulo 1, a obra procura identificar a natureza da Estatística, os objetivos e o modo pelo qual ela exerce uma função importante nas ciências, na indústria e particularmente em nossa vida diária. Nesta coleção, a utilizamos como fonte de consulta para a elaboração de conceitos e atividades didáticas.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO; João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. *Análise combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 2020.

Essa obra traz demonstrações de como resolver questões sem recorrer necessariamente a fórmulas e prepara os leitores para serem criativos ao buscarem soluções para problemas combinatórios, o que serviu de referencial para propostas didáticas nesta coleção. Além disso, traz técnicas que auxiliam na resolução de problemas envolvendo combinação de possibilidades e probabilidade.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila Cristina. *Progressões e matemática financeira*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

Essa obra apresenta o passo a passo para calcular taxa de juros e termos de progressões, além de construir planilhas eletrônicas para usá-las como calculadoras financeiras. Propostas relacionadas a essas temáticas, nesta coleção, foram desenvolvidas com referencial nessa obra.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

A obra analisa métodos criativos de resolução de problemas, revela as quatro etapas básicas da resolução de qualquer problema e sugere maneiras de trabalhar os problemas em sala de aula. Foi utilizada como fonte de consulta para estabelecer as metodologias relacionadas à resolução de problemas nesta coleção.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Nessa obra, a autora apresenta fatos da História da Matemática em ordem cronológica, sob um olhar crítico, analisando mitos e lendas perpetuados por muito tempo. A obra começa abordando conceitos matemáticos desenvolvidos na Mesopotâmia, passando por Egito, Grécia, França e Alemanha. É o primeiro livro brasileiro a retratar a História da Matemática e foi utilizado como referência no desenvolvimento desta coleção.

VIEIRA, S. *Estatística básica*. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

Essa obra mostra que a Estatística é uma ferramenta auxiliar para a tomada de decisão, pensamento que é presente nos volumes desta coleção. Os conceitos estatísticos são demonstrados na obra de maneira informal, como uma tentativa de explicar a lógica sem demonstrações matemáticas. Para incrementar a aprendizagem, são apresentados exemplos e exercícios com respostas comentadas.

WING, J. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711/pdf. Acesso em: 20 abr. 2022.

O pensamento computacional é uma habilidade fundamental para todos, pois envolve, com destaque, a resolução de problemas e a identificação de padrões, que são processos inerentes à atividade matemática e a situações cotidianas. Na publicação original, que foi traduzida para o português e consultada para a elaboração desta coleção, a autora disserta sobre os estudos relacionados ao pensamento computacional.

HINO NACIONAL

Letra: Joaquim Osório Duque Estrada

Música: Francisco Manuel da Silva

Ouviram do Ipiranga as margens plácidas
De um povo heroico o brado retumbante,
E o sol da liberdade, em raios fúlgidos,
Brilhou no céu da Pátria nesse instante.

Se o penhor dessa igualdade
Conseguimos conquistar com braço forte,
Em teu seio, ó liberdade,
Desafia o nosso peito a própria morte!

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, um sonho intenso, um raio vívido
De amor e de esperança à terra desce,
Se em teu formoso céu, risonho e límpido,
A imagem do Cruzeiro resplandece.

Gigante pela própria natureza,
És belo, és forte, impávido colosso,
E o teu futuro espelha essa grandeza.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

Deitado eternamente em berço esplêndido,
Ao som do mar e à luz do céu profundo,
Fulguras, ó Brasil, florão da América,
Iluminado ao sol do Novo Mundo!

Do que a terra mais garrida
Teus risonhos, lindos campos têm mais flores;
"Nossos bosques têm mais vida",
"Nossa vida" no teu seio "mais amores".

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, de amor eterno seja símbolo
O lábaro que ostentas estrelado,
E diga o verde-louro desta flâmula
- Paz no futuro e glória no passado.

Mas, se ergues da justiça a clava forte,
Verás que um filho teu não foge à luta,
Nem teme, quem te adora, a própria morte.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

Concurso de poesias
Brasil 200 anos de independência
Lendo nossa história, escrevendo nosso futuro

MULHERES DA HISTÓRIA, ESPELHOS DO FUTURO

Caros alunos brasileiros,
Venho aqui lhes contar
A história destas mulheres
Que defenderam seu lar.
Moças que foram à luta
Em versos vou apresentar.

Maria Leopoldina,
Esposa do imperador,
Pressionou seu marido
A ser cooperador
Na relação entre Brasil
E Portugal divisor.

Conhecem Maria Quitéria?
Forte e independente!
Entrou nas forças armadas,
Vestindo-se de homem valente,
Soldado Medeiros se fez
Conhecida do tenente.

Primeira mulher brasileira
Nas forças armadas a entrar,
Fiel heroína da pátria,
Antes, a seu pai foi desafiar,
Para sem medo ingressar na luta
E seu país ajudar.

Teve também na Bahia,
Cujo cargo de abadessa exerceu,
Irmã Joana de Jesus,
Que o convento da Lapa defendeu,
Impedindo que os soldados lá entrassem.
E por isso ela morreu.

Maria Felipa, marisqueira...
Pescou os portugueses sedentos.
Escrava de corpo,
Mas não de mente,
Liderou um grande grupo
Por uma Bahia independente.

Bela negra, capoeirista
De Itaparica, nação.
Seduzia os portugueses
E surrava-os de cansanção.
Queimou o que Portugal tinha
Ali de embarcação.

A luz que outrora brilhou,
Das ativistas aqui lembradas,
Resplandeceu no Brasil República
Em mulheres arretadas,
Que da mesma sina sofreram
De sangue, nas lutas eternizadas.

São tantas almas sedentas
Que buscam por mais justiça,
Não deixam a morte vencer.
Sem cavalos, gritam: é vida!
Mulheres inspiradoras
Que morrem por outras vidas.

Bebiam os camponeses
O amargo mel da cana,
Sem direito e liberdade.
Contra isso, sem engano,
Lutou e morreu Margarida Alves,
Uma flor paraibana.

Da mesma má sorte e sina
No céu verde cintilava
Irmã Dorothy, uma estrela
Que na terra brilhava.
Defendeu muitos sem-terra
E a reforma agrária.

Dando continuidade
Na busca pela igualdade,
Doutora Zilda apostou
Numa nova sociedade:
Salvou da fome crianças
Na Pastoral Caridade.

É ironia dizer
Justo no Haiti,
Vítima de um terremoto
Que veio lhe atingir.
Mas vivas estão as mulheres
Que ela ajudou a parir.

São incontáveis mulheres
Que merecem nos livros um lugar.
Nunca desanimaram
Nem deixaram de sonhar
Por um Brasil independente.
E no futuro pra sempre,
Em berço esplêndido,
Seu filho repousar.

Letícia Maria Morais
Vencedora Região Nordeste
Escola Estadual 26 de Março - Paraná/RN

Este livro didático é um **bem reutilizável** da escola e deve ser **devolvido em bom estado** ao final do ano para uso de outra pessoa no **próximo** período letivo.

ISBN: 978-65-5766-252-6
9 786557 662526
0044P24020008MP